MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig,
Prof. K. VonderMühll zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu München und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XIII. Band.

Mit 2 Tafeln.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1878.

Inhalt des dreizehnten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Berichtigung zu Seite 560.

Die dort genannten Kugelflächen α, β, γ, ... schneiden sich nicht in zwei Punkten ζ, ζ', sondern in unendlich vielen Punkten ζ, ζ', ζ'', ..., welche zusammengenommen eine Kreisperipherie bilden. Doch reicht es (wie dort geschehen) völlig aus, von all' diesen Punkten nur einen, etwa ζ, in Betracht zu ziehen.

Ueber das simultane System zweier quaternären Formen 2ten Grades und eine allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumcurve 4ter Ordnung $p = 1$.

Von

Gustav Westphal in Berlin.

Im Folgenden sollen einige auf das simultane System zweier quaternären quadratischen Formen 2ten Grades bezügliche algebraische Entwicklungen ausgeführt werden, welche auch von Interesse für die geometrische Theorie der Raumcurve 4ter Ordnung $p=1$, welche als Schnitt zweier Flächen 2ten Grades entsteht, sind.

Die elegante Parameterdarstellung, welche Aronhold*) für die ebene Curve 3ter Ordnung geliefert hat, und die Verwerthung für das auf die nämliche Curve bezügliche Integral führen darauf, für die Raumcurve 4ter Ordnung $p = 1$ ähnliche Resultate abzuleiten, d. h. auch für diese eine ganz allgemeine algebraische Parameterdarstellung zu gewinnen, durch welche die Coordinaten eines Curvenpunktes als explicite Functionen einer Grösse λ und der Functionalinvarianten der beiden Flächen 2ten Grades ausgedrückt werden.

Die dabei sich ergebenden Resultate haben grosse Aehnlichkeit mit gewissen Formeln aus der Theorie der ternären cubischen Formen; aus einer identischen Relation zwischen den Covarianten und Invarianten zweier Formen 2ten Grades folgert man die Darstellung einer Raumcurvensehne durch den Schnitt zweier covarianten Ebenen (Polaren)**) (§ 1.) und hieraus, ausser einigen geometrischen Consequenzen, sofort die allgemeine Parameterdarstellung (§ 2.).

---

*) Monatsberichte der Berliner Akad. der Wissenschaften vom 25. April 1861. Vergl. auch Gundelfinger Annali di Mat. Ser. II, 5, p. 235, sowie Clebsch und Gordan Math. Annalen Bd. I, p. 87, und die von Lindemann herausgegebenen Vorlesungen von Clebsch Bd. I, Theil 2, p. 645 ff.

**) Analog der Darstellung des Tangentialpunktes bei ebenen Curven 3ter Ordnung.

Kurz nach Fertigstellung des vorliegenden Aufsatzes erschien die Arbeit des Hrn. Harnack in diesen Annalen*). In dieser ist hauptsächlich die algebraische Transformation des auf die Curve bezüglichen Differentiales behandelt, und das letztere (durch das Abel'sche Theorem) zu mannigfachen Untersuchungen verwendet.

Hier ist hauptsächlich auf die schon erwähnte *allgemeine algebraische Parameterdarstellung* Werth gelegt; für das elliptische Differential ist ausser der auch von Hrn. Harnack in dem genannten Aufsatze angegebenen Substitution noch eine zweite (quadratische) angegeben, welche sich auch aus der ersten durch Grenzübergang ableiten lässt. Zum Schluss ist ein Problem behandelt, welches eine Verallgemeinerung des Problems der ein- und umgeschriebenen Polygone bei Kegelschnitten ist**) (§ 3.).

§ 1.

Beziehungen zwischen den Covarianten zweier quadratischen quaternären Formen. Einführung der Formen H und J. Darstellung der Raumcurvensehne durch den Schnitt zweier Polaren.

Wir bezeichnen im Folgenden durchgängig mit

$$f(x) = a_x^2 = b_x^2 = \cdots \text{ und } F(x) = A_x^2 = B_x^2 = \cdots$$

die beiden in Betracht kommenden Formen.

Eliminirt man aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0; \quad a_y^2 = 0, \quad A_y^2 = 0; \\ \qquad\qquad a_x^2 = 0; \quad A_x^2 = 0; \\ \qquad\qquad u_x \;\; = 0 \end{array}\right.$$

die x_i, so erhält man (nach Absonderung des Factors u_y^2) *die Gleichung der beiden* (*mit* $\varkappa : \lambda$ *variablen*) *Schnittpunkte der Ebene* $\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0$ ***) *mit der Raumcurve.* Für das Folgende ist es grundlegend, nicht die Ebenengleichung der beiden Punkte, sondern ihre *Verbindungslinie als Schnitt zweier covarianten Ebenen herzustellen.*

Hierzu dient eine identische Relation, welche zunächst auf folgende Weise hergestellt werden soll.

---

*) „Ueber die Darstellung der Raumcurve 4ter Ordnung (1ter Species) und ihres Secantensystems durch doppelt periodische Functionen", diese Annalen Bd. XII, p. 47.

**) Ein specieller Fall dieses Problems ist auch von Herrn Harnack (diese Annalen Bd. XII, p. 73) ausführlich behandelt; er betrifft die windschiefen Vierseite.

***) y ist Punkt der Curve $f=0$, $F=0$, in welchem $\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y$ Tangentialebene ist.

Bezeichnet man, wie gebräuchlich,

$(uabc)^2 = u_\alpha^2$, $(uABC)^2 = u_A^2$, $(uabC)^2 = u_\sigma^2$, $(uABc)^2 = u_\Sigma^2$

und ferner mit

$$(1)\qquad \begin{cases} R_x^2 = A_\alpha B_\alpha A_x B_x, \\ Q_x^2 = a_A b_A a_x b_x \end{cases}$$

die beiden Covarianten 2ten Grades, welche geometrisch die Polarfiguren von $f=0$ in Bezug auf $F=0$ (und umgekehrt) repräsentiren, so beweist man leicht die Richtigkeit folgender Formeln:

$$(2)\qquad \begin{cases} (ARuv)^2 = \tfrac{1}{2}\,\Theta\,(ABuv)^2 - \tfrac{1}{6}(\alpha \mathsf{A} xy)^2, \\ (aQuv)^2 = \tfrac{1}{2}\,\Theta_1(abuv)^2 - \tfrac{1}{6}(\alpha \mathsf{A} xy)^2, \\ (aRuv)^2 = \Theta\,(aAuv)^2 - \tfrac{1}{2}(\alpha\Sigma xy)^2, \\ (AQuv)^2 = \Theta_1(aAuv)^2 - \tfrac{1}{2}(\mathsf{A}\sigma xy)^2, \end{cases} \quad \big((xy)_{ik} = (uv)_{lm}\big),$$

worin Θ und Θ_1 als die bekannten simultanen Invarianten durch die *Entwicklung der Determinante von* $\varkappa f + \lambda F = 0$, nämlich

$$(3)\qquad \Delta(\varkappa, \lambda) = \varkappa^4 \Delta_f + 4\,\varkappa^3\lambda\,\Theta + 6\,\varkappa^2\lambda^2 \mathrm{H} + 4\,\varkappa\lambda^3\Theta_1 + \lambda^4\Delta_F,$$

definirt sind.

Die erste der Formeln (2) ergiebt sich sofort, wenn man auf

$$(ARuv)^2 = A_\alpha B_\alpha (ACuv)\,(BCuv)$$

den Productsatz*) anwendet, die zweite hieraus, durch Vertauschung von f mit F, und die beiden letzten durch Anwendung der Processe $\sum a_{ik}\dfrac{\partial}{\partial A_{ik}}$ und $\sum A_{ik}\dfrac{\partial}{\partial a_{ik}}$ auf die beiden ersten.

Führt man nun die im Folgenden eine wichtige Rolle spielenden Formen

$$(4)\qquad \begin{cases} H_x^2 = R_x^2 - \dfrac{\Theta}{2} A_x^2, \\ J_x^2 = Q_x^2 - \dfrac{\Theta_1}{2} a_x^2 \end{cases}$$

ein, so erhält man aus (2) sofort:

$$(5)\qquad (AHuv)^2 = (aJuv)^2 = -\tfrac{1}{6}(\alpha \mathsf{A} xy)^2.$$

Diese merkwürdige Formel, welche für die folgenden Entwicklungen wichtig ist, spricht gewissermassen eine charakteristische Eigenschaft des Formensystems von f und F aus; sie besagt, *dass sich zwei Covarianten 2ten Grades H und J so finden lassen, dass* $(AHuv)^2 - (aJuv)^2$ *identisch verschwindet und aus der Form* $(AHuv)^2 - (aJuv)^2 \equiv 0$ *springt*

*) D. h. die durch Quadrirung aus

$$a_x(bcde) - b_x(acde) + c_x(abde) - d_x(abce) + e_x(abcd) = 0$$

entstandene Identität.

*auch die Aehnlichkeit mit der in der Theorie der ternären cubischen Formen bekannten Salmon'schen Identität in die Augen**).

Sucht man andererseits 2 Formen H und J, welche der Identität $(AHuv)^2 \equiv (aJuv)^2$ genügen, so zeigt sich, dass dieselben, sofern sie homogen in den Coefficienten von f und F sind (was immer vorausgesetzt ist), sich nur um resp. zu f und F proportionale Theile von den in (4) definirten Covarianten H_x^2 und J_x^2 unterscheiden können; dass sie nämlich durch

$$\begin{cases} H = H_x^2 + \lambda \mathrm{H} a_x^2, \\ J = J_x^2 + \lambda \mathrm{H} A_x^2 \end{cases}$$

dargestellt werden können, wo λ beliebig ist.

Ferner sollen noch die Bildungen bemerkt werden, welche sich ergeben, wenn man in H_x^2 für f $f + \lambda F$, und in J_x^2 für F $F + \lambda f$ setzt, nämlich:

$$(6) \quad \begin{cases} H_{f+\lambda F, F} = H_x^2 + \lambda J_x^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\Theta_1 + \frac{\lambda}{2}\Delta_F\right)\left(a_x^2 + \lambda A_x^2\right), \\ J_{f, F+\lambda f} = J_x^2 + \lambda H_x^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\Theta + \frac{\lambda}{2}\Delta_f\right)\left(A_x^2 + \lambda a_x^2\right); \end{cases}$$

Formeln, deren geometrische Bedeutung uns später noch klarer werden wird, aus denen übrigens hervorgeht, dass H_x^2 und J_x^2 *keine Combinanten* des Büschels $\varkappa f + \lambda F = 0$ sind.

Alle diese Eigenschaften, die in (5) und (6) ausgesprochenen vor allem, berechtigen dazu, die Formen H_x^2 und J_x^2 als fundamentale Covarianten 2ten Grades für das Folgende zu benutzen.

Wir wollen nun zeigen, welche Bedeutung die Polaren von $H = 0$, $J = 0$ haben, wenn man dieselben für einen Punkt der Curve $f = 0$, $F = 0$ bildet.

Da aus $(AHuv)^2 \equiv (aJuv)^2$ für $(uv)_{ik} = (xy)_{lm}$ die für jedes x_i, y_i geltende Identität

$$(7) \quad \begin{aligned} F(x)H(y) + F(y)H(x) - f(x)J(y) - f(y)J(x) \\ = 2\left\{F(x,y)\,H(x,y) - f(x,y)\,J(x,y)\right\} \end{aligned}$$

folgt (worin $f(x,y) = a_x a_y$ etc.), *so können nunmehr die variablen Schnittpunkte von* $\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0$, $a_x^2 = 0$, $A_x^2 = 0$ *sofort durch ihre Verbindungslinie* bestimmt werden; denn wenn man (7) in der Form

---

*) Geometrisch sind $H = 0$, $J = 0$ dadurch definirt, dass der Complex der $f = 0$ und $J = 0$ in harmonischen Punktepaaren schneidenden Geraden, der analoge Complex für $F = 0$, $H = 0$, und der Complex der Geraden, von denen aus harmonische Tangentenebenenpaare an $f = 0$, $F = 0$ gehen, mit einander identisch sind. Eine *directe geometrische Definition* von $H = 0$, $J = 0$ ist allerdings schwieriger.

$$F(x)H(y)+F(y)H(x)-f(x)J(y)-f(y)J(x)$$
$$=\frac{2}{\varkappa}\Big(F(x,y)\,(\varkappa H(x,y)+\lambda J(x,y))-(\varkappa f(x,y)+\lambda F(x,y))\,J(x,y)\Big)$$

schreibt, so wird für $\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0$, $a_x^2 = 0$, $A_x^2 = 0$; $a_y^2 = 0$, $A_y^2 = 0$; auch $A_x A_y \cdot (\varkappa H_x H_y + \lambda J_x J_y) = 0$, und da $A_x A_y = 0$ sich auf den doppelt zählenden Punkt y bezieht, so muss für die restirenden beiden Punkte $\varkappa H_x H_y + \lambda J_x J_y = 0$ sein, d. h.

(8) *Dreht man um die Tangente eines Curvenpunktes y eine Ebene $\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0$, so geht durch deren beide Schnittpunkte mit der Raumcurve, die mit $\varkappa : \lambda$ variiren, stets die Ebene $\varkappa H_x H_y + \lambda J_x J_y = 0$, d. h. die Polare von y in Bezug auf die Fläche $\varkappa H(x) + \lambda J(x) = 0$.*

Dadurch ist der Punkt y abgesondert, *gleichzeitig erhalten wir die analytische Darstellung aller Raumcurvensehnen* (Verbindungslinien zweier Curvenpunkte) *als Schnitt von 2 covarianten Ebenen.*

Theilen wir nämlich die Sehnen der Raumcurve $[f=0,\ F=0]$ derart ein, dass wir alle Sehnen, welche eine bestimmte Tangente schneiden, zusammenfassen, so sehen wir, dass alle Sehnen, welche die Tangente in y schneiden, durch

$$\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0, \quad \varkappa H_x H_y + \lambda J_x J_y = 0$$

repräsentirt sind, dass dieselben die Fläche

$$a_x a_y \cdot J_x J_y - A_x A_y \cdot H_x H_y = 0$$

erfüllen, und dass die andere Schaar von Geraden dieser Fläche (welche die Tangente in y enthält), durch

$$\varrho a_x a_y + \sigma H_x H_y = 0, \quad \varrho A_x A_y + \sigma J_x J_y = 0$$

repräsentirt ist. (Dies ist eine zweite analytische Darstellung der Raumcurvensehne; sie folgt auch aus der Bemerkung, dass $H_x H_y = 0$, $J_x J_y = 0$ eine Sehne der Raumcurve 4^{ter} Ordnung ist, und es bleibt, wenn wir eine der beiden zu Grunde gelegten Flächen durch eine beliebige andere des Büschels $\varkappa f + \lambda F$ ersetzen, diese Darstellung der Art nach erhalten, es kommen alsdann die Formeln (6) in Anwendung.)

Die Fläche $a_x a_y \cdot J_x J_y - A_x A_y \cdot H_x H_y = 0$ ist, was aus dieser Form nicht unmittelbar ersichtlich ist, eine Fläche des Büschels $\varkappa f + \lambda F = 0$, sie muss sich also auch direct in die letztere Form überführen lassen; nun ergiebt sich aus Identität (7) sofort, dass für $f(y) = 0$, $F(y) = 0$ auch

$$F(x)\,H(y) - f(x)\,J(y) = 2\,(F(x,y)\,H(x,y) - f(x,y)\,J(x,y))$$

ist, wodurch die Umformung geleistet ist.

Aus den vorstehenden Erörterungen ergeben sich mehrere einfache Beweisführungen für bekannte geometrische Eigenschaften der Curve $f=0$, $F=0$. Die Schnittpunkte der Ebene $\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0$ mit der Raumcurve, wir wollen sie ξ und η nennen (indem wir den abgesonderten Punkt y ausschliessen), genügen alle beide der Gleichung $\varkappa H_x H_y + \lambda J_x J_y = 0$, wie in (8) ausgesprochen wurde.

Fällt nun einer der Punkte, etwa ξ, in y hinein, so muss $\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0$ die Schmiegungsebene in y repräsentiren; aus $\varkappa H_\xi H_y + \lambda J_\xi J_y = 0$ im allgemeinen Falle ergiebt sich jedoch $\varkappa H(y) + \lambda J(y) = 0$ in diesem speciellen; *also ist die Schmiegungsebene durch* $H(y)\,F(x,y) - J(y)\,f(x,y) = 0$ *repräsentirt**).

Sieht man andererseits in $\varkappa H(y) + \lambda J(y) = 0$, $a_y^2 = 0$, $A_y^2 = 0$, $\varkappa : \lambda$ als gegeben an, so folgt:

(9) *Die Berührungspunkte der* 8 *Tangenten, welche in der Fläche* $\varkappa f + \lambda F = 0$ *ganz enthalten sind, werden durch die Fläche* $\varkappa H + \lambda J = 0$ *ausgeschnitten.*

(Dieses Sytem von Punkten ist von der besonderen Art, dass, wenn einer dieser Punkte mit der Spitze eines durch $f=0$, $F=0$ gelegten *Kegels* verbunden wird, die Verbindungslinie die Raumcurve in einem zweiten Punkte desselben Schnittpunktsystemes schneidet.)

Fällt endlich noch η in y hinein, *so kann y nur ein Wendepunkt sein,* und $\varkappa H_x H_y + \lambda J_x J_y = 0$ geht dann durch die Tangente $a_x a_y = 0$, $A_x A_y = 0$, d. h. es ist:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} H_1 H_y & H_2 H_y & H_3 H_y & H_4 H_y \\ J_1 J_y & J_2 J_y & J_3 J_y & J_4 J_y \\ a_1 a_y & a_2 a_y & a_3 a_y & a_4 a_y \\ A_1 A_y & A_2 A_y & A_3 A_y & A_4 A_y \end{vmatrix} = (a A H J)\, a_y A_y H_y J_y = 0\ {}^{**}).$$

Diese Form, eine Combinante, stellt bekanntlich die 4 Ebenen des gemeinschaftlichen sich selbst conjugirten Tetraeders dar.

Soll ferner ξ mit η coincidiren, d. h. $\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0$ *Doppeltangentialebene* sein, dann muss

$$[\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0,\quad \varkappa H_x H_y + \lambda J_x J_y = 0]$$

irgend eine Fläche $\varrho f + \sigma F = 0$ *berühren.* Diese Bedingung ergiebt sich, wenn in $(a b u v)^2 = 0$ für

---

*) Diese Form für allgemeine Schnittcurven gab zuerst Hesse, dann Clebsch: „Ueber die Wendeberührungsebenen etc." in Crelle's Journ. 63.

**) Clebsch, Crelle's Journ. 63 l. c.

$$\begin{aligned} a_{ik} &\quad \varrho\, a_{ik} + \sigma A_{ik}\,, \\ u_i &\quad \varkappa\, a_i a_y + \lambda A_i A_y\,, \\ v_i &\quad \varkappa H_i H_y + \lambda J_i J_y \end{aligned}$$

gesetzt wird, und *wenn für das beliebige* $\varrho : \sigma$ *noch* $\varkappa : \lambda$ *gesetzt wird.* So erkennt man als Bedingung $(\varkappa H + \lambda J)^2 \Delta(\varkappa, \lambda) = 0$*). ($\Delta(\varkappa, \lambda)$ ist in Formel (3) dieses Paragraphen definirt.) Der allein in Betracht kommende Factor $\Delta(\varkappa, \lambda) = 0$ giebt den Satz:

Die 4 Tangentialebenen in y, welche noch anderweitig berühren, sind durch $\Delta(\varkappa, \lambda) = 0$ gegeben, ihr Doppelverhältniss ist constant.

Diese Sätze, die übrigens anderweitig bekannt sind, sind unmittelbare Corollare unserer algebraischen Entwicklungen, und als solche der Erwähnung werth.

§ 2.

Die allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumcurve 4[ter] Ordnung $p = 1$.

Wir hatten im Vorhergegangenen die für die Parameterdarstellung nöthigen algebraischen Vorbereitungen mehr ihrem geometrischen Inhalte nach verwerthet; aber es hätte keinen Schwierigkeiten unterlegen, dieselbe bald in der Weise, wie es nunmehr geschehen soll, abzuleiten.

Es sind die Coordinaten ξ_i und η_i der Schnittpunkte von

$$\begin{Bmatrix} \varkappa\, a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0 \\ \varkappa H_x H_y + \lambda J_x J_y = 0 \end{Bmatrix}$$

mit der Raumcurve, oder, was dasselbe ist, *mit irgend einer Fläche des Büschels*, sagen wir $\varrho f + \sigma F = 0$, zu bestimmen.

Nun ist die Gleichung der Schnittpunkte einer Geraden ($u_x = 0$, $v_x = 0$) mit der Fläche 2[ter] Ordnung $p_x{}^2 = 0$ (für w_i als laufende Ebenencoordinaten) stets $(p u v w)^2 = 0$ und die Trennung in Factoren kann nach einem Verfahren, ähnlich dem von Clebsch und Gordan (Theorie der Ab. Fct. p. 70) eingeschlagenen, leicht ausgeführt werden.

Setzt man nämlich $(p u v w)^2 = w_\xi w_\eta$, was nach dem Vorhergehenden möglich ist, so erhält man:

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_i \eta_i = (p u v)_i{}^2 = (p' u v)_i{}^2, \\ \xi_i \eta_k + \xi_k \eta_i = 2\,(p u v)_i\,(p u v)_k\,, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} (\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)^2 = 4 (u v)_{lm}{}^2 - \tfrac{1}{2}(p p' u v)^2, \quad (i, k, l, m, = 1, 2, 3, 4), \\ \text{also} \\ \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i = \pm 2 (u v)_{lm} \sqrt{-\tfrac{1}{2}(p p' u v)^2}\,. \end{cases}$$

---

*) Die Bedeutung des anderen Factors ist klar: er liefert die Schmiegungsebene im Punkte y_i, deren Parameter ja $\frac{\varkappa}{\lambda} = -\frac{J(y)}{H(y)}$ ist.

Durch Addition von (1) und (2), sowie durch Multiplication der entstehenden Gleichungen mit $\gamma, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ erhält man:

$$(3) \qquad \mathsf{M}\xi_i = (puv)_i(puv\gamma) + (uv\gamma)_i\sqrt{-\tfrac{1}{2}(pp'uv)^2},$$

und die η_i entstehen hieraus durch Aenderung des Vorzeichens der Wurzel.

Die γ_i sind ganz willkürliche Grössen, deren Werth nur auf den Proportionalitätsfactor $\mathsf{M} = \sum_i \eta_i \gamma_i$ von Einfluss ist, und welche man auch variabel annehmen kann; nur nicht so, dass sie M verschwinden lassen.

Wir setzen nun, im vorliegenden Falle, in (3) für

$$(4) \qquad \begin{cases} u_i & \varkappa a_i a_y + \lambda A_i A_y, \\ v_i & \varkappa H_i H_y + \lambda J_i J_y, \end{cases}$$

und zugleich

$$p_{ik} = \varrho a_{ik} + \sigma A_{ik},$$

und erhalten dadurch die gesuchte Parameterdarstellung.

Die Reductionen, welche dazu dienen, um dieser die einfachste Form zu geben, deren sie fähig ist, werden am besten erkannt, wenn man die in (3) auftretenden symbolischen Ausdrücke in Determinantenform schreibt. Man hat nämlich:

$$(5) \qquad (puvw)(puv\gamma) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & u_1 & v_1 & w_1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & u_2 & v_2 & w_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & u_3 & v_3 & w_3 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & u_4 & v_4 & w_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

denkt man sich darin für u_i und v_i ihre Werthe gesetzt (aus (4)), und *gleichzeitig für* $\varrho : \sigma$ *den besonderen Werth* $\varkappa : \lambda$ *gewählt, sowie für* γ_i *den besonderen Werth* $f_i(y)$ *oder* $F_i(y)$, so kann man durch Zerstörung der Reihen in der geschriebenen Determinante sofort $\varkappa H(y) + \lambda J(y)$ absondern und erhält:

$$(6) \; (puv\omega)(puv\gamma) \equiv \{\varkappa H(y) + \lambda J(y)\} \begin{vmatrix} \varkappa a_{11} + \lambda A_{11} & \cdots\cdots & \varkappa H_1 + \lambda J_1 & w_1 \\ \varkappa a_{21} + \lambda A_{21} & \cdots\cdots & \varkappa H_2 + \lambda J_2 & w_2 \\ \varkappa a_{31} + \lambda A_{31} & \cdots\cdots & \varkappa H_3 + \lambda J_3 & w_3 \\ \varkappa a_{41} + \lambda A_{41} & \cdots\cdots & \varkappa H_4 + \lambda J_4 & w_4 \\ f_1 & f_2 \;\; f_3 \;\; f_4 & 0 & 0 \\ F_1 & F_2 \;\; F_3 \;\; F_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

ausserdem ist, wie schon in § 1. am Ende gebraucht wurde, für die festgesetzten Werthe von p_{ik}, u_i, v_i:

$$\therefore \quad -\tfrac{1}{2}(pp'uv)^2 = +\tfrac{1}{24}\{\varkappa H(y)+\lambda J(y)\}^2\Delta(\varkappa,\lambda);$$

und so erhält man denn sofort als explicite Gleichung eines Curvenpunktes ξ *in* w_i *als laufenden Coordinaten:*

$$(7)\quad \mathsf{M}w_\xi = \begin{vmatrix} \varkappa a_{11}+\lambda A_{11} & \varkappa a_{12}+\lambda A_{12} & \varkappa a_{13}+\lambda A_{13} & \varkappa a_{14}+\lambda A_{14} & \varkappa H_1+\lambda J_1 & w_1 \\ \varkappa a_{21}+\lambda A_{21} & \lambda a_{22}+\lambda A_{22} & \varkappa a_{23}+\lambda A_{23} & \varkappa a_{24}+\lambda A_{24} & \varkappa H_2+\lambda J_2 & w_2 \\ \varkappa a_{31}+\lambda A_{31} & \varkappa a_{32}+\lambda A_{32} & \varkappa a_{33}+\lambda A_{33} & \varkappa a_{34}+\lambda A_{34} & \varkappa H_3+\lambda J_3 & w_3 \\ \varkappa a_{41}+\lambda A_{41} & \varkappa a_{42}+\lambda A_{42} & \varkappa a_{43}+\lambda A_{43} & \varkappa a_{44}+\lambda A_{44} & \varkappa H_4+\lambda J_4 & w_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & 0 & 0 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\pm \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \varkappa H_1+\lambda J_1 & \varkappa H_2+\lambda J_2 & \varkappa H_3+\lambda J_3 & \varkappa H_4+\lambda J_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} \sqrt{\tfrac{1}{24}\Delta(\varkappa,\lambda)},$$

wobei $\varkappa H(y)+\lambda J(y)$ in M als Factor eingegangen ist und die Differentialquotienten f_i, F_i etc. mit den Coordinaten des willkürlichen Curvenpunktes y_i als Argumenten geschrieben gedacht sind.

Dies ist also die Form der Parameterdarstellung*), in welcher $\varkappa:\lambda$ in dem möglichst *niedrigsten* Grade auftritt, schreibt man nämlich mit leicht verständlichen Abkürzungen

$$\mathsf{M}w_\xi = D + E\sqrt{\tfrac{1}{24}\Delta(\varkappa,\lambda)},$$

so kommt $\varkappa:\lambda$ in D nur bis zum 3ten Grade, in E nur im 1ten Grade vor.

Die Ausdrücke D und E sind als Covarianten in y, mit constantem $\varkappa:\lambda$ betrachtet, keine *Combinanten*, d. h. sie ändern sich, sobald man die willkürlich bevorzugten Flächen $f=0$ und $F=0$ durch andere des Büschels ersetzt. Aber sie werden Combinanten, sobald man in ihnen $\varkappa = A_\xi A_y$, $\lambda = -a_\xi a_y$ setzt, wie dies auch aus der geo-

*) Die Ausdrücke in (7) werden für einen Werth des Parameters

$$\frac{\varkappa}{\lambda} = -\frac{J(y)}{H(y)}$$

unbrauchbar, weil dann M verschwindet. Für diesen Fall muss man in (3) γ_i, ϱ und σ willkürlich lassen, unter welcher Voraussetzung auch die allgemeine Parameterdarstellung nur in weniger eleganter Form gelungen wäre. Noch besser ist es, in $(puvw)^2=0$ für diesen Fall direct den Factor $w_y=0$ abzulösen, was ohne principielle Schwierigkeiten geschieht, der übrigbleibende Factor hat jedoch keine sehr einfache Gestalt.

metrischen Definition des Parameters $\varkappa : \lambda$ hervorgeht, der ja, sobald $f = 0$ und $F = 0$ im Büschel geändert werden, selbst einer linearen Transformation unterliegt.

Uebrigens haben die Ausdrücke in (7) in ihrem Bau grosse Aehnlichkeit mit den Aronhold'schen entsprechenden für Curven 3[ter] Ordnung, wie nicht erst bemerkt zu werden braucht.

§ 3.

Das Integral $\int \frac{\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3 \, dx_4}{(aAuv) a_x A_x}$ $[f = 0, \; F = 0]$.

Ableitung des Abel'schen Theorems aus der Transformation desselben. Die windschiefen $2n$ Seite, welche der Raumcurve einbeschrieben sind.

Die Reduction des (elliptischen) Differentiales

$$D_{(x)} = \frac{\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3 \, dx_4}{(aAuv) a_x A_x} \text{ *)},$$

worin $(uv)_{lm} = (\xi\eta)_{ik}$ gesetzt ist, kann im Anschluss an das Vorhergehende nunmehr ebenfalls bewerkstelligt werden.

Bemerkt man nämlich, dass der Werth von $D_{(x)}$ von den wilkürlichen Liniencoordinaten $(\xi\eta)_{ik} = (uv)_{lm}$ ganz unabhängig ist, so kann dasselbe in eine zur Reduction geeignete Form gebracht werden, dadurch, dass man für (uv) die Tangente eines beliebigen Curvenpunktes y, also $u_i = a_i a_y$, $v_i = A_i A_y$ setzt. Wir betrachten also jetzt das Differential:

$$(1) \quad D_x = \frac{a_x a_y \cdot A_{dx} A_y - A_x A_y \cdot a_{dx} a_y}{(aAbB) a_x b_y A_x B_y} \text{ **)} = \frac{a_x a_y \cdot A_{dx} A_y - A_x A_y \cdot a_{dx} a_y}{\Gamma},$$

worin $f(x) = 0$, $F(x) = 0$, $f(y) = 0$, $F(y) = 0$.

Der im Nenner stehende Ausdruck ist eine Combinante, deren geometrische Bedeutung dadurch gegeben, dass für y als einen Curvenpunkt und x als laufende Coordinaten $\Gamma = 0$ einen Kegel bedeutet, der die Tangente in y als Erzeugende enthält, und der durch die 4 Kegelspitzen des Büschels $\varrho f + \sigma F = 0$, sowie durch die Berührungspunkte der 4 Doppeltangentialebenen, welche durch die Tangente in y gelegt werden können, geht. Dadurch erkennt man, dass man setzen kann (mit Rücksicht auf die in § 1. am Ende gegebene Bedeutung von $\Delta(\varkappa, \lambda) = 0$):

---

*) Diese Form der auf Raumcurven bezüglichen Differentiale gab Clebsch „Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie", Crelle's Journ. 63.

**) Weil $\Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3 dx_4 = u_x v_{dx} - u_{dx} v_x$ ist.

(2) $$\Gamma^2 = m\Delta\,(A_x A_y;\, - a_x a_y) + Mf(x) + NF(x)\,,$$

worin M und N von 2ten Grade in x und vom 4ten in y sind; jedoch gilt dieses nur eben für y als einen Curvenpunkt. Daraus folgt, wenn auch $f(x) = 0$, $F(x) = 0$:

(3) $$\Gamma^2 = m\Delta(A_x A_y;\, - a_x a_y)\ ^{*)}\,,$$

wo der numerische Factor m aus der kanonischen Form bestimmt werden kann, und als $= \frac{1}{48}$ erkannt wird.

Wir sind jedoch im Stande, diesen Factor m und die Relation (3), ohne den Schluss zu benutzen, auf dem (2) beruht, abzuleiten, indem wir das Quadrat von Γ wirklich bilden und dabei alle $f(x)$, $F(x)$, $f(y)$, $F(y)$ als Factor enthaltenden Terme weglassen. —

Dies ist immer auszuführen, indem wir zunächst die Form $\psi = (aAuv)a_x A_x$ ins Quadrat erheben, wodurch man zunächst Terme erhält, welche in u_x^2, $u_x v_x$, v_x^2 multiplicirt sind; wenn man nun $u_i = A_i A_y$, $v_i = a_i a_y$ setzt, so ergiebt sich, stets mit der Berücksichtigung, dass x und y Punkte der Curve $f = 0$, $F = 0$ sind, und mit Anwendung des Productsatzes die Formel:

$$\Gamma^2 = \tfrac{1}{48}\,\Delta(A_x A_y;\, - a_x a_y)\,,\quad \left.\begin{matrix} f(x) = 0, & F(x) = 0 \\ f(y) = 0, & F(y) = 0 \end{matrix}\right\}\,,$$

deren Richtigkeit damit jedenfalls sichergestellt ist.

Daraus folgt nun wieder:

(4) $$D_{(x)} = 4\sqrt{3}\cdot\frac{a_x a_y\cdot A_{dx}A_y - A_x A_y\cdot a_{dx}a_y}{\sqrt{\Delta\,(A_x A_y;\, - a_x a_y)}}\,,$$

so dass also durch die Substitution $\frac{\varkappa}{\lambda} = -\frac{A_x A_y}{a_x a_y}$ unser Differential in die Form $D_{(x)} = \pm\, 4\sqrt{3}\,\frac{\lambda d\varkappa - \varkappa d\lambda}{\sqrt{\Delta(\varkappa,\lambda)}}$ übergeht, wo $\Delta\,(\varkappa,\lambda)$ die bekannte Bedeutung hat.

Die hier angewandte Substitution, ganz analog der von Aronhold für das auf eine cubische ternäre Form bezügliche Differential angewandten, ist in den Variabeln x_i *linear*; ich werde nun, entsprechend der von Brioschi**) im erwähnten Falle gegebenen, eine *höhere* Substi-

*) Zu diesem selben Resultate ist auch Herr Harnack, Math. Annalen Bd. XII, Heft 1, gelangt. Daselbst ist auch die wirkliche Elimination geleistet, welche die Werthe des Differentiales in den Schnittpunkten einer Ebene bestimmt.

**) Brioschi, comptes rendus, tom. LVI, und Crelle's Journ. 63: Lettre de M. Hermite etc.

tution angeben, welche dasselbe leistet, und zwar will ich diese Substitution zunächst *durch einen Grenzübergang* ableiten.

Bemerken wir zunächst, dass für x und y als Curvenpunkte stets nach der Identität (7) in § 1.:

$$(6) \qquad \frac{f(x,y)}{F(x,y)} = \frac{H(x,y)}{J(x,y)}$$

ist, *dass also, wenn* $\frac{\varkappa}{\lambda} = -\frac{F(x,y)}{f(x,y)}$ *das Differential auf die Form* $\pm 4\sqrt{3}\,\frac{\lambda\,d\varkappa - \varkappa\,d\lambda}{\sqrt{\Delta(\varkappa,\lambda)}}$ *bringt, auch* $\frac{\varkappa}{\lambda} = -\frac{H(x,y)}{J(x,y)}$ *dasselbe thut.*

Nun war x auf der Curve $f=0$, $F=0$ *variabel*, y auf derselben Curve fest und *willkürlich*, also hat man, da das Endresultat von y unabhängig ist, die Berechtigung, y mit x coincidiren zu lassen, man hat dann gleichzeitig das interessante Resultat, welches aus (6) folgt:

$$\mathrm{Lim}\left[\frac{f(x,y)}{F(x,y)}\right]^{x_i = y_i} = \frac{H(x)}{J(x)}$$

immer für x und y als *Curvenpunkte.*

Der Grenzwerth $\frac{H(x)}{J(x)}$ *ist aber ein bestimmter, da* H *und* J *niemals gleichzeitig verschwinden, ausgenommen da, wo* $f=0$, $F=0$ *sich berühren sollten, was hier ausgeschlossen ist.*

Also auch durch die Substitution 2^{ten} *Grades*

$$\frac{\varkappa}{\lambda} = -\frac{J(x)}{H(x)} \text{ wird } \sum \frac{\pm\,\xi_1\eta_2 x_3\,dx_4}{(aAuv)a_x A_x} = D_{(x)} \text{ in } 4\sqrt{3}\cdot\frac{\lambda\,d\varkappa - \varkappa\,d\lambda}{\sqrt{\Delta(\varkappa,\lambda)}}$$

übergeführt.

Direct algebraisch würden wir den Beweis dafür erbringen, wenn wir die von Salmon*) gegebene Berechnung des Quadrates von

$$(aAHJ)a_x A_x H_x J_x = T_x{}^4 \quad \text{(vergl. § 1. (10))}$$

zu Hülfe nehmen; wir bekommen dann, unserer Bezeichnung angepasst:

$$\{T_x{}^4\}^4 = \tfrac{1}{48}\,\Delta\big(J(x),\, -H(x)\big);$$

also, wenn man in $D_{(x)}$ Zähler und Nenner mit $T_x{}^4$ multiplicirt:

$$D_{(x)} = \frac{H(x)\,dJ(x) - J(x)\,dH(x)}{T_x{}^4},$$

*) Analyt. Geom. d. Raumes 1. Aufl., 2. Theil, Anhang über Invarianten und Covarianten von Flächen 2^{ten} Grades.

was wieder direct algebraisch durch $\frac{\varkappa}{\lambda} = -\frac{J(x)}{H(x)}$ zur Form

$$\pm 4\sqrt{3}\,\frac{\lambda d\varkappa - \varkappa d\lambda}{\sqrt{\Delta(\varkappa, \lambda)}}$$

führt.

Auch für das allgemeine Differential

$$\frac{\Theta\, \Sigma \pm \xi_1 \eta_2 x_3 dx_4}{\mathsf{H}(aAuv) a_x A_x} = \Delta_{(x)},$$

worin Θ und H homogene Functionen gleicher Ordnung sind, liefert die in § 2. gegebene allgemeine Parameterdarstellung ein Mittel, dasselbe so umzuformen, dass nur die Irrationalität $\sqrt{\Delta(\varkappa, \lambda)}$ auftritt.

Wir können hieran noch einige Bemerkungen, betreffend die geometrische Anwendung der hier entwickelten Transformation des elliptischen Differentiales, knüpfen.

Die Formel

$$D_{(x)} = \pm 4\sqrt{3}\,\frac{\lambda d\varkappa - \varkappa d\lambda}{\sqrt{\Delta(\varkappa, \lambda)}}$$

bedeutet geometrisch, dass man die Werthe von $D_{(x)}$ in den variablen Schnittpunkten von $\varkappa a_x a_y + \lambda A_x A_y = 0$ mit der Raumcurve hergestellt hat, oder, was dasselbe ist, in den Schnittpunkten einer die Tangente in y schneidenden Raumcurvensehne. Diese Sehne beschreibt aber mit variablen $\varkappa : \lambda$ eine Fläche des Büschels $\varrho f + \sigma F = 0$, und, da die Werthe des Differentiales $D_{(x)}$ gleich und entgegengesetzt sind, so schliesst man, durch Integration von einem beliebigen Curvenpunkte α aus:

die Summe der Integrale

$$\int_{(\alpha)}^{(x)} D_{(x)} + \int_{(\alpha)}^{(y)} D_{(x)},$$

genommen von einem beliebigen Punkte α aus, bis resp. zu den Schnittpunkten x und y einer Sehne ist constant $= u_0$, so lange die Sehne (xy) die eine Schaar von Erzeugenden einer und derselben Fläche $\varrho f + \sigma F = 0$ beschreibt. (Die Abhängigkeit der Constante u_0 von $\varrho : \sigma$ werden wir später bestimmen.)

Bezeichnen wir also mit $u(x)$ das Integral

$$\int_{\alpha}^{x} D_{(x)} = 4\sqrt{3} \int_{\lambda_0 : \varkappa_0}^{\lambda : \varkappa} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}},$$

so haben wir:

$$(7) \quad \begin{cases} u(x) + u(y) \equiv u_0 \text{*)} & \text{für die } \textit{eine} \text{ Schaar,} \\ u(z) + u(t) \equiv v_0 & \text{für die } \textit{andere} \text{ Schaar} \end{cases}$$

von Erzeugenden einer Fläche $\varrho f + \sigma F = 0$; und u_0 und v_0 sind die Fläche in gewissem Sinne charakterisirende Constante, welche von $\varrho : \sigma$ allein abhängig sind. Aber es ist sofort einzusehen, dass $u_0 + v_0$ von $\varrho : \sigma$ unabhängig, also eine allein von den die Raumcurve bestimmenden Elementen abhängige Constante ist.

Lässt man nämlich in (7) x mit y, und z mit t zusammenfallen, so hat man 2 sich schneidende Tangenten, welche auf derselben Büschelfläche liegen**), vor sich, und man erhält:

$$(8) \quad \begin{cases} 2\,u(x) \equiv u_0\,, \\ 2\,u(z) \equiv v_0\,. \end{cases}$$

Aber die Verbindungslinie von x und z liegt auf einem der Kegel, die in dem Büschel 2ter Ordnung $\varrho f + \sigma F = 0$ enthalten sind; für einen Kegel fallen offenbar diejenigen Constanten, welche mit u_0 und v_0 bezeichnet wurden, zusammen und man hat zugleich:

$$u(x) + u(z) \equiv C,$$

wo C eine absolute Constante ist, also:

$$u_0 + v_0 \equiv 2\,C,$$

d. h. von $\varrho : \sigma$ unabhängig.

Addirt man sodann die Gleichungen (7), so erhält man:

$$(9) \quad u(x) + u(y) + u(z) + u(t) \equiv 2\,C.$$

Dies ist aber der Satz für die Schnittpunkte einer Ebene mit der Raumcurve; denn x, y, z, t liegen stets in einer Ebene, während man andererseits zu den 4 Schnittpunkten einer Ebene x, y, z, t stets eine Fläche $\varrho f + \sigma F = 0$ bestimmen kann, welche (xy) und (zt) als Erzeugende verschiedener Schaaren enthält; die Constante $2\,C$ ist aber von der Lage der schneidenden Ebene unabhängig. Das Wesentliche hierbei ist, dass wir den Satz *allein aus der Transformation des elliptischen Differentiales* und einigen einfachen Betrachtungen abgeleitet haben. —

Man kann bewirken, dass die Constante $2\,C \equiv 0$ wird, wenn man nämlich in

$$u(x) = \int_a^x D_{(x)} = 4\sqrt{3}\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}} \quad [\varkappa = 1]$$

---

*) Das Zeichen $\equiv$ bedeutet, wie gewöhnlich, so viel als: „mit Hinzufügung von Perioden".

**) Wie früher erwähnt, giebt es 8 Tangenten der Raumcurve, welche in einer gegebenen Fläche $\varrho f + \sigma F = 0$ liegen.

für α einen Wendepunkt, also für λ_0 den Parameter desselben annimmt, wobei selbstverständlich dem λ_0 auch ein bestimmtes Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{\Delta(\lambda_0)}$ entspricht.

Dann hat man

$$u(x) + u(y) + u(z) + u(t) \equiv 0$$

und in den Formeln (7) wird $u_0 = -v_0$, also erhält man:

$$(10) \qquad \begin{cases} u(x) + u(y) \equiv u_0 \\ u(z) + u(t) \equiv - u_0 \end{cases}$$

als Bedingung, dass eine Sehne auf einer bestimmten Büschelfläche liegt, welche letztere nunmehr nur noch durch *eine* Constante u_0 charakterisirt ist.

Diese Constante u_0 lässt sich durch ein elliptisches Integral ausdrücken, dessen obere Grenze der Parameter $\varrho:\sigma$ der zugehörigen Fläche $\varrho f + \sigma F = 0$ ist.

Denn die Perioden ω und ω' des Integrales $u(x) = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}$ können stets so gewählt werden, dass man hat

$$\frac{c}{2} = \int\limits_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}, \quad \frac{c}{2} + \frac{\omega}{2} = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}, \quad \frac{c}{2} + \frac{\omega'}{2} = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}},$$

$$\frac{c}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2} = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_4} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}},$$

worin λ_i die Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$, und c *diejenige Grösse ist, für welche $S(u)$, die eindeutige doppelt periodische Umkehrung von* $u = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}$, *der Gleichung $S(u) = S(c-u)$ innerhalb des Periodenparallelogramms genügt.*

Nun hat der unserer Parameterdarstellung zu Grunde gelegte Punkt y als zugehöriges Integral $-\frac{c}{2}$, und wendet man die Formel (10) für den Fall $y_i = y_i$, $t_i = y_i$ an, so haben die dadurch bestimmten Punkte x und z ein und denselben Parameter $\varrho:\sigma$,*) dagegen *Integrale*, deren Summe (nach den vorhergehenden Betrachtungen) $= c$ ist.

---

*) Denn die Ebene (yxz) ist, wie geometrisch klar, Tangentialebene an $\varrho f + \sigma F = 0$, daher haben die durch sie ausgeschnittenen Punkte den gemeinschaftlichen Parameter $\varrho:\sigma$.

Formel (10) giebt dann

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\frac{\sigma}{\varrho}}\frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}-\frac{c}{2}\equiv \quad u_0 \\ \displaystyle c-\int_{\lambda_0}^{\frac{\sigma}{\varrho}}\frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}-\frac{c}{2}\equiv -u_0 \end{array}\right\} \text{ also } u_0=-\frac{c}{2}+\int_{\lambda_0}^{\frac{\sigma}{\varrho}}\frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}.$$

Hiermit ist aber die gewünschte Darstellung, welche den Zusammenhang von u_0 mit $\varrho:\sigma$ darlegt, geleistet; und man hat umgekehrt

$$\frac{\sigma}{\varrho}=S\left(\frac{c}{2}+u_0\right).$$

Es ist immerhin interessant, zu bemerken, wie dieser Zusammenhang dazu dienen kann, nicht nur *Punkte der Raumcurve, sondern auch Flächen des Büschels, welche gewissen Bedingungen genügen, mit Hülfe der Theilung und Multiplication der elliptischen Functionen zu bestimmen*, d. h. *die Gleichungen wirklich aufzustellen, deren Wurzeln ihre Parameter* $\frac{\sigma}{\varrho}$ *sind.* Hierzu ist dann, ausser den betreffenden Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen nur noch eine (leicht zu erreichende) Kenntniss der Function $S(u)$ durch die einfachsten sinam u etc. nothwendig.

Ein etwas weitergehendes Problem dieser Art ist das folgende:

Es sollen diejenigen Flächen $\varrho f+\sigma F=0$ bestimmt werden, auf denen sich Polygone gerader Seitenzahl) construiren lassen, deren Ecken der Raumcurve angehören, und deren Seiten abwechselnd in der einen und anderen Schaar von Erzeugenden dieser Fläche enthalten sind.*

Es giebt eine begrenzte Anzahl solcher Flächen, und die auf ihnen liegenden Polygone haben merkwürdige geometrische Eigenschaften mit den einem Kegelschnitte einbeschriebenen und einem anderen umschriebenen Polygonen gemein, welchem letzteren Problem das vorher angegebene auch im Raume entspricht**).

Seien nämlich $u_1, u_2, u_3 \cdots u_{2n}$ die Integralparameter der aufeinander folgenden Ecken des Polygons von $2n$ Seiten, ferner u_0 die

---

*) Polygone dieser Art von ungerader Seitenzahl können, wenn sie existiren, selbstverständlich nur uneigentliche sein.

**) Dasselbe Problem entspricht andererseits auch den Steinerschen Polygonen auf ebenen Curven 3ter Ordnung; es ist enthalten in einem noch viel allgemeineren, welches Clebsch in der schon genannten Abh. „Anwendung der Abel'schen Fct. auf die Geometrie" Crelle 63 behandelt hat. *Den Fall $n=2$ hat Harnack diese Ann. Bd. XII, p. 73 behandelt.*

Constante, welche $\varrho f + \sigma F = 0$ zugehört, so hat man aus den Gleichungen des Problems

$$(12)\quad \begin{cases} u_1 + u_2 \equiv u_0 \\ u_2 + u_3 \equiv - u_0 \\ u_3 + u_4 \equiv u_0 \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ u_{2n} + u_{2n+1} \equiv - u_0 \\ \qquad u_{2n+1} \equiv u_1 \end{cases}$$

sofort $u_0 \equiv \frac{m\omega + p\omega'}{2n}$ also nach Formel (11)

$$\frac{\sigma}{\varrho} = S\left(\frac{c}{2} + \frac{m\omega + p\omega'}{2n}\right),$$

worin m und p als ohne gemeinschaftlichen Theiler mit n angenommen werden, und alle ganzzahligen Werthe von $-n$ bis $+n$ durchlaufen, mit Ausnahme derjenigen Combinationen, welche nach der eben gemachten Bemerkung ausgeschlossen sind.

Die wirkliche Aufstellung der Gleichung für die besagten Flächen hängt also mit der Aufstellung der speciellen Theilungsgleichung für die elliptische Function $S(u)$ zusammen, und kann direct bewerkstelligt werden.*)

Die entstandenen $2n$ seitigen Polygone, deren es auf einer solchen Fläche unendlich viele giebt, haben *verschiedene* geometrische Eigenschaften, *je nachdem n ungerade oder gerade ist*; ein Umstand, der z. B. bei den entsprechenden Problemen in der Ebene nicht in dieser Weise hervortritt.

Erstens wenn n ungerade ist, so folgt aus (12)

$$(13)\quad \begin{cases} u_1 + u_{n+1} \equiv n u_0 \equiv \frac{m\omega + p\omega'}{2}, \\ u_2 + u_{n+2} \equiv \frac{m\omega + p\omega'}{2}, \\ \quad \cdot \qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad \cdot \\ u_n + u_{2n} \equiv \frac{m\omega + p\omega'}{2}; \end{cases}$$

Zweitens wenn n gerade ist, so ergiebt sich ebenso

*) Für eine specielle Annahme des Punktes y und der Flächen f und F vereinfacht sich die Function $S(u)$ unter Umständen noch erheblich, weil dann Δ_f, Θ etc. specielle Werthe annehmen.

$$(14)\quad u_1 - u_{n+1} \equiv u_2 - u_{n+2} \equiv \cdots \equiv u_n - u_{2n} \equiv \frac{m\omega + p\omega'}{2};$$

und beide Gleichungen lassen eine geometrische Deutung zu.

Die Formeln (13) zeigen, dass die Verbindungslinien von gegenüberliegenden Eckpunkten $(u_1 u_{n+1})$, $(u_2 u_{n+2})$ etc. *stets durch eine Kegelspitze des Büschels* $\varrho f + \sigma F = 0$ *hindurchgehen*, wie aus (10) in Verbindung mit (11) für $\frac{\varrho}{\sigma} = \lambda_i$ hervorgeht; und zwar ist diese Kegelspitze (Ecke des gemeinschaftlich conjugirten Tetraeders) verschieden, je nachdem m und p gleichzeitig gerade, ungerade, oder das eine gerade, das andere ungerade ist. Wir können deshalb von den 4 Kegelspitzen $0, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}$ sprechen.

Die Bedingung (14) ist etwas weniger einfach zu interpretiren.

Geht man davon aus, dass z. B. $u_1 + u_2 \equiv 0$ die Bedingung ist, damit die Linie $(u_1 u_2)$ durch die Kegelspitze 0 gehe, $u_2 + u_3 \equiv \frac{\omega}{2}$ die analoge Bedingung für $(u_2 u_3)$ und die Kegelspitze $\frac{\omega}{2}$, *so erhält man* $u_1 - u_3 \equiv \frac{\omega}{2}$ *als Bedingung, dass die Linie* $(u_1 u_3)$ *die Verbindungslinie der Kegelspitzen* $0, \frac{\omega}{2}$ *treffe*; ganz die nämliche Relation erhält man auch, wenn man die Kegelspitzen 0 und $\frac{\omega}{2}$ mit den noch übrigbleibenden $\frac{\omega'}{2}$ und $\frac{\omega'+\omega}{2}$ vertauscht; daraus folgt: *Schneidet eine Sehne der Raumcurve die eine Kante des gemeinschaftlichen sich selbst conjugirten Tetraeders, so schneidet sie auch die gegenüberliegende Kante.* Hierdurch ist die Bedingung

$$u_1 - u_2 \equiv \frac{m\omega + p\omega'}{2}$$

interpretirt.

Man sieht also, dass sich die Hauptdiagonalen eines solchen $2n$-Ecks wesentlich verschieden verhalten, je nachdem n ungerade oder gerade ist; wir stellen noch im Folgenden die wesentlichen aus (13) und (14) resultirenden Eigenschaften verbunden mit einigen aus einfachen geometrischen Betrachtungen hieraus sich ergebenden Zusätzen auf:

I. Wenn n ungerade ist, *dann gehen die Hauptdiagonalen eines* $2n$-*Ecks der besprochenen Eigenschaft durch einen festen Punkt*, dieser Punkt ist stets eine der Ecken des gemeinschaftlichen sich selbst conjugirten Tetraeders und bleibt fest, wenn das Polygon sich so dreht, dass seine Seiten auf derselben Fläche, seine Ecken auf der Raumcurve bleiben. (Hiernach zerfallen also die Polygone mit ungeradem n in 4 wesentlich getrennte Arten.)

Die Tangenten, in gegenüberliegenden Eckpunkten an die Raumcurve gelegt, schneiden sich auf der Polarebene des Schnittpunktes der Hauptdiagonalen (Tetraederebene) und beschreiben in derselben mit ihren Schnittpunkten eine Curve 4^{ter} Ordnung mit 3 Doppelpunkten in 3 Ecken des Tetraeders.

Die gegenüberliegenden Seiten eines solchen Polygones (d. h. die Seite $(u_1 u_2)$ und $(u_{n+1} u_{n+2})$ etc.) schneiden sich auf der nämlichen Tetraederebene; deren Schnittpunkte jedoch liegen auf einem Kegelschnitt, welcher die Raumcurve 4^{ter} Ordnung in 4 Wendepunkten trifft.

II. Wenn n gerade ist, *so gehen die Hauptdiagonalen nicht mehr durch einen festen Punkt, hingegen schneiden sie alle ein Gegenkantenpaar des gemeinschaftlich coujugirten Tetraeders* (sie zerfallen also in 3 wesentlich verschiedene Arten, entsprechend den 3 Gegenkantenpaaren). Auch diese Beziehung bleibt bei Drehung des Polygons unverändert.

Die Tangenten in gegenüberliegenden Eckpunkten schneiden sich nicht mehr, bilden aber mit dem betreffenden Gegenkantenpaar stets 4 hyperboloidische Geraden.

Projicirt man nun die besagten Polygone von einer Kegelspitze aus, so gehen sie über in ebene Polygone, welche einem Kegelschnitte einbeschrieben, einem anderen umschrieben sind. Die Poncelet'schen Sätze für diese letzteren folgen nun aus den von uns eben angegebenen Sätzen sofort; nur fallen die Eigenschaften der Polygone für ein gerades resp. ungerades n zum Theil zusammen.

Berlin, im Juni 1877.

Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welcher sich aus dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergiebt. *)

Von

A. Mayer in Leipzig.

Setzt man:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

und W gleich einer beliebigen Function von t, von den $3n$ unbekannten Functionen $x_i y_i z_i$ von t und von deren ersten Differentialquotienten $x_i' y_i' z_i'$, so führt das Problem:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + W)\, dt = 0$$

auf die $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$m_i x_i'' = \frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x_i'},$$

$$m_i y_i'' = \frac{\partial W}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial y_i'},$$

$$m_i z_i'' = \frac{\partial W}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial z_i'}.$$

Dieselben Gleichungen sind auch, wenn man $m_1, m_2, \cdots, m_n$ als die Massen von n Punkten und die Variabeln $x_i y_i z_i$ als die Coordinaten des Punktes m_i in einem festen rechtwinkligen Axensystem zur Zeit t auffasst, die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems materieller Punkte, bei welcher die an dem Punkte m_i wirksamen Kraftcomponenten zur Zeit t die Werthe haben:

---

*) Mit unbedeutenden Veränderungen abgedruckt aus den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. vom 23. April 1877.

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases} X_i = \dfrac{\partial W}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial x_i'}, \\ Y_i = \dfrac{\partial W}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial y_i'}, \\ Z_i = \dfrac{\partial W}{\partial z_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial z_i'}. \end{cases}$$

Kräfte, deren analytische Ausdrücke von dieser Form sind, nenne ich, wie üblich, *Potentialkräfte* und die Function W, durch deren Angabe dieselben vollständig bestimmt sind, ihr *Potential*. Unter *inneren* Kräften des Systems ferner verstehe ich solche, die nur von den Wirkungen der Punkte des Systems auf einander herrühren. Die Aufgabe, mit deren Lösung sich diese Note hauptsächlich beschäftigt, ist die, *den allgemeinsten analytischen Ausdruck der inneren Kräfte eines in Bewegung befindlichen Systems materieller Punkte zu finden, der sich aus den beiden Voraussetzungen ergiebt, dass diese Kräfte ein Potential besitzen und zugleich dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen sollen.*

Nach der ersten Voraussetzung sollen die analytischen Ausdrücke $X_i\, Y_i\, Z_i$ der inneren Kräfte des Systems von der Form (I) sein. Die zweite sagt aus, dass sich diese Kräfte in jedem Augenblicke an dem System das Gleichgewicht halten würden, wenn in demselben Augenblicke durch Einschaltung starrer Geraden zwischen seinen Punkten das System in einen festen Körper verwandelt worden wäre, und liefert somit die 6 Bedingungsgleichungen:

$$(\mathrm{II})\quad \sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0,\quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0,\quad \sum_{i=1}^{i=n} Z_i = 0;$$

$$(\mathrm{III})\quad\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{i=n} (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \end{cases}$$

Analytisch ausgedrückt handelt es sich also um die Frage:

Welches sind die allgemeinsten Werthe der Kräfte $X_i\, Y_i\, Z_i$, die sich aus den Gleichungen (I) ergeben, wenn man verlangt, dass W eine solche Function der Zeit, der Coordinaten und der Geschwindigkeiten sein soll, welche den sechs, durch Substitution der Werthe (I) in die Gleichungen (II) und (III) entspringenden Bedingungen identisch genügt?

Auf den ersten Anblick könnte es scheinen, als ob diese Aufgabe sich weit einfacher so aussprechen liesse:

Man soll den allgemeinsten Werth des Potentials W finden, welcher den gestellten Forderungen genügt.

Allein, wenngleich die Lösung dieser letzteren Aufgabe eo ipso auch die der ersten nach sich zieht, so ist doch, in Folge einer bekannten Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung, das zweite Problem nicht vollständig identisch mit dem ursprünglichen, vielmehr dieses weit einfacher als jenes.

Ist nämlich φ irgend welche Function der Zeit und der Coordinaten allein und setzt man:

$$\psi = \frac{d\varphi}{dt},$$

so wird:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

und folglich:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i'} = 0,$$

welche Formel natürlich auch noch gilt, wenn man darin x mit y, oder mit z vertauscht.

Besitzt daher das Potential W die Form:

$$W = V + \frac{d\varphi}{dt},$$

so hebt sich der Theil $\frac{d\varphi}{dt}$ von selbst aus den Formeln (I) weg und ist daher auf die Werthe $X_i Y_i Z_i$ ohne jeden Einfluss.

Hiernach können und werden wir im Folgenden alle diejenigen Glieder des Potentials W, die vollständige Differentialquotienten nach der Zeit sind, als für unsere Frage vollkommen gleichgültig vernachlässigen. Oder mit anderen Worten, wenn wir nach C. Neumann's Vorgange*) *effectives Potential* das nennen, was von dem Gesammtpotential W nach Weglassung aller jener Glieder übrig bleibt, wir brauchen nicht das Gesammtpotential, sondern nur das effective Potential zu bestimmen.

Diese Aufgabe nun zerlegen wir in zwei, von einander unabhängige Theile, indem wir die Function W einmal nur den Bedingungen (II), das andere Mal nur den Bedingungen (III) unterwerfen. Aus der Vergleichung der allgemeinsten Werthe des effectiven Potentiales, die sich aus der einen und aus der andern Forderung ziehen lassen, wird sich

---

*) C. Neumann. Die Principien der Elektrodynamik. Tübingen 1868.

dann unmittelbar die Beantwortung unserer Frage ergeben, die schliesslich noch mit einer anderen und weit einfacheren Aufgabe combinirt werden soll, die aber, soviel ich weiss, ebensowenig als die vorhergehende bisher allgemein behandelt worden ist, mit der Aufgabe nämlich, die allgemeinsten Werthe der Potentialkräfte (I) zu finden, welche die Forderung des Princips der lebendigen Kraft, d. h. die Bedingung erfüllen, dass der Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i')$$

ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sei.*)

---

*) Nimmt man die Kräfte $X_i\,Y_i\,Z_i$ unabhängig von den Geschwindigkeiten und von den Beschleunigungen an, so zieht bekanntlich die Forderung, dass identisch:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i') = \frac{dU}{dt}$$

sei, indem sich dieselbe in die Gleichungen auflöst:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial t},\quad X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i},\quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

umgekehrt nach sich, dass die Kräfte ein Potential besitzen müssen, oder es kann dann das Princip der lebendigen Kraft niemals gelten ohne das Hamilton'sche Princip. Dies ist aber durchaus nicht mehr der Fall, wenn die Kräfte auch von den Geschwindigkeiten und von den Beschleunigungen abhängig sind. So wird z. B., wenn V irgend eine, von t freie Function von $xyzx'y'z'$ ist, der Gleichung:

$$Xx' + Yy' + Zz' = \frac{d}{dt}\left(V - x'\frac{\partial V}{\partial x'} - y'\frac{\partial V}{\partial y'} - z'\frac{\partial V}{\partial z'}\right)$$

identisch genügt durch die Substitutionen:

$$X = Cz' - By' + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'},$$

$$Y = Bx' - Az' + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial y'},$$

$$Z = Ay' - Cx' + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial z'},$$

welche Werthe auch die Functionen ABC haben mögen. Setzt man aber hierin etwa

$$A = x',\quad B = y',\quad C = z',$$

so erhält man Kraftgesetze, die sich nicht der Form

$$X = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'},\ \ldots$$

Um den Gegenstand einigermaassen vollständig zu behandeln, ist in dem letzten § auch einiges bereits Bekannte von Neuem abgeleitet worden. —

§ 1.

Bestimmung des effectiven Potentials aus den Forderungen (II).

Substituirt man die Werthe (I) in die Bedingungen (II), so erhält man 3 Bedingungsgleichungen für das Potential W, von denen die erste ist:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x_i'}\right) = 0 \tag{1}$$

und die beiden anderen aus dieser durch Vertauschung von x mit y, resp. z hervorgehen. Es soll sich zunächst darum handeln, das Potential W bis auf die zu vernachlässigenden Glieder in allgemeinster Weise aus der Gleichung (1) zu bestimmen. Ich setze zu dem Ende:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial W}{\partial x_i'} = A$$

und verwandle hierdurch die Gleichung (1) in:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{dA}{dt}.$$

Nun ist das Potential W und damit auch die linke Seite der letzten Gleichung frei von den zweiten Differentialquotienten $x''\ y''\ z''$. Die Gleichung kann daher nicht anders identisch stattfinden, als wenn die Function A selbst gar keine Differentialquotienten der xyz enthält. Aus der Forderung (1) ergeben sich folglich für das Potential W die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen 1. O.:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial W}{\partial x_i'} = A, \\ &\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{dA}{dt}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

in denen A eine willkürliche Function von t und von den Coordinaten ist.

---

unterordnen und daher dem Hamilton'schen Principe widersprechen, während sie doch die Forderung des Princips der lebendigen Kraft erfüllen. Man sieht zugleich, dass das letztere Princip recht wohl sogar für solche Kräfte gelten kann, deren analytische Ausdrücke zwar die Geschwindigkeiten, nicht aber zugleich die Beschleunigungen enthalten. Vgl. § 4. Anmerkung.

Ist nun $W = U$ irgend eine gemeinsame Lösung dieser beiden Gleichungen und setzt man:

$$W = U + V,$$

so gehen dieselben über in:

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_i'} = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Wir können also die Gleichungen (2) zurückführen auf die weit einfacheren (3), sobald wir irgend eine gemeinsame Lösung der Gleichungen (2) gefunden haben. Eine solche Lösung ergiebt sich aber sofort aus der Annahme

$$W = \frac{d\varphi}{dt},$$

wo φ eine unbekannte Function der Zeit und der Coordinaten bedeutet. Diese Annahme nämlich liefert:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

und führt also die Gleichungen (2) über in:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = A,$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{dA}{dt}.$$

Von diesen beiden Gleichungen ist aber die zweite eine unmittelbare Folge der ersten. Wenn demnach φ irgend eine Lösung der Gleichung (4) und V die allgemeine Lösung des Systems (3) ist, so ist:

$$W = V + \frac{d\varphi}{dt}$$

die allgemeine Lösung der beiden Gleichungen (2), oder also, nach der vorausgeschickten Bemerkung,

$$W = V$$

der allgemeinste Werth des effectiven Potentiales, der sich aus der Bedingung (1) ergiebt.

Die beiden Gleichungen (3) sagen aber nichts anderes aus, als dass V die Variabeln $x_1 \cdots x_n\, x_1' \cdots x_n'$ nur in den Verbindungen:

$$x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_1, x_2' - x_1', \cdots, x_n' - x_1'$$

enthalten darf, also ist $W =$ einer willkürlichen Function dieser Differenzen, in der überdies t, die y, z und deren erste Differentialquotienten in beliebiger Weise eingehen können, die allgemeinste Lösung unserer ersten Aufgabe.

Indem nun die beiden anderen Bedingungsgleichungen, die aus (I) und (II) entspringen, sich von der Gleichung (1) nur dadurch unterscheiden, dass darin y, resp. z an die Stelle von x getreten ist, haben wir hiermit den Satz gewonnen:

I. *Die allgemeinsten Ausdrücke der Potentialkräfte* (I), *welche den Bedingungen* (II) *identisch genügen, werden erhalten, wenn man das Potential W einer willkürlichen Function der Zeit, der relativen Coordinaten und der relativen Geschwindigkeiten der Punkte des Systems gleich setzt.*

§ 2.

Bestimmung des effectiven Potentials aus den Forderungen (III).

Die Substitution der Formeln (I) in die Gleichungen (III) liefert für das Potential W drei Bedingungsgleichungen, von denen die erste

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ y_i \left(\frac{\partial W}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial z_i'} \right) - z_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial y_i'} \right) \right\} = 0$$

ist und die beiden anderen aus dieser erhalten werden, wenn man die Buchstaben y, z mit den Buchstaben z, x resp. x, y vertauscht.

Wir betrachten zunächst wieder nur die Bedingung (1).

Addiren wir zu derselben die Identität:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ y_i' \frac{\partial W}{\partial z_i'} + y_i \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial z_i'} - z_i' \frac{\partial W}{\partial y_i'} - z_i \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial y_i'} \right\}$$
$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial W}{\partial z_i'} - z_i \frac{\partial W}{\partial y_i'} \right),$$

so verwandelt sie sich in:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ y_i \frac{\partial W}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial W}{\partial y_i} + y_i' \frac{\partial W}{\partial z_i'} - z_i' \frac{\partial W}{\partial y_i'} \right\}$$
$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial W}{\partial z_i'} - z_i \frac{\partial W}{\partial y_i'} \right)$$

und lässt sich demnach in die beiden folgenden zerfällen:

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial W}{\partial z_i'}-z_i\frac{\partial W}{\partial y_i'}\right)=M, \\ \sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial W}{\partial z_i}-z_i\frac{\partial W}{\partial y_i}+y_i'\frac{\partial W}{\partial z_i'}-z_i'\frac{\partial W}{\partial y_i'}\right)=\frac{dM}{dt}. \end{cases}$$

Die zweite dieser Bedingungen lehrt, dass M nur eine Function von t und von den Coordinaten sein kann. Setzen wir weiter:

$$W=\frac{d\psi}{dt},$$

wo ψ eine ebensolche Function bedeutet, so verwandeln sich hierdurch die Gleichungen (2) in:

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial\psi}{\partial z_i}-z_i\frac{\partial\psi}{\partial y_i}\right)=M,$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial\psi}{\partial z_i}-z_i\frac{\partial\psi}{\partial y_i}\right)=\frac{dM}{dt}.$$

Also erfüllt die Substitution $W=\frac{d\psi}{dt}$ die beiden Gleichungen (2), sobald ψ eine Lösung der Gleichung (3) ist. Unter dieser Voraussetzung werden aber durch die Annahme:

$$W=V+\frac{d\psi}{dt}$$

die beiden Gleichungen (2) übergeführt in die folgenden:

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial V}{\partial z_i'}-z_i\frac{\partial V}{\partial y_i'}\right)=0, \\ \sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial V}{\partial z_i'}-z_i\frac{\partial V}{\partial y_i}+y_i'\frac{\partial V}{\partial z_i'}-z_i'\frac{\partial V}{\partial y_i'}\right)=0. \end{cases}$$

Zur Bestimmung des effectiven Potentiales kommt es demnach nur darauf an, die allgemeinste Lösung der beiden Gleichungen (4) zu ermitteln.

Nach dem Vorhergehenden genügt nun die Annahme:

$$V=\frac{d\psi}{dt}$$

gleichzeitig diesen beiden Gleichungen, so oft ψ eine Lösung der Gleichung:

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial\psi}{\partial z_i}-z_i\frac{\partial\psi}{\partial y_i}\right)=0$$

ist. Diese Gleichung aber ist äquivalent dem System von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$dz_i : dy_h = y_i : -z_h,$$

dessen $2n-1$ Integrale sind:

$$(6)\qquad \begin{cases} 2u_i = y_i^2 + z_i^2 = \text{const.} \\ u_{hk} = y_h y_k + z_h z_k = \text{const.} \end{cases}$$

wo $i=1, 2, \cdots n$, k eine gegebene dieser Zahlen und $h=1, \cdots k-1$, $k+1, \cdots n$ ist. Folglich sind die $2n-1$ Ausdrücke:

$$(7)\qquad \begin{cases} u_i' = y_i y_i' + z_i z_i' \\ u_{hk}' = y_h' y_k + y_h y_k' + z_h' z_k + z_h z_k' \end{cases}$$

gemeinsame Lösungen der beiden Gleichungen (4). Man reducirt diese beiden Gleichungen aber auch dadurch auf die eine Gleichung (5), dass man V einer von den y', z' freien Function ψ direct gleichsetzt. Also sind auch die $2n-1$ Ausdrücke (6) selbst gemeinsame Lösungen der Gleichungen (4). Diese beiden Gleichungen können überdies nicht mehr als $4n-2$ in Bezug auf die Variabeln y, z, y', z' von einander unabhängige Lösungen gemein haben, und dieser Bedingung genügen die $4n-2$ Ausdrücke (6) und (7). Die allgemeine Lösung V der beiden Gleichungen (4) hat folglich die Form:

$$(8)\qquad V = F(u_i, u_{hk}, u_i', u_{hk}', t, x_i, x_i'),$$

wo F eine willkürliche Function bezeichnet und von den verschiedenen Argumenten, die diese willkürliche Function ausser t enthalten kann, immer nur je ein Repräsentant angegeben ist; und nach dem Vorhergehenden ist dies zugleich der allgemeinste Werth des effectiven Potentials, der sich aus der Bedingung (1) ziehen lässt.

Die zweite Bedingungsgleichung nun, die aus den Forderungen (III) für das Potential W entspringt, unterscheidet sich von (1) nur dadurch, dass z, x die Stellen von y, z eingenommen haben. Die allgemeinste Lösung dieser zweiten Gleichung, die in Betracht kommen kann, ist folglich:

$$W = \Phi(v_i, v_{hk}, v_i', v_{hk}', t, y_i, y_i'),$$

wo Φ eine willkürliche Function und:

$$\begin{aligned} 2v_i &= z_i^2 + x_i^2, \\ v_{hk} &= z_h z_k + x_h x_k, \\ v_i' &= z_i z_i' + x_i x_i', \\ v_{hk}' &= z_h' z_k + z_h z_k' + x_h' x_k + x_h x_k' \end{aligned}$$

ist. Vergleicht man aber diese Ausdrücke mit den Formeln (6), (7), (8), so erkennt man sofort, dass der allgemeinste Werth des effectiven

Potentials W, der gleichzeitig den beiden ersten Bedingungen (III) genügt, von der Form ist:

$$(9) \qquad W = \Psi\,(p_i, p_{hk}, p_i', p_{hk}', t),$$

wo Ψ eine willkürliche Function und:

$$(10) \qquad \begin{cases} 2p_i = x_i^2 \quad + y_i^2 \quad + z_i^2 \\ p_{hk} = x_h x_k + y_h y_k + z_h z_k \\ p_i' = x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i' \\ p_{hk}' = x_h' x_k + x_h x_k' + y_h' y_k + y_h y_k' + z_h' z_k + z_h z_k' \end{cases}$$

ist; und da diese Argumente ungeändert bleiben, wenn man die Buchstaben xyz mit einander vertauscht, so erhellt zugleich, dass dieser Werth von W schon von selbst der dritten Bedingung genügt, die sich aus den Forderungen (III) für diese Function ergiebt.

Die letztere Bemerkung zeigt, dass von Potentialkräften stets derjenige Satz gilt, der für die Bewegung eines Systems materieller Punkte unter dem Einflusse eines von den Geschwindigkeiten unabhängigen Potentiales sich so aussprechen lässt, dass niemals zwei von den 3 Flächensätzen gelten können ohne den dritten, der Satz nämlich, dass, wenn Kräfte von der analytischen Form (I) zwei von den drei Bedingungen (III) erfüllen, sie nothwendig immer auch der dritten genügen.*)

Setzen wir endlich:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$
$$r_{hk}^2 = (x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2,$$

---

*) Dieser Satz ergiebt sich auch ohne jede Integration auf folgende Weise:

Für das effective Potential $W = V$ reducirt sich die Bedingung (1) auf die beiden Gleichungen (4). Bezeichnet man also die linken Seiten dieser beiden Gleichungen durch $X_1(V)$ und $X_2(V)$ und versteht unter $Y_1(V)$ und $Y_2(V)$, resp. $Z_1(V)$ und $Z_2(V)$ diejenigen Ausdrücke, die aus $X_1(V)$ und $X_2(V)$ durch Vertauschung der Buchstaben y, z mit den Buchstaben z, x, resp. x, y entstehen, so ergeben die Forderungen (III) für das effective Potential V der Reihe nach die Bedingungen

$$X_1(V) = 0 \text{ und } X_2(V) = 0,$$
$$Y_1(V) = 0 \quad „ \quad Y_2(V) = 0,$$
$$Z_1(V) = 0 \quad „ \quad Z_2(V) = 0.$$

Es ist aber identisch:

$$Y_1(X_1(V)) - X_1(Y_1(V)) = Z_1(V),$$
$$Y_1(X_2(V)) - X_2(Y_1(V)) = Z_2(V).$$

Jede gemeinsame Lösung V der 4 Gleichungen:

$$X_1(V) = 0, \quad X_2(V) = 0,$$
$$Y_1(V) = 0, \quad Y_2(V) = 0$$

genügt daher immer gleichzeitig auch den beiden Gleichungen:

$$Z_1(V) = 0, \quad Z_2(V) = 0.$$

so folgt aus (10) und durch Differentiation nach t:

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 2p_i\,, \\ r_{hk}^2 &= 2p_h + 2p_k - 2p_{hk}\,, \\ r_i r_i' &= p_i'\,, \\ r_{hk} r_{hk}' &= p_h' + p_k' - p_{hk}'\,. \end{aligned}$$

Also können wir die Formel (9) auch ersetzen durch die:

$$W = F(r_i,\, r_i',\, r_{hk},\, r_{hk}',\, t),$$

womit der Satz gewonnen ist:

II. *Die allgemeinen Ausdrücke der Potentialkräfte* (I), *welche die Forderungen* (III) *erfüllen, entstehen dadurch, dass man für W eine willkürliche Function von der Zeit, von den Entfernungen der Punkte des Systems vom Coordinatenanfange, von ihren gegenseitigen Entfernungen und von den ersten Differentialquotienten dieser beiden Arten von Entfernungen nach der Zeit substituirt.*

§ 3.

Das Princip der lebendigen Kraft.

Aus der Forderung, dass die Summe:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i')$$

ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein soll, ergiebt sich, wenn man diesen Differentialquotienten mit $\frac{dU}{dt}$ bezeichnet und für die Kräfte $X_i\, Y_i\, Z_i$ ihre Werthe (I) einsetzt, die Bedingung:

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ x_i' \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x_i'} \right) + y_i' \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial y_i'} \right) + z_i' \left(\frac{\partial W}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial z_i'} \right) \right\} = \frac{dU}{dt}$$

Indem man hierzu die Identität:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ x_i'' \frac{\partial W}{\partial x_i'} + x_i' \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x_i'} + \cdots \right\} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ x_i' \frac{\partial W}{\partial x_i'} + \cdots \right\} = 0$$

addirt, verwandelt man diese Bedingung in die folgende:

$$(2)\quad \frac{d}{dt}\left\{ W - \sum_{i=1}^{i=n} \left(x_i' \frac{\partial W}{\partial x_i'} + y_i' \frac{\partial W}{\partial y_i'} + z_i' \frac{\partial W}{\partial z_i'} \right) \right\} - \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{dU}{dt}.$$

Damit dieselbe identisch stattfinde, ist also nothwendig und hinreichend,

dass der partielle Differentialquotient $\frac{\partial W}{\partial t}$ ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sei. Nun enthält das Potential W nur die ersten Differentialquotienten der Coordinaten und wir können daher diejenige Function, von der $\frac{\partial W}{\partial t}$ der vollständige Differentialquotient sein soll, immer auffassen als den partiellen Differentialquotienten einer nur von der Zeit und den Coordinaten abhängigen Function φ nach t. Die Formel:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ergiebt aber:

$$W = \frac{d\varphi}{dt} + V,$$

wo V frei von t und eine blosse Function der $x\,y\,z\,x'\,y'\,z'$ ist. Das effective Potential V darf also die Zeit nicht enthalten, d. h.

III. *Man erhält die allgemeinsten Ausdrücke der Potentialkräfte* (I), *welche der Forderung des Princips der lebendigen Kraft genügen, wenn man das Potential W frei von der Zeit t annimmt.*

§ 4.

Zusammenfassung der erhaltenen Resultate und Folgerungen.

Combiniren wir nunmehr die erhaltenen drei Sätze, so ergiebt sich das folgende Resultat:

IV. *Die allgemeinsten analytischen Ausdrücke solcher inneren Potentialkräfte eines bewegten Systems materieller Punkte, welche dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, sowie der Forderung des Princips der lebendigen Kraft genügen, werden erhalten aus den Formeln* (I), *wenn man darin für das Potential W eine willkürliche Function der gegenseitigen Entfernungen der Punkte des Systems und der ersten Differentialquotienten dieser Entfernungen setzt.*

Lässt man, um die Antwort auf unsere ursprüngliche Frage zu erhalten, die Forderung des Princips der lebendigen Kraft fallen, so darf das Potential W überdies noch in beliebiger Weise die Zeit selbst enthalten.

Unterwerfen wir ferner das bisher freie System den Bedingungen:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \cdots, \tag{1}$$

in denen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ gegebene Functionen von t und von den Coordinaten der Punkte des Systems sind, so werden die Differentialgleichungen seiner Bewegung jetzt:

$$(2)\quad \begin{cases} m_i x_i'' = X_i + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \cdots \\ m_i y_i'' = Y_i + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} + \cdots \\ m_i z_i'' = Z_i + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z_i} + \cdots \end{cases}$$

Aus diesen und den Gleichungen (1) ergiebt sich:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i') - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \cdots,$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = \sum_{i=1}^{i=n} X_i + \lambda_1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots,$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i z_i' - z_i y_i') = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i) + \lambda_1 \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} \right) + \cdots.$$

Aus diesen letzteren Gleichungen verschwinden aber die in die λ multiplicirten Glieder vollständig, wenn man jede der Functionen φ den Bedingungen unterwirft:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) = 0,$$

und man erhält daher unter dieser Voraussetzung, und wenn man überdies den Kräften $X_i\ Y_i\ Z_i$ die aus dem Satze IV folgenden Werthe beilegt, ganz so, als ob das System frei wäre, die folgenden Integrale der Bewegungsgleichungen:

$$T - W + \sum_{i=1}^{i=n} \left(x_i' \frac{\partial W}{\partial x_i'} + y_i' \frac{\partial W}{\partial y_i'} + z_i' \frac{\partial W}{\partial z_i'} \right) = \text{const.}^{*})$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i' = \text{const.}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i z_i' - z_i y_i') = \text{const.}$$

Woraus sich nach dem Vorhergehenden der Satz ergiebt:

---

*) Anmerkung. Nimmt man an, dass das Potential W linear sei in Bezug auf die Geschwindigkeiten $x_i'\ y_i'\ z_i'$, und nennt U den von den Geschwindigkeiten unabhängigen Theil desselben, so reducirt sich dies Integral auf:

$$T - U = \text{const.}$$

V. *Wird ein System materieller Punkte lediglich von solchen Kräften sollicitirt, deren analytische Ausdrücke aus den Formeln* (I) *hervorgehen, wenn man darin für* W *eine blosse Function der gegenseitigen Entfernungen* r_{hk} *der Punkte des Systems und der ersten Differentialquotienten* r'_{hk} *dieser Entfernungen nach der Zeit setzt, so gehorcht die Bewegung des Systems, und zwar gleichgültig, ob dasselbe frei oder aber dem Zwange solcher Bedingungen unterworfen ist, in denen nur jene gegenseitigen Entfernungen eine Rolle spielen, stets dem Principe der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, dem Principe der Erhaltung der Flächenräume und dem Principe der lebendigen Kraft, welches die Form:*

$$T - W + \sum_{hk} \frac{\partial W}{\partial r'_{hk}} r'_{hk} = \text{const.}$$

annimmt.

Lassen wir endlich das System sich auf zwei Punkte m_1 und m_2 reduciren und nennen r ihre Entfernung, so ergeben sich bei Zugrundelegung des Satzes IV für die Componenten der zwischen beiden Punkten thätigen Kraft die Werthe:

$$X_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x_1'}, \ldots,$$

in denen W eine blosse Function von r und r' ist. Diese Werthe stellen sich nach Ausführung der Differentiationen also dar:

$$X_1 = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial x_1} - \frac{\partial r'}{\partial x_1'}\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'} - \frac{\partial W}{\partial r'}\frac{d}{dt}\frac{\partial r'}{\partial x_1'}, \ldots .$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial r'}{\partial x_1'} = \frac{\partial r}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial r'}{\partial x_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial r}{\partial x_1},$$

also reduciren sich dieselben*) auf:

$$X_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'}\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}, \ldots$$

und wir erhalten somit den Satz:

VI. *Setzt man als Axiom fest, dass die Kräfte, welche zwei materielle Punkte während ihrer Bewegung auf einander ausüben, ein Potential besitzen und sowohl dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, als auch der Forderung des Princips der lebendigen*

---

und zugleich werden die Kräfte (I) frei von den Beschleunigungen. Man kann also auch solche Potentialgesetze aufstellen, welche die Kräfte als blosse Functionen der Coordinaten und der Geschwindigkeiten ergeben und trotzdem auf Bewegungen führen, in welchen das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft ganz unverändert gültig bleibt.

*) Vgl. C. Neumann a. a. O. p. 27.

Kraft genügen müssen, so folgt, dass die beiden Punkte sich in der Richtung ihrer Verbindungslinie mit einer Kraft R anziehen oder abstossen, deren analytischer Ausdruck die Form hat:

$$R = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'},$$

oder, was dasselbe ist,

$$R = \frac{1}{r'}\frac{d}{dt}\left(W - r'\frac{\partial W}{\partial r'}\right),$$

wo W eine blosse Function der Entfernung r beider Punkte und ihres Differentialquotienten r′ ist.

Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle.

Von Heinrich Weber in Königsberg in Pr.

In dem vorliegenden Aufsatz beabsichtige ich gewisse besondere Classen von algebraischen Functionen hervorzuheben, welche bezüglich der zugehörigen algebraischen Integrale und Thetafunctionen ausgezeichnete Eigenschaften haben, von denen die speciellsten auf die hyperelliptischen Integrale führen.

Wir definiren nach Riemann eine algebraische Function s von z vom Geschlecht p durch eine irreducible algebraische Gleichung zwischen beiden Variablen

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0,$$

welche die Eigenschaft hat, dass die Verzweigung von s sich durch eine $(2p+1)$-fach zusammenhängende Riemann'sche Fläche T darstellen lässt, und diese Fläche sei durch ein normales Querschnittsystem a_ν, b_ν in eine einfach zusammenhängende Fläche T' zerlegt.

In die Thetafunction

$$\vartheta(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_n) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_h\right)^p e^{\sum\limits_{1,p}^{i} \sum\limits_{1,p}^{k} a_{i,k} h_i h_k + 2 \sum\limits_{1,p}^{i} h_i v_i}$$

substituiren wir für die Moduln $a_{i,k}$ die Periodicitätsmoduln der Normalintegrale erster Gattung an den Querschnitten b_i und für die Argumente $v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p$ die um Constanten vermehrten Normalintegrale erster Gattung selbst:

$$\int_\varepsilon^\zeta du_1 - e_1, \quad \int_\varepsilon^\zeta du_2 - e_2, \cdot\cdot, \int_\varepsilon^\zeta du_p - e_p,$$

worin ε, ζ zwei beliebige Punkte in der Fläche T bedeuten, von denen der letztere als veränderlich betrachtet wird. Die so entstandene Function

$$(1) \qquad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - e_h\right)\right)$$

ist eine in T' stetige Function von ζ, welche, falls sie nicht identisch verschwindet, in p Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Diese Nullpunkte $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p$ genügen der Congruenz

$$(2)\qquad (e_1, e_2, \cdots, e_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\eta_1} du_h + \int_\varepsilon^{\eta_2} du_h + \cdots + \int_\varepsilon^{\eta_p} du_h + k_h\right)\right),$$

worin das Grössensystem k_h von e_h unabhängig ist, und diese Congruenz wird für gegebene e_h nur durch die Punkte η_h befriedigt. Verschwindet aber (1) identisch, so kann die Congruenz (2) ebenfalls befriedigt werden, es bleiben von den Punkten η_h aber einer oder einige willkürlich. Ist das Grössensystem e_h so beschaffen, dass $\vartheta(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ verschwindet, so fällt einer der Punkte η_h, etwa η_p, mit ε zusammen, und es genügt den beiden Congruenzen

$$(3)\qquad \begin{cases} (e_1, \quad e_2, \cdots, \quad e_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum\limits_{1,\,p-1}^{\nu} \int_\varepsilon^{\eta_\nu} du_h + k_h\right)\right), \\[2ex] (-e_1, -e_2, \cdots, -e_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum\limits_{1,\,p-1}^{\nu} \int_\varepsilon^{\eta'_\nu} du_h + k_h\right)\right) \end{cases}$$

ein durch eine Gleichung $\varphi(s, z) = 0$ verknüpftes, von ε unabhängiges Punktsystem η_ν, η'_ν. Addirt man die beiden Congruenzen (3), so folgt:

$$(4)\quad (-2k_1, -2k_2, \cdots, -2k_p) = \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,\,p-1}^{\nu} \int_\varepsilon^{\eta_\nu} du_h + \sum_{1,\,p-1}^{\nu} \int_\varepsilon^{\eta'_\nu} du_h\right)\right),$$

worin nun η_ν, η'_ν ein beliebiges, durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpftes Punktsystem bedeutet. Die Congruenz (4) dient zur Bestimmung des Grössensystems k_h. (Vergl. meine Schrift über die „Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3“ § 10 bis 12.)

Bedeutet nun $f_1, f_2, \cdots, f_p$ ein Grössensystem von denselben Eigenschaften wie $e_1, e_2, \cdots, e_p$, so ist der Quotient

$$(5)\qquad \frac{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h - e_h\right)\right)\ \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h + e_h\right)\right)}{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h - f_h\right)\right)\ \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^{\zeta} du_h + f_h\right)\right)}$$

eine wie T verzweigte Function von ζ, die sich als Quotient zweier Functionen von φ, $\varphi_1 : \varphi_2$, darstellen lässt, und umgekehrt lässt sich der Quotient zweier Functionen φ durch einen Ausdruck von der Form (5)

darstellen, abgesehen von denjenigen besonderen Fällen, in denen eine der Thetafunctionen im Zähler oder Nenner von (5) identisch (für alle Lagen von ε, ζ) verschwindet.

Wir nehmen nun an, dass die Grössensysteme e, f den Bedingungen genügen:

$$(e_1, e_2, \cdot\cdot, e_p) \equiv (-e_1, -e_2, \cdot\cdot, -e_p),$$
$$(f_1, f_2, \cdot\cdot, f_p) \equiv (-f_1, -f_2, \cdot\cdot, -f_p),$$

oder, was dasselbe ist, den Congruenzen:

$$(e_1, e_2, \cdot\cdot, e_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\tfrac{1}{2}\mu_h \pi i + \tfrac{1}{2}\nu_1 a_{1,h} + \tfrac{1}{2}\nu_2 a_{2,h} + \cdot\cdot + \tfrac{1}{2}\nu_p a_{p,h}\right)\right)$$
$$\equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi_p),$$

$$(f_1, f_2, \cdot\cdot, f_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\tfrac{1}{2}\mu'_h \pi i + \tfrac{1}{2}\nu'_1 a'_{1,h} + \tfrac{1}{2}\nu'_2 a_{2,h} + \cdot\cdot + \tfrac{1}{2}\nu'_p a_{p,h}\right)\right)$$
$$\equiv (\tfrac{1}{2}\varpi'_1, \tfrac{1}{2}\varpi'_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi'_p),$$

worin die Zahlensysteme μ, ν, μ', ν' aus 0 und 1 zusammengesetzt angenommen werden können. Mit ϖ_h, ϖ'_h werden zur Abkürzung Systeme zusammengehöriger Perioden bezeichnet, und die Zahlencomplexe

$$\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdot\cdot & \nu_p \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdot\cdot & \mu_p \end{pmatrix} = (\varpi), \quad \begin{pmatrix} \nu'_1 & \nu'_2 & \cdot\cdot & \nu'_p \\ \mu'_1 & \mu'_2 & \cdot\cdot & \mu'_p \end{pmatrix} = (\varpi')$$

heissen die Charakteristiken der halben Periodensysteme $\tfrac{1}{2}\varpi_h$, $\tfrac{1}{2}\varpi'_h$, welche gerade oder ungerade genannt werden, je nachdem die Summen $\Sigma \nu_i \mu_i$, $\Sigma \nu'_i \mu'_i$ gerade oder ungerade sind. Jeder Charakteristik (ϖ) entspricht eine Thetafunction, welche eine gerade oder eine ungerade Function der Argumente ist, je nachdem die Charakteristik gerade oder ungerade ist:

$$\vartheta\{\varpi\}(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p)$$
$$= e^{\frac{1}{4}\sum\limits_{1,p}^{i}\sum\limits_{1,p}^{k} a_{i,k}\nu_i\nu_k + \frac{1}{2}\pi i \sum\limits_{1,p}^{i} \mu_i \nu_i + \sum\limits_{1,p}^{i} \nu_i v_i}\, \vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}\varpi_1, \cdot\cdot, v_p + \tfrac{1}{2}\varpi_p).$$

Die Anzahl der ungeraden Thetafunctionen ist $2^{p-1}(2^p-1)$, die der geraden $2^{p-1}(2^p+1)$. Im Allgemeinen verschwinden nur die ungeraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente, dagegen verschwinden die ersten Ableitungen der geraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente, und daraus ergiebt sich, dass, wenn in einem besonderen Fall eine Thetafunction mit gerader Charakteristik (ϖ) für die Nullwerthe der Argumente verschwindet, dann die Function

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right)$$

identisch für alle Lagen der Punkte ε, ζ verschwindet, nach einem von Riemann bewiesenen Satz. (Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen, Riemann's Werke p. 198.)

Kehren wir nun zurück zu den Quotienten (5), so ergiebt sich aus den gemachten Annahmen, dass die Nullpunkte des Zählers sowohl als des Nenners paarweise zusammenfallen und es entstehen Functionen φ, welche in $p-1$ Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden. Die Quadratwurzeln aus diesen Functionen nennen wir *Abel'sche Functionen* im engeren Sinn. Hieraus ergiebt sich:

Wenn von den 2^{2p} Functionen

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^\zeta d\,u_h - \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right) \quad \textit{oder} \quad \vartheta\{\varpi\}\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^\zeta d\,u_h\right)\right)$$

keine identisch für alle Lagen von ε, ζ verschwindet, so existiren $2^{p-1}(2^p-1)$ Abel'sche Functionen.

Die Ausnahmefälle, die nun hier betrachtet werden sollen, sind diejenigen, in denen von den Functionen

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h \pm \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right)$$

eine oder einige identisch verschwinden, und es handelt sich vor allem um das Verhalten der Abel'schen Functionen in diesen Fällen.

Wir machen gleich die allgemeine Annahme, dass für irgend eine Zahl m eine Function

$$(6) \qquad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m-1}^{i}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h \pm \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right)$$

identisch (für alle $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot\cdot, \varepsilon_{m-1}, \zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1}$) verschwinde, dagegen

$$(7) \qquad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m}^{i}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h \pm \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right)$$

nicht identisch verschwinde, wofür nach Riemann (über das Verschwinden der Thetafunctionen) die nothwendige und hinreichende Bedingung die ist, dass die Function $\vartheta\{\varpi\}(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p)$ mit ihren sämmtlichen Derivirten bis zur $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung einschliesslich, dagegen nicht mehr sämmtliche Derivirte der m^{ten} Ordnung für

$$(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p) = (0, 0, \cdot\cdot, 0)$$

verschwinden.

Nach diesen Voraussetzungen werden also, wenn die Punkte ε_i, ζ_i beliebig angenommen sind, die beiden Functionen

$$(8)\quad \begin{cases} \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - \sum\limits_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h - \frac{1}{2}\varpi_h\right)\right), \\ \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_h + \sum\limits_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \frac{1}{2}\varpi_h\right)\right) \end{cases}$$

als Functionen von ζ nicht identisch verschwinden, und daher verschwindet jede von ihnen ausser in ε in $p-1$ Punkten, beide zusammen in $2p-2$ Punkten, welche durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind.

Unter den Nullpunkten der ersten dieser Functionen sind aber die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1}$, die übrigen seien mit $\eta_m, \eta_{m+1}, \cdot\cdot, \eta_{p-1}$ bezeichnet. Ebenso sind unter den Nullpunkten der zweiten Function (8) die Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot\cdot, \varepsilon_{m-1}$ und die übrigen seien mit $\eta'_m, \eta'_{m+1}, \cdot\cdot, \eta'_{p-1}$ bezeichnet. Demnach existirt eine Function φ mit den Nullpunkten

(9) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot\cdot, \varepsilon_{m-1}, \zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1}, \eta_m, \eta_{m+1}, \cdot\cdot, \eta_{p-1}, \eta'_m, \eta'_{m+1}, \cdot\cdot, \eta'_{p-1}$.

Andererseits bestehen nach (2) die Congruenzen:

$$(\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_i} du_h + \sum_{m,p-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon}^{\eta_i} du_h + k_h\right)\right),$$

$$(-\tfrac{1}{2}\varpi_1, -\tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, -\tfrac{1}{2}\varpi_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon}^{\zeta_i} du_h + \sum_{m,p-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon}^{\eta'_i} du_h + k_h\right)\right),$$

und durch Subtraction dieser beiden Congruenzen:

$$(10)\qquad \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \sum_{m,p-1}^{i} \int\limits_{\eta_i}^{\eta'_i} du_h \equiv 0\right)\right).$$

Es existirt also, wie aus dem Abel'schen Theorem folgt, eine rationale Function σ von s, z, welche unendlich klein in der ersten Ordnung wird in den Punkten

(11) $\zeta_1\, \zeta_2 \cdot\cdot \zeta_{m-1}\, \eta'_m \cdot\cdot \eta'_{p-1}$,

unendlich gross in der ersten Ordnung in den Punkten

(12) $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_{m-1}\, \eta_m \cdot\cdot \eta_{p-1}$,

ausserdem stetig und von Null verschieden bleibt, und zwar ist diese Function darstellbar als Quotient zweier Functionen φ. Ist nun φ die in den Punkten (9) verschwindende Function, so werden die beiden φ-Functionen

$$\sigma\varphi = \varphi_1, \quad \frac{\varphi}{\sigma} = \varphi_2$$

unendlich klein in der zweiten Ordnung, resp. in den Punkten

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1}, \eta'_m, \cdot\cdot, \eta'_{p-1} \text{ und } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot\cdot, \varepsilon_{m-1}, \eta_m, \cdot\cdot, \eta_{p-1},$$

und sind daher die Quadrate von Abel'schen Functionen. Diese Abel'schen Functionen genügen der Bedingung

$$\sqrt{\varphi_1\varphi_2} = \varphi. \tag{13}$$

Wählen wir die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1}$ anders, so erhalten wir beliebig viele Abel'sche Functionen dieser Art, $\sqrt{\varphi_1}, \sqrt{\varphi_2}, \sqrt{\varphi_3}, \cdot\cdot$, welche die Eigenschaft haben, dass das Product von je zweien derselben rational und zwar gleich einer Function φ ist. Von den Nullpunkten einer solchen Abel'schen Function können $m-1$, aber nicht mehr, beliebig gewählt werden.

Setzen wir nun, indem wir unter $a_1, a_2, \cdot\cdot$ unbestimmte Constanten verstehen:

$$\sqrt{\varphi'} = a_1\sqrt{\varphi_1} + a_2\sqrt{\varphi_2} + \cdots,$$

so ist, da das Product zweien der Functionen $\sqrt{\varphi_1}, \sqrt{\varphi_2}, \cdots$ rational ist, φ' eine φ-Function, welche der Bedingung genügt:

$$\sqrt{\varphi_1\varphi'} = \varphi; \quad \varphi_1\varphi' = \varphi^2,$$

woraus sich ergiebt, dass, da die Nullpunkte von φ' paarweise zusammenfallen, $\sqrt{\varphi'}$ eine Abel'sche Function ist.

Aus der Willkürlichkeit von $m-1$ Nullpunkten der Functionen $\sqrt{\varphi_1}, \sqrt{\varphi_2}, \cdot\cdot$ schliessen wir, dass es mindestens m linear unabhängige Functionen dieser Art giebt, und da nicht mehr als $m-1$ Nullpunkte beliebig sind, so folgt, dass auch nicht mehr als m dieser Functionen linear unabhängig sein können. Hieraus ergiebt sich, dass das ganze System Abel'scher Functionen, welches zur Charakteristik (ϖ) gehört, linear darstellbar ist durch m specielle Functionen dieser Art, also in der Form:

$$a_1\sqrt{\varphi_1} + a_2\sqrt{\varphi_2} + \cdot\cdot + a_m\sqrt{\varphi_m},$$

worin $a_1, a_2, \cdot\cdot, a_m$ willkürliche Constanten sind.

Die hier bewiesenen Sätze lassen sich nun in folgender Weise umkehren. Nehmen wir an, es existire ein System von m linear unabhängigen Abel'schen Functionen $\sqrt{\varphi_1}, \sqrt{\varphi_2}, \cdot\cdot, \sqrt{\varphi_m}$, welches die Eigenschaft hat, dass jede lineare Verbindung derselben mit beliebigen constanten Coefficienten

$$\sqrt{\varphi'} = a_1\sqrt{\varphi_1} + a_2\sqrt{\varphi_2} + \cdot\cdot + a_m\sqrt{\varphi_m} \tag{14}$$

wieder eine Abel'sche Function ist, so ergiebt sich zunächst aus der Willkürlichkeit der Coefficienten a, dass das Product je zweier dieser

Functionen $\sqrt{\varphi_i \varphi_k}$ eine φ-Function ist; also gilt das Gleiche von dem Product zweier beliebiger Functionen (14), $\sqrt{\varphi' \varphi''}$, welche sich durch die Werthe der Constanten a von einander unterscheiden. Daher ist auch das Verhältniss zweier solcher Functionen $\sqrt{\varphi'} : \sqrt{\varphi''}$ eine rationale Function von s und z, welche in je $p-1$ Punkten $\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot, \eta_{p-1}$, resp. $\eta_1', \eta_2', \cdot\cdot, \eta_{p-1}'$ unendlich klein und unendlich gross von der ersten Ordnung wird; und von diesen Punkten können je $m-1$ beliebig gewählt werden.

Lassen wir nun in der Congruenz (4) das Punktsystem η_h, η_h' zusammenfallen mit dem doppelt gezählten Punktsystem η_h, in welchem eine Function $\sqrt{\varphi'}$ unendlich klein wird, so ergiebt sich, dass sich ein System zusammengehöriger halber Perioden bestimmen lassen muss von der Art, dass die Congruenz

$$(\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi_p) \equiv \Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,p-1}^{i} \int_{\varepsilon}^{\eta_i} du_h + k_h\Big)\Big)$$

durch ein Punktsystem η_i befriedigt werden kann, von welchem $m-1$ Punkte beliebig angenommen werden können; und dies ist gleichbedeutend damit, dass die Congruenz

$$\Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,m-1}^{i} \int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\Big)\Big) \equiv \Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,p-1}^{i} \int_{\varepsilon}^{\eta_i} du_h + k_h\Big)\Big)$$

für beliebige Lagen der $2m-2$ Punkte ε_i, ζ_i befriedigt werden kann, oder dass die Function

$$\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,m-1}^{i} \int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\Big)\Big)$$

identisch, für alle Lagen von ε_i, ζ_i, verschwindet.

Das hierdurch Bewiesene fassen wir folgendermassen zusammen:

Wenn die Function

$$\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,m-1}^{i} \int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\Big)\Big)$$

identisch für alle ε_i, ζ_i *verschwindet, dagegen*

$$\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,m}^{i} \int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\Big)\Big)$$

nicht identisch für alle ε_i, ζ_i *verschwindet, oder, was dasselbe ist, wenn für die Argumentwerthe* $(\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi_p)$ *die Function* ϑ *mit ihren sämmtlichen Derivirten bis zur* $m-1^{\text{ten}}$ *Ordnung einschliesslich, aber nicht sämmtlichen Derivirten der* m^{ten} *Ordnung verschwindet, so ent-*

spricht der Charakteristik (ϖ) ein ganzes System Abel'scher Functionen, welche linear und homogen mit willkürlichen constanten Coefficienten aus m solchen Functionen zusammengesetzt sind.

Und umgekehrt.

Wenn ein System von Abel'schen Functionen existirt, welches linear und homogen mit willkürlichen constanten Coefficienten aus m linear unabhängigen Abel'schen Functionen zusammensetzbar ist, so lässt sich eine Charakteristik (ϖ) bestimmen von der Eigenschaft, dass die Function ϑ sammt allen ihren Derivirten bis zur Ordnung $m-1$ einschliesslich verschwindet für die Argumentwerthe $(\frac{1}{2}\varpi_1, \frac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \frac{1}{2}\varpi_p)$.

Wir können noch beifügen, dass, je nachdem m gerade oder ungerade ist, die Charakteristik (ϖ) gleichfalls gerade oder ungerade sein wird, denn für ein gerades (ϖ) verschwinden die Derivirten ungerader Ordnung der Function $\vartheta\left\{\varpi\right\}(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p)$ alle von selbst für die Nullwerthe der Argumente, und für ein ungerades (ϖ) gilt dasselbe von den Derivirten gerader Ordnung.

Wir machen von diesem Satze eine Anwendung auf die hyperelliptischen Functionen. Für diese sind die Integrale erster Gattung darstellbar in der Form:

$$\int \frac{\varphi(\overset{p-1}{z})\,dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+2})}}.$$

Die Functionen φ sind ganze rationale Functionen der Veränderlichen z, welche den $p-1^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigen. Die zu Grunde liegende Riemann'sche Fläche ist eine zweiblättrige mit den Verzweigungspunkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot, \alpha_{2p+2}$ und die Nullpunkte der Functionen φ fallen paarweise in über einander liegende Punkte der beiden Blätter. Es fallen daher dann und nur dann zwei Nullpunkte einer solchen Function zusammen, wenn dieselben in einen Verzweigungspunkt rücken, oder wenn die betreffende Function φ einen quadratischen Factor hat. Bezeichnen wir daher mit $\beta_1, \beta_2, \cdot\cdot, \beta_q$ irgend eine Combination von q verschiedenen der Verzweigungspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot, \alpha_{2p+2}$, so ergeben sich folgende Classen von Abel'schen Functionen, von denen nur die erste Classe nicht Systeme bildet, sondern einzelne bestimmte Functionen liefert.

Abel'sche Functionen:	Anzahl der Systeme:
1) $\sqrt{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdot\cdot(z-\beta_{p-1})}$,	$\frac{p+4\cdot p+5\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot p-1}$,
2) $\sqrt{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdot\cdot(z-\beta_{p-3})}\,(a_0+a_1 z)$,	$\frac{p+6\cdot p+7\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot\cdot p-3}$,
3) $\sqrt{z-\beta_1)\cdot\cdot(z-\beta_{p-5})}\,(a_0+a_1 z+a_2 z^2)$,	$\frac{p+8\cdot p+9\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot\cdot p-5}$,
etc. etc.	

wenn die $a_0, a_1, a_2, \cdots$ willkürliche Constanten sind. Diese Reihe setzt sich soweit fort, bis die Wurzelgrösse entweder ganz wegfällt (bei ungeradem p) oder nur noch einen Factor enthält (bei geradem p). In ersterem Falle wird die letzte Classe von Abel'schen Functionen aus den ganzen rationalen Functionen vom Grade $\frac{p-1}{2}$ gebildet und diese Classe enthält nur ein System.

Aus der Anzahl der unbestimmten Constanten, von welchen diese Systeme abhängen, ergiebt sich nun folgender Satz für die hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht p.

Es existiren $\frac{p+4 \cdot p+5 \cdots 2p+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p-1}$ *ungerade Thetafunctionen, deren erste Derivirten nicht sämmtlich*

$\frac{p+6 \cdot p+7 \cdots 2p+2}{1 \cdot 2 \cdots p-3}$ *gerade Thetafunctionen, welche zwar selbst, aber nicht mit sämmtlichen Derivirten zweiter Ordnung,*

$\frac{p+8 \cdots 2p+2}{1 \cdot 2 \cdots p-5}$ *ungerade Thetafunctionen, welche mit ihren ersten, nicht aber mit sämmtlichen dritten Derivirten,*

$\frac{p+10 \cdots 2p+2}{1 \cdot 2 \cdots p-7}$ *gerade Thetafunctionen, welche mit ihren zweiten, nicht aber mit sämmtlichen vierten Derivirten etc. etc.*

für die Nullwerthe der Argumente verschwinden.

Da die Anzahl sämmtlicher Charakteristiken 2^{2p} ist, so bleiben

$$2^{2p} - \frac{p+4 \cdot p+5 \cdots 2p+2}{1 \cdot 2 \cdots p-1} - \frac{p+6 \cdot p+7 \cdots 2p+2}{1 \cdot 2 \cdots p-3} - \cdots = \frac{p+2 \cdot p+3 \cdots 2p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}$$

Thetafunctionen übrig, welchen keine Abel'schen Functionen entsprechen, und diese müssen gerade Thetafunctionen sein, welche für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwinden.

Die Anzahl und Beschaffenheit der vorhandenen Systeme von unendlich vielen Abel'schen Functionen begründet eine Reihe von Ausnahmefällen, von denen die hyperelliptischen Functionen die speciellste Classe bilden. Um wenigstens für die ersten Werthe von p diese Unterscheidung durchzuführen, ist zunächst erforderlich, auf die zwischen den Functionen φ bestehenden Relationen einzugehen.

Es sei $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ ein System von linear unabhängigen φ-Functionen, und man bilde aus diesen ganze homogene Functionen zweiten Grades:

$$F_0(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p), \quad F_1(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p), \quad F_2(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p) \cdots.$$

Die Quotienten je zweier solcher Functionen $F_1 : F_0$, $F_2 : F_0$, $\cdots$ sind rationale Functionen von s und z, welche in $4p-4$ Punkten der Fläche T unendlich gross von der ersten Ordnung werden, und zwar,

wenn der Nenner F_0 derselbe ist, alle in denselben Punkten. Daraus folgt nach einem Riemann'schen Satze über die Anzahl der Constanten in den wie T verzweigten Functionen, dass alle diese Functionen durch $3p-4$ von ihnen linear ausdrückbar sind, oder dass zwischen $3p-2$ der Functionen F eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. Wählt man für die Functionen F die $\frac{p \cdot p+1}{2}$ Quadrate und Producte φ_1^2, $\varphi_1 \varphi_2, \cdots$, so folgt hieraus, dass zwischen den linear unabhängigen Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$

$$\frac{p \cdot p+1}{2} - 3p + 3 = \frac{p-2 \cdot p-3}{2}$$

homogene Gleichungen zweiten Grades bestehen müssen. Diese Zahl aber giebt nur eine untere Grenze. In besonderen Fällen können mehr solcher Gleichungen bestehen.

Im Falle $p=3$ ist diese Zahl Null, und es besteht im Allgemeinen zwischen den drei Functionen φ eine Relation vierten Grades, welche zur Definition der betreffenden Classe algebraischer Functionen dienen kann, wenn man die zwei Verhältnisse der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ als Veränderliche einführt.

Im Falle $p=4$ besteht zwischen den vier Functionen φ nur eine Relation zweiten Grades und es ergiebt sich ausserdem auf dem gleichen Wege eine homogene Gleichung dritten Grades zwischen diesen Grössen. Diese beiden Gleichungen bestimmen wieder vollständig eine Classe algebraischer Functionen vom Geschlecht 4.

Im Falle $p=5$ ist die Zahl der homogenen Gleichungen zweiten Grades 3, und diese reichen im Allgemeinen aus, um die Functionenclasse zu definiren. Wir werden diese bemerkenswerthe Thatsache dadurch beweisen, dass wir zeigen, wie umgekehrt aus drei allgemeinen homogenen Gleichungen zweiten Grades durch Elimination zweier Variabeln eine Gleichung entsteht, die zum Geschlecht 5 gehört. Es seien also die drei homogenen Gleichungen zweiten Grades gegeben:

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,$$
$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,$$
$$\Phi_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,$$

die wir als allgemein voraussetzen. Statt der Variabeln x_i führen wir die neuen Variabeln p, q, x, y, z ein mittelst der linearen Substitution

$$x_i = m_i p + n_i q + a_i x + b_i y + c_i z,$$

von der wir voraussetzen, dass die Substitutionscoefficienten m_i, n_i den Bedingungen genügen:

$$\Phi_1(m) = 0, \quad \Phi_2(m) = 0, \quad \Phi_3(m) = 0,$$
$$\Phi_1(n) = 0, \quad \Phi_2(n) = 0, \quad \Phi_3(n) = 0,$$

dann lassen sich die transformirten Gleichungen in die Form setzen:

$$pq = f, \quad p\xi_1 + q\eta_1 = f_1, \quad p\xi_2 + q\eta_2 = f_2,$$

worin f, f_1, f_2 homogene Functionen zweiten, ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 homogene Functionen ersten Grades von x, y, z sind. Die Elimination von p, q ergiebt die homogene Gleichung sechsten Grades zwischen x, y, z:

$$f(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 + (f_1\xi_2 - f_2\xi_1)(f_1\eta_2 - f_2\eta_1) = 0.$$

Um das Geschlecht dieser Gleichung zu ermitteln, haben wir noch die Anzahl der Doppelpunkte der durch dieselbe dargestellten Curve festzustellen. Da unsere quadratischen Gleichungen allgemein sein sollten, so ist ein Doppelpunkt nur dann vorhanden, wenn einem Werthsystem von x, y, z zwei Werthsysteme von p, q entsprechen, und dies findet dann und nur dann statt, wenn

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$$

und zugleich

$$f_1\xi_2 - f_2\xi_1 = 0, \quad f_1\eta_2 - f_2\eta_1 = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen stellen zwei Curven dritten Grades dar, welche sich in 9 Punkten schneiden. Von diesen sind aber vier die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $f_1 = 0$, $f_2 = 0$; in den fünf andern ist $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$. Die Anzahl der Doppelpunkte ist also 5 und das Geschlecht der betrachteten Functionenclasse ist ebenfalls 5.

Ist p grösser als 5, so übersteigt die Zahl der quadratischen Gleichungen zwischen den Functionen φ die Anzahl der aus denselben zu bestimmenden Functionen und diese Gleichungen können daher nicht mehr im allgemeinsten Sinne von einander unabhängig sein. Gleichwohl besteht keine lineare Abhängigkeit zwischen denselben, und nur in ihrer Gesammtheit können sie ausreichend sein, eine Classe algebraischer Functionen zu definiren. Die Gleichungen müssen in der Weise zusammen bestehen, dass noch mindestens zwei der Variablen $\varphi_1, \varphi_2, \cdot\cdot, \varphi_p$ unbeschränkt veränderlich bleiben; die übrigen können durch diese quadratischen Gleichungen als algebraische Functionen dieser beiden unabhängigen bestimmt sein.

Diese Darstellung der algebraischen Functionen durch die Gesammtheit der Relationen zwischen den Functionen φ bietet den Vortheil, dass es möglich ist, die Anzahl der unbestimmten Constanten, von denen die Functionenclasse abhängt, durch *lineare Transformation* auf eine möglichst kleine zu reduciren, und dass also die Frage nach den Moduln der Classe der gewöhnlichen Invariantentheorie zugänglich wird. Für den Fall $p = 5$ ergiebt sich hiernach folgende Aufgabe:

Man substituire für x_i neue Variable x_i' durch eine lineare Substitution. Es soll über die Substitutionscoefficienten und ausserdem über die Coefficienten $\alpha_i^{(k)}$ so verfügt werden, dass in den transformirten Functionen:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Phi_1' = \alpha_1^{(1)}\Phi_1 + \alpha_2^{(1)}\Phi_2 + \alpha_3^{(1)}\Phi_3\,, \\ \Phi_2' = \alpha_2^{(1)}\Phi_1 + \alpha_2^{(2)}\Phi_2 + \alpha_3^{(2)}\Phi_3\,, \\ \Phi_3' = \alpha_3^{(1)}\Phi_1 + \alpha_3^{(2)}\Phi_3 + \alpha_3^{(3)}\Phi_3 \end{cases}$$

eine möglichst grosse Anzahl von Coefficienten vorgeschriebene Werthe haben. Bezeichnen wir mit s_1, s_2, s_3 unbestimmte Coefficienten, und setzen:

$$(16)\qquad \begin{cases} s_1 = \alpha_1^{(1)} s_1' + \alpha_2^{(1)} s_2' + \alpha_3^{(1)} s_3'\,, \\ s_2 = \alpha_1^{(2)} s_1' + \alpha_2^{(2)} s_2' + \alpha_3^{(2)} s_3'\,, \\ s_3 = \alpha_1^{(3)} s_1' + \alpha_2^{(3)} s_3' + \alpha_3^{(3)} s_3'\,, \end{cases}$$

so können wir diese drei Gleichungen (15) in die eine zusammenfassen:

$$(17)\qquad s_1'\Phi_1' + s_2'\Phi_2' + s_3'\Phi_3' = s_1\Phi_1 + s_2\Phi_2 + s_3\Phi_3,$$

und für die Möglichkeit dieser Transformation ergiebt sich, wenn wir, was frei steht, die Substitutionsdeterminante $= 1$ annehmen, und wenn wir mit A_{ν_1,ν_2,ν_3}, A'_{ν_1,ν_2,ν_3} die simultanen Invarianten der drei Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, resp. Φ_1', Φ_2', Φ_3' bezeichnen, die Bedingung:

$$(18)\qquad \sum_{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3} s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} s_3^{\nu_3} A_{\nu_1,\nu_2,\nu_3} = \sum_{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3} s_1'^{\nu_1} s_2'^{\nu_2} s_3'^{\nu_3} A'_{\nu_1,\nu_2,\nu_3}\,,$$

worin sich die Summen auf alle solche Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 zu erstrecken haben, deren Summe $= 5$ ist. Es muss also die linke Seite von (18) durch die Substitution (16) in die rechte Seite transformirt werden, und man kann daher die absoluten Invarianten der ternären Form fünften Grades (18), deren es zwölf von einander unabhängige giebt, als die Classenmoduln betrachten.

Kehren wir nun zu den oben besprochenen Ausnahmefällen zurück und untersuchen zunächst den Fall $p = 3$. Wenn in diesem Falle ein System von unendlich vielen Abel'schen Functionen existirt, oder wenn eine gerade Thetafunction für die Nullwerthe der Argumente verschwindet, so besteht zwischen den drei Functionen φ_1, φ_2, φ_3 eine Gleichung zweiten Grades, welcher die Form gegeben werden kann:

$$\varphi_1\varphi_3 = \varphi_2^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_3} = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^2.$$

Da nun die Function $\varphi_1 : \varphi_2$ nicht in mehr als vier Punkten unendlich gross und unendlich klein werden kann, so kann $\varphi_2 : \varphi_3$ nur in zwei Punkten unendlich gross und unendlich klein werden, und durch die Substitution $z_1 = \varphi_2 : \varphi_3$ wird die Riemann'sche Fläche auf eine zweiblättrige abgebildet. Im Falle $p = 3$ genügt also das Verschwinden einer geraden Thetafunction für die Nullwerthe der Argumente, um

die Functionenclasse zu einer hyperelliptischen zu machen, und umgekehrt verschwindet auch bei den hyperelliptischen Functionen nur *eine* gerade Thetafunction für die Nullwerthe der Argumente.

Im Falle $p=4$ bestehen im Allgemeinen eine homogene Gleichung zweiten und dritten Grades zwischen den vier Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Wenn ein System von unendlich vielen Abel'schen Functionen existiren soll, so muss zwischen drei Functionen φ eine quadratische Gleichung bestehen, $\varphi_1\varphi_3=\varphi_2^2$, und es verschwindet eine gerade Thetafunction für die Nullwerthe der Argumente. Die Gleichungen zweiten und dritten Grades repräsentiren dann geometrisch eine Raumcurve sechster Ordnung, welche der Durchschnitt einer Fläche dritter Ordnung mit einem Kegel zweiter Ordnung ist, die auf eine ebene Curve fünfter Ordnung mit zwei zusammenfallenden Doppelpunkten projicirt werden kann. Das System von unendlich vielen Abel'schen Functionen entspricht den Tangentialebenen des Kegels.

Wenn nun noch ein weiteres System von unendlich vielen Abel'schen Functionen existirt, so besteht ausser der Gleichung

$$\varphi_1\varphi_3=\varphi_2^2 \tag{19}$$

zwischen den vier Functionen φ noch eine weitere Gleichung zweiten Grades, welche in einer der beiden Formen:

$$\varphi_4^2=F(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\,; \tag{20}$$

$$\varphi_4(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3\varphi_3)=F(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3), \tag{21}$$

worin F homogene Functionen zweiten Grades bedeuten, enthalten sein muss.

Es seien die Nullpunkte von φ_1: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,
" " " φ_3: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$,
" " " φ_2: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Im Falle (20) ergiebt sich für die drei Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, in welchen φ_1, φ_2 verschwindet, eine Gleichung von der Form:

$$(\varphi_4-\lambda\varphi_3)(\varphi_4+\lambda\varphi_3)=0,$$

woraus hervorgeht, dass einer der beiden Factoren, etwa $\varphi_4+\lambda\varphi_2$ in zweien der Punkte α, etwa in α_1, α_2, verschwindet. Ebenso folgt, dass sich ein Factor μ derart bestimmen lässt, dass $\varphi_4+\mu\varphi_1$ in den Punkten β_1, β_2 verschwindet, und daraus folgt, dass die Function

$$\frac{\varphi_4+\mu\varphi_1+\lambda\varphi_3}{\varphi_2}$$

in nur zwei Punkten unendlich gross und unendlich klein wird.

Wenn ein Punkt α mit einem Punkte β zusammenfällt, so ist

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\sqrt{\frac{\varphi_3}{\varphi_1}}$$

eine Function, die nur in zwei Punkten unendlich gross und unendlich klein wird, und wenn wir diesen Fall ausschliessen, so ergiebt sich leicht, dass in (21) nicht die beiden Constanten a_1, a_3 verschwinden können, da zwischen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 keine lineare Gleichung besteht. Ist also etwa a_3 von Null verschieden, so ergiebt sich aus (21) für die Punkte α_1, α_2, α_3

$$\varphi_3(\varphi_4 + \lambda\varphi_3) = 0,$$

so dass $\varphi_4 + \lambda\varphi_3$ in diesen Punkten verschwinden muss. Daher lässt sich in dem Quotienten

$$\frac{\varphi_4 + \lambda\varphi_3 + \mu\varphi_1}{\varphi_2}$$

μ so bestimmen, dass auch diese Function nur in zwei Punkten Null und unendlich wird. Daraus ergiebt sich, dass alle diese Fälle auf hyperelliptische Functionen führen. Wenn also bei $p = 4$ zwei gerade Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente verschwinden, so gehört die Functionenclasse zu den hyperelliptischen und es folgt das Verschwinden von 8 weiteren geraden Thetafunctionen.

Königsberg, im September 1877.

Bemerkungen zur Geometrie auf den Linienflächen vierter Ordnung.

Von Axel Harnack in Dresden.

(Ergänzung zu dem Aufsatze: Annalen, Bd. XII, pag. 47.)

In dem Secantensysteme einer Raumcurve 4. Ordnung 1. Species befinden sich drei Linienflächen 4. Ordnung. Dieselben sind die Durchschnitte des Secantensystemes mit den drei linearen Congruenzen, welche durch je zwei Gegenseiten des der Raumcurve zugehörigen Polartetraeders bestimmt werden. Aus den Parameterwerthen der Curve lässt sich direct auch für die Erzeugenden der Fläche eine Darstellung gewinnen, die zugleich eine kanonische Form für das allgemeine Problem liefert, die Geometrie dieser Flächen auf Grund der doppelt periodischen Functionen zu studiren.

Bezeichnet man die Perioden der Raumcurve mit π und π', so kann die untere Grenze des elliptischen Integrales so normirt werden, dass die Secanten jeder der drei Flächen Curvenpunkte verbinden, deren Argumente bezüglich u und $u+\frac{\pi}{2}$, u und $u+\frac{\pi'}{2}$, u und $u+\frac{\pi+\pi'}{2}$ sind. Wird mithin solch einer Secante das Argument u beigelegt, so folgt, dass $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi'}{2}$, $\frac{\pi+\pi'}{2}$ bereits Periodenwerthe für die Fläche sind. Ihr Integral steht demnach zu dem ursprünglichen in einer Beziehung, wie sie durch quadratische Transformation des elliptischen Integrales vermittelt wird. Die Verbindungslinie von u und $u+\frac{\pi}{2}$ wird in den Punkten, in welchen sie die Seiten des Polartetraeders trifft, von den Verbindungen: $-u$ und $-u+\frac{\pi}{2}$, sowie $-u+\frac{\pi'}{2}$ und $-u+\frac{\pi+\pi'}{2}$ getroffen.

Sehen wir nunmehr von der Raumcurve völlig ab und nennen p und p' die Perioden der Fläche, so haben wir das Resultat abgeleitet: *Die Parameterdarstellung auf der Linienfläche 4. Ordnung kann so normirt werden, dass je zwei Erzeugende, welche sich auf der einen Doppelgeraden schneiden, die Werthe u und $-u$, dagegen zwei, welche*

sich auf der anderen treffen, die Werthe u und $-u+\frac{p}{2}$ erhalten. Bei dieser Festsetzung wird allerdings ein Periodenwerth ausgezeichnet. Aus dieser Darstellung erkennt man, dass sich die Erzeugenden der Fläche zu *windschiefen Vierseiten* anordnen lassen, von denen jedes zusammen mit den beiden Doppelgeraden die Kanten eines Tetraeders constituirt. Die Linien u, $-u$, $u+\frac{p}{2}$, $-u+\frac{p}{2}$ bilden solch ein Quadrupel.

Durch drei beliebige Erzeugende der Linienfläche kann ein Hyperboloid (Fläche 2. Ord.) hindurchgelegt werden. Dasselbe hat mit der Fläche noch eine vierte Erzeugende derselben Schaar gemein, deren Argument nach dem Abel'schen Theoreme bestimmbar ist. Da nun bei unserer Normirung die vier Linien u, $-u$; u, $-u+\frac{p}{2}$ ein in ein Ebenenpaar zerfallenes Hyperboloid liefern, so ist die *constante Summe von vier auf einem Hyperboloid befindlichen Geraden gleich* $\frac{p}{2}$.*) Jede Erzeugende lässt noch einen Büschel von Hyperboloiden zu, welche die Fläche längs derselben tangiren; in diesem Büschel befinden sich *vier*, welche noch ein zweites mal längs einer Geraden berühren. Die auf diese Weise der Linie u zugeordneten x ergeben sich aus der Gleichung: $2u+2x\equiv 0$ (mod. p und p'). In dem Büschel ist *eine osculirende Fläche* vorhanden; sie schneidet noch in der Geraden $-3u+\frac{p}{2}$ ein.

Insbesondere giebt es 16 *hyperbolische Erzeugende*, d. h. solche, in denen der Schnitt des osculirenden Hyperboloides vierfach zählt. Die Argumente derselben genügen der Gleichung: $4u\equiv\frac{p}{2}$; sie lassen sich demzufolge zu *vier windschiefen Vierseiten* anordnen. Endlich verlaufen auf der Fläche *acht singuläre Erzeugende*. Die Argumente derselben sind:

$$0,\ \frac{p}{2};\ \frac{p'}{2},\ \frac{p+p'}{2}\cdot\ \frac{p}{4},\ \frac{3p}{4};\ \frac{p}{4}+\frac{p'}{2},\ \frac{3p}{4}+\frac{p'}{2}.$$

Die erste Gruppe von vier Linien bestimmt vier Cuspidalpunkte auf der einen Doppelgeraden, die zweite vier auf der anderen. Jede Linie wird aber von *einer* anderen geschnitten und es entstehen auf diese Weise auf jeder Doppelgeraden noch zwei ausgezeichnete

*) Durch vier Erzeugende, deren Argumentensumme gleich $\frac{p}{2}$ ist, lässt sich ein Bündel von ∞^2 linearen Complexen hindurchlegen, während durch vier beliebige Erzeugende der Büschel von linearen Complexen bestimmt wird, von denen jeder nicht nur die ganze Linienfläche, sondern auch die Congruenz der beiden Doppelgeraden enthält.

Punkte.*) Diese beiden liegen auf jeder Doppellinie harmonisch zu dem Punktepaare, welches durch die Erzeugenden u und $u + \frac{p}{2}$ und zugleich durch die Erzeugenden $-u$ und $-u + \frac{p}{2}$ ausgeschnitten wird. Denn es ist ersichtlich, dass durch solche Zuordnung involutorische Punktepaare erhalten werden, und dass Doppelelemente dieser Involution entstehen, wenn u von $u + \frac{p}{2}$ geschnitten wird, d. h. wenn entweder $-u \equiv u + \frac{p}{2}$ oder $-u + \frac{p}{2} \equiv u + \frac{p}{2}$ ist. Diese Gleichungen bestimmen aber die oben erwähnten Linienpaare. *Die beiden involutorischen Punktreihen sind durch die Erzeugenden eindeutig auf einander bezogen*, d. h. jedem Punktepaare auf dem einen Träger entspricht ein Paar auf dem anderen. Ihre Beziehung ist festgelegt, wenn zwei Geradenpaare: u und $u + \frac{p}{2}$, v und $v + \frac{p}{2}$ und eine dritte Linie w gegeben ist. Alsdann lege man durch u, v, w, sowie durch $u + \frac{p}{2}$, $v + \frac{p}{2}$, w Hyperboloide; dieselben schneiden sich längs der Geraden: $-u - v - w + \frac{p}{2}$; desgleichen die Hyperboloide durch $u + \frac{p}{2}$, v, w und u, $v + \frac{p}{2}$, w längs der Geraden $-u - v - w$. Vermittelst dieser beiden kann auch die Gerade $w + \frac{p}{2}$ erhalten werden. Mit Zuhilfenahme der Linien $-u$, $-u + \frac{p}{2}$ etc., die mit der Zuordnung gegeben sind, werden beliebig viele Erzeugende durch fortgesetzten gleichartigen Process gewonnen. *Durch diese Bemerkungen ist also ein Verfahren angegeben, welches zur Construction der Linienflächen 4. Ordnung aus zwei involutorischen Punktreihen auf verschiedenen Trägern dient.* Liegen die beiden Träger in der nämlichen Ebene, so erhält man eine Construction der ebenen Curve 4. Classe mit zwei Doppeltangenten.

Diese Betrachtungen modificiren sich für den Grenzfall, dass die beiden Doppelgeraden unendlich nahe zu einander rücken. Alsdann gehen von einem Punkte der Doppelgeraden im Allgemeinen zwei Erzeugende aus, die mit der Doppelgeraden in einer Ebene liegen. Legt man denselben die Argumente u und $-u$ bei, so erkennt man, dass es noch *vier* singuläre Erzeugende giebt, deren Argumente: $0, \frac{p}{2}, \frac{p'}{2}, \frac{p+p'}{2}$ sind. Bei der nunmehr getroffenen Festsetzung ist die constante Summe von vier Erzeugenden, welche der nämlichen

*) Dieselben sind die Ecken des Polartetraeders der oben erwähnten Raumcurve 4. Ordnung; es giebt einfach unendlich viele solche Curven auf der Fläche.

Schaar eines längs der Doppelgeraden berührenden Hyperboloides angehören, gleich 0. Die hyperbolischen Erzeugenden bestimmen sich aus der Gleichung $4u \equiv 0$ und vier derselben fallen demnach mit den singulären zusammen. Eine der vorigen analoge Erzeugungsweise vermittelst fortgesetzter Construction von Hyperboloiden kann auch in diesem Falle gewonnen werden.

Die vorstehenden Bemerkungen, welche durch Variation der Constanten für die allgemeine Darstellung zwei-zweideutig auf einander bezogener Punktreihen erweitert werden können, sollen meine Untersuchungen über die Behandlungsweise der einfachsten Gebilde *einer* Dimension mit Hilfe doppelt periodischer Functionen zum Abschlusse bringen. Nur als Ergänzungen des oben erwähnten Aufsatzes, dem sie sich leicht einordnen, möchte ich dieselben betrachtet wissen.

Dresden, October 1877.

Die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen*).

Von A. Mayer in Leipzig.

Nach der in den Lehrbüchern angenommenen Theorie ist das isoperimetrische Problem, den relativ grössten oder kleinsten Werth des gegebenen Integrales

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(xy_1 \cdots y_n y_1' \cdots y_n')\, dx$$

zu finden, wenn nur solche Functionen $y_1 \cdots y_n$ in Betracht gezogen werden sollen, für welche eine Reihe anderer gegebener Integrale

$$V_\varkappa = \int_{x_0}^{x_1} f_\varkappa (xy_1 \cdots y_n y_1' \cdots y_n')\, dx, \quad \varkappa = 1, 2, \cdots m,$$

vorgeschriebene Werthe behalten, vollkommen identisch mit der Aufgabe, das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} (f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m)\, dx$$

zu einem absoluten Maximum oder Minimum zu machen, wobei λ_1, $\lambda_2, \cdots \lambda_m$ unbestimmte Constanten bedeuten, die hinterher so bestimmt werden, dass die Integrale $V_\varkappa$ die gegebenen Werthe annehmen. Dies ist nun allerdings vollkommen richtig, solange es sich lediglich um die Lösung des Problems, d. h. um die Bestimmung der unbekannten Functionen y handelt. Wäre dagegen auch die Frage, ob und innerhalb welcher Grenzen die gefundenen Functionen y ein wirkliches Maximum oder Minimum erzeugen, in beiden Problemen auf dieselbe Art zu beantworten, so würde sich beispielsweise ergeben, dass der Schwerpunkt eines homogenen, an beiden Enden aufgehangenen Fadens durchaus nicht bei jeder Lage seiner Endpunkte immer die tiefstmögliche Lage einnimmt, was offenbar absurd ist. Es ist daher klar, dass

*) Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Juli 1877.

die Kriterien des Maximums und Minimums in beiden Problemen unmöglich dieselben sein können. Dies hat für den Fall einer einzigen unbekannten Function y, von der aber beliebig hohe Differentialquotienten in den Integralen auftreten können, schon 1869 der, leider noch in demselben Jahre verstorbene Schwedische Mathematiker Lundström in der Abhandlung: „Distinction des maxima et des minima dans un problème isopérimétrique", Nova acta reg. soc. sc. Upsaliensis Ser. 3, Vol. VII, hervorgehoben und darin zugleich die richtigen Kriterien des Maximums und Minimums für die isoperimetrischen Probleme aufgestellt.

Allein abgesehen davon, dass in Folge ungenauen Ausdrucks und zum Theil auch nicht ganz richtiger Formeln seine Schlüsse nur schwer verständlich sind, dürfte es wohl überhaupt auf dem Lundström'schen Wege unmöglich sein, nachzuweisen, dass die als nothwendig erkannten Kriterien zugleich auch hinreichend sind. Meiner Meinung nach kann nämlich dieser letzte, schwierigste Punkt nur dadurch entschieden werden, dass man nach dem Vorgange von Jacobi und Clebsch die zweite Variation des betreffenden Integrales auf ihre einfachste Form bringt, und gerade solche von der Integration von Differentialgleichungen abhängige Transformation vermeidet Lundström absichtlich als zu complicirt.

Nun habe ich aber in meiner Habilitationsschrift*) aus der Clebsch'schen Reduction der zweiten Variation die Kriterien des Maximums und Minimums für dasjenige allgemeine Problem entwickelt, in welchem, wie Lagrange**) und Clebsch***) gezeigt haben, alle Aufgaben der Variationsrechnung, in denen nur eine einzige unabhängige Variable auftritt, enthalten sind. In diesen allgemeinen Kriterien des Maximums und Minimums müssen daher nothwendig auch die besonderen Kriterien der isoperimetrischen Probleme stecken. Der Wunsch, die letzteren durch Ableitung aus jenen strenger zu begründen und damit zugleich an dem wichtigsten Beispiele die Anwendbarkeit meiner allgemeinen Kriterien auf die verschiedenen speciellen Gattungen von Problemen der Variationsrechnung darzuthun, war die Veranlassung zu der vorliegenden Note. Unter Hinweis auf den Aufsatz: „Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale", Borchardt's J. 69, der, in theilweise veränderter Darstellung, die Untersuchungen meiner Habilitationsschrift reproducirt, setze ich diese Ableitung in § 1. auseinander.

---

*) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig 1866.

**) Leçons sur le calcul des fonctions, Ausgabe von 1806 p. 466 und 469.

***) Borchardt's J. 55, p. 336.

In den isoperimetrischen Problemen tritt ferner ein sehr bemerkenswerthes Reciprocitätsgesetz zu Tage, nach welchem jedem isoperimetrischen Probleme mit m isoperimetrischen Bedingungen m andere isoperimetrische Probleme in der Weise äquivalent sind, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Grenzen, innerhalb deren die Lösung ein wirkliches Maximum oder Minimum hervorruft, allen $m+1$ Problemen gemeinschaftlich angehören. Dieses Reciprocitätsgesetz ist lediglich eine Folge der Euler'schen Regel zur Lösung der isoperimetrischen Probleme und der Form, in welcher bei diesen Problemen die zweite Variation sich vor jeder Reduction darbietet. Die Ableitung des Reciprocitätsgesetzes aus den Kriterien des § 1. wird daher als eine willkommene Bestätigung dieser Kriterien zu betrachten sein.

Im dritten § endlich soll eben jenes Beispiel der Gleichgewichtsfigur eines homogenen, schweren Fadens, oder, was dasselbe ist, die Aufgabe der Curve von gegebener Länge und tiefstem Schwerpunkte die Anwendung der Kriterien und des Reciprocitätsgesetzes erläutern.

Ich betrachte im Folgenden immer nur den einfachsten Fall, wo sowohl die Grenzen x_0 und x_1, als auch die Werthe, welche die unbekannten Functionen y in diesen beiden Grenzen annehmen, fest gegeben sind, weil sich auf diesen Fall alle anderen zurückführen lassen. In Betreff dieser Zurückführung verweise ich auf meinen oben citirten Aufsatz, aus welchem auch leicht erhellt, wie man zu verfahren hat, wenn die unbekannten Functionen y ausser den isoperimetrischen Bedingungen noch gegebenen Differentialgleichungen unterworfen sein sollen, oder, was hiervon nur ein specieller Fall ist, wenn in den Integralen der Aufgabe höhere Differentialquotienten der y auftreten.

§ 1.

Kriterien des Maximums und Minimums.

In dem angegebenen Aufsatze, auf den sich im Folgenden die eingeklammerten Seitenzahlen beziehen, habe ich das Problem behandelt:

I. *Man soll die Functionen $y_1, \cdots y_n$, zwischen denen die m Bedingungsgleichungen:*

$$\varphi_\varkappa(xy_1 \cdots y_n y_1' \cdots y_n') = 0, \quad \varkappa = 1, 2, \cdots m,$$

vorgeschrieben sind, so bestimmen, dass bei gegebenen Grenzen und Grenzwerthen das Integral:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(xy_1 \cdots y_n y_1' \cdots y_n')\, dx$$

ein relatives Maximum oder Minimum werde,

und habe für dasselbe (p. 260) die folgenden Kriterien des Maximums und Minimums erhalten:

Das Problem I. wird gelöst durch die $n+m$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen der unabhängigen Variabeln x und den $n+m$ abhängigen Variabeln $y_1, \cdots y_n, \lambda_1, \cdots \lambda_m$

(1) $$\frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y'_h}, \quad \varphi_\varkappa = 0,$$

in denen:

(2) $$\Omega = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

ist, und damit man den $2n$ Grenzbedingungen genügen könne, müssen die durch vollständige Integration dieser Gleichungen gewonnenen Functionen $y_1, \cdots y_n$ $2n$ willkürliche Constanten $a_1, \cdots a_{2n}$ enthalten. Hat man diese Constanten durch die gegebenen Grenzwerthe ausgedrückt, so ist es (abgesehen immer von dem Eintreten besonderer Ausnahmefälle [p. 241, 260]), damit die so erhaltenen Functionen ein wirkliches relatives Maximum oder Minimum des Integrales hervorbringen, hinreichend und (im Allgemeinen wenigstens auch) nothwendig, dass die obere Grenze x_1 (die ich immer $> x_0$ voraussetze) zwischen x_0 und der zunächst an x_0 gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

(3) $$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} = 0$$

bleibe und dass überdies die homogene Function zweiter Ordnung:

(4) $$2W = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i,$$

deren n willkürliche Argumente $U_1, \cdots U_n$ den m Bedingungsgleichungen:

(5) $$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y'_h} U_h = 0$$

unterworfen sind, zwischen x_0 und x_1 ihr Zeichen nicht ändern könne.

In den Formeln (3), (4), (5) sind unter $y_1, \cdots y_n, \lambda_1, \cdots \lambda_m$ diejenigen Functionen von $x, a_1, \cdots a_{2n}$ zu verstehen, die durch die vollständige Integration der Gleichungen (1) erhalten wurden, den Integrationsconstanten $a_1, \cdots a_{2n}$ selbst hat man die festen Werthe beizulegen, die sich aus den $2n$ Grenzbedingungen ergaben, und mit y_{h0} endlich ist der Werth der Function y_h für $x = x_0$ bezeichnet.

Diese Resultate lege ich dem Folgenden zu Grunde und betrachte nunmehr das isoperimetrische Problem:

II. *Die Functionen* $y_1, \cdots y_n$ *von* x, *welche den* m *isoperimetrischen Bedingungen*

$$\int_{x_0}^{x_1} f_\varkappa (xy_1 \cdots y_n\, y_1' \cdots y_n')\, dx = l_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, \cdots m,$$

unterworfen sind und überdies in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und x_1 gegebene Werthe erhalten sollen, so zu bestimmen, dass für dieselben das Integral

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(xy_1 \cdots y_n\, y_1' \cdots y_n')\, dx$$

ein relatives Maximum oder Minimum werde (wobei selbstverständlich m jetzt nicht mehr, wie im Probleme I., der Beschränkung $m < n$ unterliegt).

Führt man nach dem Vorgange Lagrange's m neue Variabeln $u_1, \cdots u_m$ durch die Substitutionen:

$$u_\varkappa = \int f_\varkappa dx$$

ein, so kann man die isoperimetrischen Bedingungen durch die m Bedingungsgleichungen:

$$f_\varkappa - u_\varkappa' = 0,$$

verbunden mit den $2m$ Grenzbedingungen:

$$[u_\varkappa]_{x=x_0} = \alpha_\varkappa, \quad [u_\varkappa]_{x=x_1} = \alpha_\varkappa + l_\varkappa,$$

ersetzen und in den letzteren die Anfangswerthe $\alpha_\varkappa$ als gegebene Grössen betrachten, wodurch das Problem II. die Form annimmt:

III. *Die $n + m$, durch die m gegebenen Bedingungsgleichungen*:

(6) $$\varphi_\varkappa = f_\varkappa - u_\varkappa' = 0$$

verbundenen Functionen $y_1, \cdots y_n, u_1, \cdots u_m$ sind so zu bestimmen, dass bei gegebenen Grenzwerthen von $x, y_1, \cdots y_n, u_1, \cdots u_m$ das Integral V ein relatives Maximum oder Minimum werde.

Das Problem III. ist aber nur ein specieller Fall des Problems I. und man kann daher auf dasselbe die oben angegebene Regel anwenden. Nach derselben sind die Differentialgleichungen des Problems III.:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u_\varkappa} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial u_\varkappa'}, \quad \varphi_\varkappa = 0.$$

Diese reduciren sich aber, wenn man

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m$$

setzt, von selbst auf die Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_h'}, \quad 0 = -\frac{d\lambda_\varkappa}{dx}, \quad f_\varkappa - u_\varkappa' = 0.$$

Das Problem III. wird folglich gelöst durch die n Differentialgleichungen:

$$(7) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial y_h'},$$

in denen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ als unbestimmte Constanten aufzufassen sind, und nach Integration dieser Gleichungen ergeben sich die $u_\varkappa$ durch die Quadraturen:

$$u_\varkappa = c_\varkappa + \int f_\varkappa dx.$$

Damit man die erforderliche Anzahl willkürlicher Constanten erhalte, um den vorgeschriebenen $2(n+m)$ Grenzbedingungen genügen zu können, ist es hiernach nothwendig und hinreichend, dass die n Gleichungen (7) auflösbar seien nach den n zweiten Differentialquotienten $y_1'', \cdots y_n''$.

Da ferner nach (2) und (6)

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_k' \,\partial y_h'} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_k' \,\partial u_i'} = 0$$

ist, so reducirt sich für das Problem III. die Function $2W$ auf

$$2W = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_h' \,\partial y_i'} U_h U_i$$

und die m Bedingungsgleichungen (5) werden:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_h'} U_h = V_\varkappa.$$

Diese m Gleichungen bestimmen aber nur die in der Function $2W$ gar nicht vorkommenden Grössen $V_1, \cdots V_m$ als Functionen der Argumente $U_1, \cdots U_n$. Sie beschränken also die Willkürlichkeit dieser Argumente in keiner Weise und können daher ganz weggelassen werden.

Die Grenzgleichung endlich wird im Problem III., wenn man unter $a_1, \cdots a_{2n}$ jetzt die $2n$ willkürlichen Constanten versteht, welche die vollständige Integration der Gleichungen (7) mit sich bringt:

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n}\, \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}}\, \frac{\partial u_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial u_m}{\partial \lambda_m}\, \frac{\partial u_{10}}{\partial c_1} \cdots \frac{\partial u_{m0}}{\partial c_m} = 0.$$

Da aber:

$$\frac{\partial y_h}{\partial c_k} = \frac{\partial y_{h0}}{\partial c_k} = \frac{\partial u_h}{\partial c_k} = \frac{\partial u_{h0}}{\partial c_k} = 0$$

und

$$\frac{\partial u_k}{\partial c_k} = \frac{\partial u_{k0}}{\partial c_k} = 1$$

ist, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n}\, \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}}\, \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \lambda_m} = 0,$$

worin:

(8) $$v_k = u_k - u_{k0} = \int_{x_0}^{x} f_k\, dx,$$

und man erhält somit aus der für das Problem I. angeführten Regel die folgenden Kriterien des Maximums und Minimums für das isoperimetrische Problem II.:

IV. *Das Problem* II. *wird gelöst durch die n Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial y_h'},$$

in denen

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m$$

ist und die λ unbestimmte Constanten bedeuten. Die vollständige Integration dieser Gleichungen liefert, vorausgesetzt, dass sich aus ihnen die zweiten Differentialquotienten $y_1'', \cdots y_n''$ nicht eliminiren lassen, $y_1, \cdots y_n$ als Functionen von x, von den m isoperimetrischen Constanten $\lambda_1, \cdots \lambda_m$ und von $2n$ Integrationsconstanten $a_1, \cdots a_{2n}$. Hat man diese $2n + m$ Constanten aus den m isoperimetrischen und den $2n$ Grenzbedingungen bestimmt, so ergeben (abgesehen von solchen Ausnahmen, die nur in besonderen Fällen eintreten können und ihrer Natur nach sich den allgemeinen Regeln entziehen) *die so erhaltenen Functionen $y_1, \cdots y_n$ ein wirkliches relatives Maximum oder Minimum des Integrales V, wenn die homogene Function zweiter Ordnung der n unabhängigen Variabeln $U_1, \cdots U_n$*

$$2W = \sum_{i=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_h'\, \partial y_i'}\, U_h U_i$$

innerhalb der Integrationsgrenzen stets dasselbe Zeichen bewahrt, und so lange überdies die obere Grenze x_1 zwischen x_0 und der zunächst an x_0 gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$\Delta(x, x_0) = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n}\,\frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}}\,\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \lambda_m} = 0$$

bleibt, in welcher die Functionen v_k durch die Quadraturen

$$v_k = \int_{x_0}^{x} f_k\, dx$$

zu berechnen sind. Ist dagegen die erste Bedingung nicht erfüllt, so findet sicher weder ein Maximum, noch ein Minimum statt und im Allgemeinen gilt dasselbe auch dann, wenn x_1 die angegebene Grenze erreicht oder überschritten hat.

§ 2.

Das Reciprocitätsgesetz der isoperimetrischen Probleme.

Das Problem II., auf welches sich der Satz IV. bezieht, lässt sich in Zeichen kurz so wiedergeben:

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{c} V = \int_{x_0}^{x_1} f\,dx = \text{Max., Min.} \\ \int_{x_0}^{x_1} f_1\,dx = l_1, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_2\,dx = l_2, \cdots \int_{x_0}^{x_1} f_m\,dx = l_m. \end{array}\right.$$

Vergleichen wir dasselbe jetzt mit dem anderen isoperimetrischen Probleme, welches enthalten ist in den Formeln:

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{array}{c} V_1 = \int_{x_0}^{x_1} f_1\,dx = \text{Max., Min.} \\ \int_{x_0}^{x_1} f\,dx = l, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_2\,dx = l_2, \cdots, \int_{x_0}^{x_1} f_m\,dx = l_m. \end{array}\right.$$

Ich nehme an, dass in beiden Problemen den Grenzen und Grenzwerthen dieselben festen Werthe vorgeschrieben sind.

Führen wir, des bequemeren Vergleichs halber, homogene isoperimetrische Constanten ein, d. h. setzen wir:

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{\mu},$$

$$\mu F = \mu f + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_m f_m = \Phi,$$

und bedenken, dass die Determinante $\Delta(x x_0)$ sich nur um einen constanten Factor ändert, wenn wir an Stelle der $a_1, \cdots a_{2n}, \lambda_1, \cdots \lambda_m$ irgend $2n + m$ unabhängige Functionen dieser Constanten als neue Constanten einführen, so können wir den Satz IV. auch so aussprechen:

Das Problem (α) wird gelöst durch die n Differentialgleichungen:

$$(9)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y_h'},$$

nach deren vollständiger Integration die $2n$ Integrationsconstanten $a_1, \cdots a_{2n}$ und die Verhältnisse der $m + 1$ isoperimetrischen Constanten $\mu, \mu_1, \cdots \mu_m$ aus den $2n$ Grenzbedingungen und den m isoperimetrischen Bedingungen:

$$(10)\qquad \int_{x_0}^{x_1} f_1\,dx = l_1, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_2\,dx = l_2, \cdots \int_{x_0}^{x_1} f_m\,dx = l_m$$

zu bestimmen sind, und die so erhaltenen Functionen $y_1, \cdots y_n$ erzeugen ein wirkliches Maximum oder Minimum im Problem (α), so lange die obere Grenze x_1 zwischen x_0 und der zunächst an x_0 gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$\Delta_\alpha(x_1 x_0) = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \mu} \frac{\partial v_2}{\partial \mu_2} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \mu_m} = 0$$

bleibt, vorausgesetzt, dass überdies die homogene Function zweiter Ordnung

$$2\, W_\alpha = \frac{1}{\mu} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_h' \partial y_i'} U_h U_i$$

zwischen x_0 und x_1 stets dasselbe Zeichen behält.

Gehen wir nun über zum Probleme (β), so bleiben für dieses die Gleichungen (9) und die Grenzbedingungen ganz unverändert und die isoperimetrischen Bedingungen (10) ändern sich nur insoweit, als jetzt an Stelle der Bedingung

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1\, dx = l_1$$

die folgende:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\, dx = l$$

tritt. Im Allgemeinen wird also die Lösung des Problems (β) verschieden sein von der des Problems (α). Nehmen wir aber an, dass sich bei der Lösung des Problems (α) als Maximums- oder Minimumswerth des Integrales V ergeben habe

$$V = \varkappa,$$

so sind unter der Annahme

$$l = \varkappa \tag{11}$$

die aus dem Problem (α) erhaltenen Functionen $y_1, \cdots y_n$ gleichzeitig auch Lösungen des Problems (β) und liefern hier für das Integral V_1 den Werth l_1. Denn nach Voraussetzung erfüllen diese Functionen und die Werthe der Constantenverhältnisse $\mu : \mu_1 : \cdots : \mu_m$, die sich bei ihrer Auffindung ergaben, gleichzeitig die Gleichungen (9) und die $2n$ Grenzbedingungen, die beiden Problemen gemein sind, und genügen überdies den $m + 1$ Gleichungen:

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = \varkappa, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1, \quad \cdots \int_{x_0}^{x_1} f_m dx = l_m,$$

welche bei der Annahme (11) die isoperimetrischen Bedingungen sowohl des ersten, wie des zweiten Problems enthalten.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass man immer durch bloss algebraische Operationen das Problem (β) lösen kann, so oft man das Problem (α) gelöst hat für unbestimmte Werthe der Constanten $l_1, \cdots l_m$.

Weiter ist für die unter der Voraussetzung (11) beiden Problemen gemeinsame Lösung die Grenzgleichung im Problem (β):

$$\Delta_\beta(xx_0) = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{n0}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v}{\partial \mu} \frac{\partial v_2}{\partial \mu_2} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \mu_m} = 0,$$

wo die y_h und v_k, die a_i und μ_k dieselben Werthe haben, wie in der Determinante $\Delta_\alpha(xx_0)$ und nur an Stelle von v_1 die Function

$$v = \int_{x_0}^{x} f dx \tag{12}$$

getreten ist. Wegen

$$\Phi = \mu f + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_m f_m$$

folgt aber aus (12) und (8):

$$\mu v + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m = \int_{x_0}^{x} \Phi dx$$

und hieraus ergiebt sich durch partielle Differentiation nach a_i und μ_k:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial a_i} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial a_i} + \cdots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial a_i} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial a_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h'}{\partial a_i} \right),$$

$$v_\varkappa + \mu \frac{\partial v}{\partial \mu_\varkappa} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mu_\varkappa} + \cdots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial \mu_\varkappa} = \int_{x_0}^{x} dx \left\{ f_\varkappa + \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial \mu_\varkappa} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h'}{\partial \mu_\varkappa} \right) \right\}.$$

Man hat also, wenn man unter c irgend eine der Constanten $a_1, \cdots a_{2n}$, $\mu, \mu_1, \cdots \mu_m$ versteht:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial c} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial c} + \cdots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial c} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h'}{\partial c} \right).$$

Nun ist identisch:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h'}{\partial c} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \right) \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h}{\partial c} \right)$$

oder nach (9):

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h}{\partial c} \right),$$

also erhält man:

$$\frac{\partial v}{\partial c} = -\frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial v_1}{\partial c} - \frac{1}{\mu} \left\{ \sum_{k=2}^{k=m} \mu_k \frac{\partial v_k}{\partial c} - \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \frac{\partial y_h}{\partial c} - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y_h'} \right]_0 \frac{\partial y_{h0}}{\partial c} \right) \right\},$$

wo der Index 0 wie früher die Substitution $x = x_0$ andeutet.

Diese Formeln drücken aber nur die Elemente $\frac{\partial v}{\partial c}$ der Determinante $\Delta_\beta(xx_0)$ durch die Grössen $-\frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial v_1}{\partial c}$, vermehrt um je mit demselben Factor multiplicirte, correspondirende Elemente der anderen Reihen dieser Determinante aus. Daher ist identisch:

$$\Delta_\beta(xx_0) = -\frac{\mu_1}{\mu}\Delta_\alpha(xx_0).$$

Für die unter der Annahme (11) beiden Problemen gemeinsame Lösung sind also auch ihre Grenzgleichungen dieselben.

Endlich tritt an die Stelle der homogenen Function $2W_\alpha$ des Problems (α) im Problem (β) die Function:

$$2W_\beta = \frac{1}{\mu_1}\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_h'\partial y_i'}U_h U_i.$$

Für die betrachtete gemeinschaftliche Lösung hat man also:

$$2W_\beta = \frac{\mu}{\mu_1}2W_\alpha = \frac{1}{\lambda_1}2W_\alpha.$$

Fassen wir diese Resultate zusammen, so können wir demnach den folgenden Satz aussprechen:

V. *Hat man das isoperimetrische Problem*

$$(\alpha)\quad \begin{cases} V = \int_{x_0}^{x_1} f\,dx = \text{Max., Min.} \\ \int_{x_0}^{x_1} f_1\,dx = l_1, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_2\,dx = l_2, \quad \cdots, \quad \int_{x_0}^{x_1} f_m\,dx = l_m \end{cases}$$

durch vollständige Integration der n Differentialgleichungen:

$$(7)\qquad \frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_h'}$$

gelöst, in denen

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m$$

ist und die λ unbestimmte Constanten sind, deren Werthe sich sodann aus den m isoperimetrischen Bedingungen des Problems bestimmen, und hat man hierbei als Maximums- oder Minimums-Werth des Integrales V gefunden:

$$V = l,$$

so ist die erhaltene Lösung dieses Problems gleichzeitig auch die Lösung des reciproken Problems:

$$(\beta)\quad\begin{cases} V_1 = \int\limits_{x_0}^{x_1} f_1\, dx = \text{Max., Min.} \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} f\,dx = l, \quad \int\limits_{x_0}^{x_1} f_2\,dx = l_2, \cdots, \quad \int\limits_{x_0}^{x_1} f_m\,dx = l_m, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass man in beiden Problemen den Grenzen und Grenzwerthen dieselben festen Werthe vorgeschrieben hat.

Ist ferner im Problem (α)

$$V = l$$

ein wirkliches Maximum oder Minimum des Integrales V, *so ist zu gleicher Zeit im Probleme* (β)

$$V_1 = l_1,$$

ein wirkliches Maximum oder Minimum des Integrales V_1, *wenn*

$$\lambda_1 > 0$$

ist, dagegen ein Minimum oder Maximum von V_1, *wenn*

$$\lambda_1 < 0$$

ist. Endlich, wenn im Probleme (α) *der gefundene Werth* l *von* V *weder ein Maximum, noch ein Minimum ist, so gilt dasselbe auch im Probleme* (β) *von dem Werthe* l_1 *von* V_1.

Man sieht aus diesem *Reciprocitätsgesetze der isoperimetrischen Probleme*, dass man (bei festen, aber unbestimmten Werthen der Constanten l) nur für irgend ein vorgelegtes isoperimetrisches Problem die Lösung gefunden und die Frage entschieden zu haben braucht, ob und innerhalb welcher Grenzen diese Lösung ein wirkliches Maximum oder Minimum der Aufgabe ergiebt, um dieselben Fragen ohne Weiteres auch für jedes reciproke Problem beantworten zu können. Es versteht sich ferner von selbst, dass es, um das Reciprocitätsgesetz anwenden zu können, nicht nothwendig ist, das gegebene Problem (α) gerade auf dem angegebenen Wege gelöst zu haben. Man braucht vielmehr nur, wenn man die Lösung auf irgend einem anderen Wege, z. B. durch geometrische Betrachtungen ermittelt hat, rückwärts die Vorzeichen der isoperimetrischen Constanten $\lambda_1, \cdots \lambda_m$ zu bestimmen. Bei den isoperimetrischen Problemen von der Form:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(xy)\, dx = \text{Max., Min.,} \quad \int\limits_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + y'^2} = l_1$$

z. B. ist:

$$2\,W = \frac{\lambda_1}{(\sqrt{1 + y'^2})^3}\, U_1^2;$$

hier gehört also einer Lösung, die ein Maximum erzeugt, ein nega-

tiver, und einer Lösung, die ein Minimum hervorbringt, ein positiver Werth von λ_1 zu.*)

§ 3.

Beispiel.

Diejenige Curve von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten zu finden, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

Ich nehme die z Axe vertical und dem Sinne der Schwere entgegengesetzt und lege, der Bequemlichkeit halber, die xy Ebene durch den gegebenen Anfangspunkt der Curve. Die Aufgabe drückt sich dann analytisch durch die Formeln aus:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} z\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx = Min. \\ &\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx = l_1 . \end{aligned}\right.$$

Man hat also hier:

$$(2)\qquad F = (z+\lambda_1)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

und erhält als Lösung der Aufgabe die Kettenlinie:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &y = \frac{a_1}{a_2}\,x + a_3 , \\ &z+\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_1^2+a_2^2}\left\{e^{\frac{x-a_4}{a_2}} + e^{-\frac{x-a_4}{a_2}}\right\}, \end{aligned}\right.$$

woraus sich für

*) Die obigen Betrachtungen beweisen das Reciprocitätsgesetz nur für den Fall fest gegebener Grenzen und Grenzwerthe. Man kann aber zeigen, dass der Satz V. ganz unverändert auch bei beliebigen Grenzbedingungen gilt, vorausgesetzt natürlich nur, dass diese Grenzbedingungen in beiden Problemen dieselben sind. Es hängt dies mit denjenigen Reciprocitätsverhältnissen zusammen, welche die Maxima und Minima inverser Functionen darbieten. Uebrigens ist das Reciprocitätsgesetz nicht die einzige Eigenschaft, welche die isoperimetrischen Aufgaben vor den anderen Problemen der Variationsrechnung voraus haben. Für dieselben gilt vielmehr noch ein anderer, höchst wichtiger Satz, den man das *Gesetz der Unveränderlichkeit der isoperimetrischen Constanten* nennen könnte. Wenn man nämlich durch Einschaltung von Bedingungen zwischen den Grenzen die Curven y zwingt, sich in Zweige zu theilen, so ändern sich die Integrationsconstanten a von einem Zweige zum andern, aber die isoperimetrischen Constanten λ behalten überall dieselben Werthe. In dem besonderen Falle, wo man die geschlossene Curve grössten Flächeninhalts bei gegebenem Umfange, oder kleinsten Umfangs bei gegebener Fläche sucht und überdies verlangt, dass die Curve im Innern eines gegebenen Polygons verlaufen solle, fällt das letztere Gesetz mit dem bekannten Steiner'schen Satze zusammen, dass alle freien Theile der gesuchten Curve Bögen gleicher Kreise sein müssen.

$$v_1 = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

der Werth

$$(4) \qquad v_1 = \tfrac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left\{ e^{\frac{x - a_4}{a_2}} - e^{-\frac{x - a_4}{a_2}} - e^{\frac{x_0 - a_4}{a_2}} + e^{-\frac{x_0 - a_4}{a_2}} \right\}$$

ergiebt.

Die 5 Constanten $a_1 a_2 a_3 a_4 \lambda_1$ bestimmen sich aus der gegebenen Lage der beiden Endpunkte und der gegebenen Bogenlänge l_1, und zwar erhält man zwei verschiedene Werthsysteme derselben, die zwei gleichen und entgegengesetzten Werthen der Constanten a_2 angehören. Da nach (4)

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2} \left(e^{\frac{x - a_4}{a_2}} + e^{-\frac{x - a_4}{a_2}} \right)$$

stets dasselbe Zeichen, wie $\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2}$ besitzt, so hat man, damit der Bogen positiv werde, in den Formeln (3) und (4) der $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ das Zeichen von a_2 beizulegen.

Die Function ferner:

$$2W = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} U_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} U_1 U_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z'} U_2^2$$

wird nach (1)

$$2W = \frac{z + \lambda_1}{(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2})^3} \left\{ U_1^2 + U_2^2 + (z' U_1 - y' U_2)^2 \right\}$$

und hat also nach (3) beständig dasselbe Zeichen wie $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Um daher das Minimum zu erhalten, müssen wir diese Wurzel und mit ihr a_2 positiv nehmen, d. h. wir müssen von den beiden Kettenlinien von gegebener Länge, die sich in der, durch die beiden gegebenen Endpunkte gehenden Verticalebene von dem einen Punkte zum anderen ziehen lassen, diejenige nehmen, die ihre convexe Seite nach unten kehrt. In Folge der Voraussetzung $z_0 = 0$ wird nach (3) dann $\lambda_1 > 0$.

Die Grenzgleichung endlich:

$$(5) \qquad \sum \pm \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y_0}{\partial a_2} \frac{\partial z}{\partial a_3} \frac{\partial z_0}{\partial a_4} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} = 0$$

reducirt sich zunächst wegen der aus (3) und (4) folgenden Formeln:

$$\frac{\partial y}{\partial a_3} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial a_4} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial a_3} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = -1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial a_3} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} = 0$$

sofort auf die Gleichung:

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial(y-y_0)}{\partial a_1}, & \frac{\partial(y-y_0)}{\partial a_2}, & 0 \\ \frac{\partial(z-z_0)}{\partial a_1}, & \frac{\partial(z-z_0)}{\partial a_2}, & \frac{\partial(z-z_0)}{\partial a_4} \\ \frac{\partial v_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial v_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial v_1}{\partial a_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man weiter für den Augenblick

$$(7)\qquad \frac{x-a_4}{a_2} = \xi, \quad \tfrac{1}{2}(e^{\xi}+e^{-\xi}) = p, \quad \tfrac{1}{2}(e^{\xi}-e^{-\xi}) = q,$$

wonach sich aus (3) und (4) ergiebt:

$$y - y_0 = a_1\,(\xi - \xi_0),$$
$$z - z_0 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,(p - p_0),$$
$$v_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,(q - q_0),$$

differentiirt die letzteren Formeln partiell nach a_1, a_2, a_4 und substituirt die Werthe der Differentialquotienten in die Gleichung (6), so erhält man nach einfachen Reductionen und unter Weglassung des constanten Factors $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2^2}$ die Gleichung:

$$(\xi-\xi_0)\,[(p q_0 - p_0 q)(\xi - \xi_0) - (p - p_0)^2 + (q - q_0)^2] = 0,$$

sodass also schliesslich, wenn man noch

$$\xi - \xi_0 = \frac{x - x_0}{a_2} = \Theta$$

setzt, die Grenzgleichung des Problems wird:

$$\Theta\,\Psi(\Theta) = 0,$$

worin:

$$\Psi(\Theta) = e^{\Theta} + e^{-\Theta} - \frac{\Theta}{2}(e^{\Theta} - e^{-\Theta}) - 2$$

ist. Die Betrachtung der Functionen $\Psi'\Theta$ und $\Psi''\Theta$ zeigt aber sofort, dass diese Gleichung nur die eine reelle Wurzel $\Theta = 0$, d. h. $x = x_0$ zulässt. Die Gleichung ergiebt also keinerlei Beschränkung für die obere Grenze x_1; es findet vielmehr für die nach unten convexe Kettenlinie ein unbeschränktes Minimum statt und wir haben den Satz gewonnen:

Unter allen Curven von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten hat stets die Kettenlinie den tiefsten Schwerpunkt.

Da $\lambda_1 > 0$, so geht zugleich aus diesem Satze durch Anwendung des Reciprocitätsgesetzes noch der folgende hervor:

Unter allen Curven von gegebenen Endpunkten, deren Schwerpunkte auf einer und derselben Horizontalebene liegen, hat stets die Kettenlinie die kleinste Länge.

In dem absoluten Probleme dagegen

$$(8) \qquad \int_{x_0}^{x_1} (z+\lambda_1) \sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx = Min.,$$

welches, vorausgesetzt, dass man der Constanten λ_1 denselben Werth giebt, den sie in der eben behandelten isoperimetrischen Aufgabe erhält, durch die nämliche Kettenlinie gelöst wird, tritt an die Stelle der Gleichung (5) die Gleichung:

$$\sum \pm \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y_0}{\partial a_2} \frac{\partial z}{\partial a_3} \frac{\partial z_0}{\partial a_4} = 0,$$

die sich unter Weglassung des Factors $\frac{a_1^2+a_2^2}{a_2^2}(\xi - \xi_0)$ auf

$$(q\xi - p)\, q_0 - q\, (q_0 \xi_0 - p_0) = 0$$

reducirt. Nun ist nach (3) und (7)

$$p = \frac{2(z+\lambda_1)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}, \quad q = \frac{2a_2 z'}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}, \quad \xi - \xi_0 = \frac{x-x_0}{a_2}.$$

In diesem absoluten Probleme erhalten wir also als Grenzgleichung:

$$x - \frac{z+\lambda_1}{z'} = x_0 - \frac{z_0+\lambda_1}{z_0'}$$

d. h. wenn wir auf derjenigen Kettenlinie, welche die Aufgabe löst, von dem gegebenen Anfangspunkte aus fortschreiten, so dürfen wir, damit ein wirkliches Minimum stattfinde, hier das Integral nicht bis zu demjenigen Punkte ausdehnen, dessen Tangente die in der Verticalebene der beiden gegebenen Endpunkte gezogene Gerade $z = -\lambda_1$ wieder in demselben Punkte schneidet, wie die Tangente des Anfangspunktes. Wo wir also in dem isoperimetrischen Probleme (1) ein unbegrenztes Minimum erhalten, erhalten wir in dem unbedingten Probleme (8) nur ein begrenztes Minimum, was den Unterschied zwischen diesen beiden, dieselbe Lösung besitzenden Problemen klar hervortreten lässt.

Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen.

Zweite Abhandlung.

Von A. V. Bäcklund in Lund.

Die partiellen Differentialgleichungen mit intermediären Integralen, die in dieser Abhandlung zur Sprache kommen werden, sind diejenigen, die vollständige erste Integrale der Form besitzen:

$$\text{eine arbiträre Function von } (u_1, u_2, \cdots u_n) = 0,$$

wo $u_1, u_2, \cdots u_n$ determinirte Functionen von $z, x_1, x_2, \cdots x_n$ und den Differentialquotienten 1., 2., $\cdots$ Ordnung von z in Bezug auf $x_1, x_2, \cdots x_n$ bedeuten. Es ist das gegenseitige Verhalten der Integrale verschiedener Classen, — das sind solcher Integrale, die nicht in einem und demselben vollständigen ersten Integrale einbegriffen, aber doch Integrale derselben partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung sind, — es ist dieses gegenseitige Verhalten, das hier dargelegt werden soll. Unter den von den genannten Integralen gebildeten Systemen zeichnen sich im Falle $n = 2$ diejenigen besonders aus, in denen eine partielle Differentialgleichung der 2. Ordnung enthalten ist, weil nämlich ein jedes solches System, vermittelst bekannter Theorien gewöhnlicher Differentialgleichungen, Schaaren von Integralflächen der bezüglichen Gleichung 2. O. ergiebt. Im zweiten Abschnitte dieser Abhandlung werde ich versuchen, dies näher zu entwickeln. Es wird, — das ist wohl zu bemerken, — keine neue Theorie der partiellen Differentialgleichungen 2. O. hiermit geliefert, aber man bekommt ganz die von Darboux, durch andere Betrachtungen erhaltene, in Comptes rendus t. LXX auseinandergesetzte Integrationstheorie partieller Differentialgleichungen 2. O., und daneben eine Ausdehnung dieser Theorie auf Gleichungen höherer Ordnung.

Zu besonderen Arten solcher Gleichungssysteme wird man auch bei einer Discussion der von mir in der vorangehenden Abhandlung erörterten mehrdeutigen Flächentransformationen geführt. Ich werde nun zuerst diese Discussion anstellen.

I.

In der früher unter demselben Titel im XI. Bande dieser Annalen erschienenen Abhandlung habe ich ausführlich die Frage discutirt, in welcher Weise durch eine Flächentransformation, die durch folgende Gleichungen begründet ist:

$$
\begin{aligned}
&f_1\,(z x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n\, Z X_1 \cdots X_n) = 0\,,\\
&f_2\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0\,,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&f_k\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0\,,\\
&\qquad\qquad (k < n + 2)\,,
\end{aligned}
$$

die Figuren des Raumes (ZX) in Figuren des anderen Raumes, (zx), verwandelt werden. Wie dagegen die Figuren des letzteren Raumes jener Transformation gegenüber sich verhalten, wie sie sich in Figuren in (ZX) verwandeln, ist am erwähnten Orte nur beiläufig, an einem Beispiele (Nr. 6. daselbst), erläutert worden. Ich nehme jetzt diese Frage wieder auf. Ich zeige, dass, wenn $n = 2$, die partiellen Differentialgleichungen 1. O. des (zx) zu Configuration in (ZX) führen, die sehr verwandt sind mit denjenigen, die in (zx) als Transformationen von involutorischen Paaren von partiellen Differentialgleichungen 1. O. in (ZX) entstehen. Die beiden Arten von Configurationen unterscheiden sich wesentlich dadurch, dass die letzteren stets aus partiellen Differentialgleichungen 1. O. zusammengesetzt sind, während jene im Allgemeinen keine solche Bestandtheile haben.

Des leichteren Verständnisses wegen wird hier die bezügliche Theorie ausführlich für den Fall $n = 2$ dargelegt.

§ 1.

Von Flächentransformationen des Raumes von drei Dimensionen.

1. Eine Flächentransformation, die durch eine Gleichung:

$$F(zxypqXYZ) = 0 \tag{a}$$

bestimmt ist, soll ein beliebiges Flächenelement des Raumes (xyz) in eine Fläche und, auf Grund der Gleichungen:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} + r\frac{\partial F}{\partial p} + s\frac{\partial F}{\partial q} = 0\,,\\
&\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} + s\frac{\partial F}{\partial p} + t\frac{\partial F}{\partial q} = 0\,;
\end{aligned}
\right. \tag{b}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial X} + P\frac{\partial F}{\partial Z} = 0\,,\\
&\frac{\partial F}{\partial Y} + Q\frac{\partial F}{\partial Z} = 0\,,
\end{aligned}
\right. \tag{c}
$$

ein beliebiges Element $(zxypqrst)$, — das als eine unendlich kleine Flächencalotte zu denken ist, — in ein Flächenelement des Raumes (XYZ) überführen. — In Folge hiervon muss zunächst einem jeden Streifen des Raumes (xyz) eine einfach unendliche Flächenschaar, und, wenn er als Ort für einfach unendlich viele Büschel von Elementen $(zxypqrst)$*) betrachtet wird, eine bestimmte Fläche, die Umhüllungsfläche der genannten Schaar, entsprechen. Fasst man r, s, t als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_3' auf, so hat man einen jeden der Büschel von $(zxypqrst)$: $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, die den verschiedenen Elementen $(zxypq)$ des Streifens zugeordnet werden, als eine Gerade des Complexes:

(A) $$\varrho\tau - \sigma^2 = 0 \text{**)}$$

zu interpretiren, und man kann dann das eben Bemerkte so aussprechen:

Einer jeden, einem Büschel von $(zxypqrst)$ entsprechenden Geraden des Complexes (A) entspricht ein Streifen im Raume (XYZ); zwei Complexgeraden, die in R_3' zwei consecutive Elemente $(zxypq)$ eines beliebigen Streifens vertreten, entsprechen zwei Streifen des Raumes (XYZ), die auf einer und derselben Fläche liegen***). — Die Geraden der durch die Transformation (a) bestimmten Congruenz des Complexes (A)†) bilden hierbei eine Ausnahme, indem einer jeden derartigen Geraden nur ein Flächenelement $(ZXYPQ)$, nicht ein ganzer Streifen entspricht.

2. Ein System dreier partieller Differentialgleichungen 1. O. in (xyz), das kein Involutionssystem ist, besitzt eine ganz bestimmte Schaar von einfach unendlich vielen Streifen als Integrale. Also muss das Bild in (XYZ) eines derartigen im Raume (xyz) gelegenen Systemes aus ∞^1 Schaaren von je ∞^1 Integralflächen, insbesondere aus den Umhüllungsflächen der Schaaren als einer Art singulärer Integrale,

---

*) Unter „Büschel von Elementen $(zxypqrst)$" verstehe ich irgend eine einfache Reihe von Werthen von (rst), die zwei Gleichungen der Form:

$$r = ms + \mu, \quad s = mt + \nu,$$

wo m, μ, ν Functionen von z, x, y, p, q darstellen, befriedigt.

**) $\varrho, \sigma, \tau, \cdots$ bedeuten homogene Liniencoordinaten, nämlich die Coordinaten der Geraden im Raume R_3':

$$\tau x = \varrho z + \alpha,$$
$$\tau y = \sigma z + \beta.$$

***) Im Folgenden werde ich von derartigen Streifen sagen, dass sie *vereinigt* liegen.

†) Betreffend den Sinn dieser Ausdrucksweise verweise ich auf Nr. 20. meiner ersten Abhandlung.

bestehen. Der analytische Ausdruck des fraglichen Bildes wird folgendermassen erhalten.

Seien

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_1(zxypq) = 0\,, \\ \varphi_2(\qquad) = 0\,, \\ \varphi_3(\qquad) = 0 \end{cases}$$

die drei Gleichungen des Systemes; aus ihnen und den drei Gleichungen (a), (c) werden z, x, y, p, q eliminirt; *die resultirende Gleichung*

$$\Phi(ZXYPQ) = 0$$

hat die genannten einfach unendlich vielen Integralschaaren als ein vollständiges Integral.

Hiermit verbinden wir noch diejenige Gleichung, die durch Elimination von r, s, t aus den Gleichungen (b) und den Gleichungen der Integralstreifen des Systems:

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + r\frac{\partial\varphi_1}{\partial p} + s\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + s\frac{\partial\varphi}{\partial p} + t\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\right)dy = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \cdots\cdots\cdots\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \cdots\cdots\cdots\right)dy = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \cdots\cdots\cdots\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \cdots\cdots\cdots\right)dy = 0$$

nach Elimination von dx, dy hervorgeht. Sie giebt zu einer neuen partiellen Differentialgleichung 1. O.:

$$\Psi(ZXYPQ) = 0$$

Anlass, *die mit* $\Phi = 0$ *involutorisch liegt, und deren mit dieser Gleichung gemeinsame Integralflächen die oben erwähnten* ∞^1 *singulären Integrale des Bildes des gegebenen Systems* (1) *sind.*

Wenn unser System ein Involutionssystem ist, wird dasselbe im Raume (XYZ) durch ∞^2 Flächen vertreten, die eine Umhüllungsfläche, entsprechend der Integralfläche des Systems, besitzen. Diese wird eine singuläre Integralfläche von $\Phi = 0$ ausmachen.

Das System (1) kann in speciellen Fällen zu der vorgelegten Transformation (a) eine specielle Beziehung besitzen, so dass die angegebenen Eliminationen zu mehreren Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $\cdots$ führen. Wenn z. B. die Integralstreifen des Systems aus solchen Büscheln von Elementen $(zxypqrst)$, die in R_3' als Gerade der von der Flächentransformation bestimmten Congruenz (siehe die vorang. Note) zu deuten sind, bestehen, so ergeben sich als Bild des vorliegenden Systemes in (XYZ) drei partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung.

3. Ein System zweier partieller Differentialgleichungen 1. O.:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_1(zxypq) = 0\,, \\ \varphi_2(\qquad) = 0\,, \end{cases}$$

für welche keine gemeinsame Integralflächen existiren, wird zunächst in ein System von dreifach unendlich vielen Flächen in (XYZ) verwandelt. Den Integralstreifen des Systems entsprechen Umhüllungsflächen gewisser Schaaren von je ∞^1 dieser Flächen, und der analytische Ausdruck derselben ist, durch Adjunction einer arbiträren partiellen Differentialgleichung 1. O. in (xyz), nach den Vorschriften der vorigen Nummer zu gewinnen.

4. Fasst man die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(3) \qquad \varphi(zxypq) = 0$$

als Inbegriff von ∞^4 Büscheln von $(zxypqrst)$ auf, denkt sich also die Gleichung stets mit ihren Derivirten: $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, verbunden, so hat man nach dem anfangs Erörterten, um die ihr entsprechende Figur in (XYZ) entwerfen zu können, einen jeden der Büschel als einen Streifen im Raume (XYZ) abzubilden. — Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung 1. O. haben bekanntlich folgende Beschaffenheit: sie gehören unendlich vielen Integralflächen an; ein jedes der partiellen Differentialgleichung zugehörende Element $(zxypqrst)$ giebt für jedes der Flächenelemente $(zxypq)$ der zugehörenden Charakteristik ein ganz bestimmtes Werthsystem von (rst), indem alle Integralflächen, die sich in einem Punkte osculiren, dies nach einer ganzen Curve, welche einer Charakteristik angehört, thun. Einer jeden Charakteristik von $\varphi = 0$ muss folglich eine Fläche in (XYZ) entsprechen, welche zwei Schaaren von Streifen enthält: die Streifen der einen Schaar sind Bilder der zu den Flächenelementen der Charakteristik, durch die partielle Differentialgleichung 1. O., zugeordneten, schon erwähnten Büschel von (rst), die der anderen Schaar die Bilder der ∞^1 Reihen von Werthsystemen von $(zxypqrst)$, in die, nach dem eben Erinnerten, die charakteristischen Streifen von $\varphi = 0$ sich spalten. — Die Streifen der letzten Schaar werde ich für den Augenblick mit S bezeichnen, *und habe dann zunächst als Repräsentant der Gleichung* (3) *in* (XYZ) *dreifach unendlich viele, den Charakteristiken entsprechende Flächen mit ihren Schaaren von je* ∞^1 *Streifen* S.

Entsprechend dem Satze, dass zwei unendlich benachbarte Charakteristiken von (3), die von irgend zwei vereinigt liegenden Flächenelementen ausgehen, ihrer ganzen Ausdehnung nach vereinigt, d. i. auf einer Fläche, liegen, *müssen je zwei Streifen* S, *die bestimmt sind durch zwei vereinigt liegende Flächenelemente* $(ZXYPQ)$,

$$(Z + dZ \cdots Q + dQ), \text{---}$$

wo

$$dZ = PdX + QdY,$$
$$dP = RdX + SdY,$$
$$dQ = SdX + TdY$$

und unter R, S, T irgend eines der zu dem ersten Flächenelemente durch den zugehörigen Streifen S zugeordneten Werthsysteme von (RST) verstanden wird, — *selbst mit einander vereinigt liegen.*

Demzufolge werden die Streifen S zu unbegrenzt unendlich vielen Flächen sich zusammenfügen lassen*). *Die so entstandenen Flächen sind als gemeinsame Integrale zweier Gleichungen 2. O., die eben die Streifen S als gemeinsame Charakteristiken haben, aufzufassen. Dieses Gleichungspaar ist in dem Sinne das Bild der vorgelegten Gleichung* (3), *als die Integralflächen desselben die Bilder der Integralflächen von* (3) *sind.*

Ich habe früher, in der ersten Abhandlung, erwähnt, wie man den analytischen Ausdruck des fraglichen Bildes herzuleiten hat, und dabei bemerkt, dass dasselbe durch zwei partielle Differentialgleichungen 2. O. in (XYZ) definirt ist. Aus dem jetzt Entwickelten lässt sich erschliessen, dass diese zwei Gleichungen 2. O. derjenigen Gattung von Gleichungen zugehören, die, wenn die frühere Interpretation von R, S, T als Punktcoordinaten beibehalten wird, Linienflächen des Complexes (A) darstellen, dass es Linienflächen mit einer gemeinsamen Erzeugenden sind, und dass schliesslich, diesen gemeinsamen Erzeugenden entsprechend, die Gleichungen eine gemeinsame Charakteristikenschaar und unbegrenzt unendlich viele gemeinsame Integralflächen besitzen**).

5. Betrachten wir ein System zweier partieller Differentialgleichungen 2. O.:

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1(zxypqrst) = 0, \\ f_2(\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

deren gemeinsame Elemente zu unbegrenzt unendlich vielen Integralflächen (d. h. solchen mit einer arbiträren Function) sich zusammensetzen, und suchen wir sein Bild in (XYZ) darzustellen. Zu den Gleichungen (b), (c) haben wir noch diejenigen hinzuzufügen, die

---

*) Der Zusammenfügungsprocess würde in sich zurückkehren können, ehe alle ∞^5 Flächenelemente durchlaufen sind. Es ist nämlich möglich, dass man, bei Bildung von vereinigt liegenden Streifen, von einem bestimmten Streifen S aus nur zu ∞^4 Flächenelementen kommt, in welchem Falle eine partielle Differentialgleichung 1. O. als Integral des gleich nachher zu erwähnenden Gleichungspaares auftritt.

**) Zwei Gleichungen 2. O. mit ∞^1 gemeinsamen Integralen bilden ein specielles Gleichungssystem dieser Art.

R, S, T in den dritten Differentialquotienten von z: u, v, w, ϖ ausdrücken. Indem die Gleichungen (a), (b), (c) nach X, Y, Z, P, Q aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} X &= F_1\,(zxypqrst)\,, \\ Y &= F_2\,(\qquad)\,, \\ Z &= F\,(\qquad)\,, \\ P &= \Phi_1\,(\qquad)\,, \\ Q &= \Phi_2\,(\qquad)\,, \end{aligned}$$

erhalten wir jene Ausdrücke durch vollständige Differentiation in Bezug auf x, y der Gleichungen:

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} \Phi_1 - RF_1 - SF_2 = \text{Const.}, \\ \Phi_2 - SF_1 - TF_2 = \text{Const.}, \text{ —} \end{cases}$$

[R, S, T als Constanten betrachtet].

Einem jeden $(zxypqrst)$ entspricht ein bestimmtes Flächenelement $(ZXYPQ)$, und einem jeden diesem Elemente zugehörigen Werthsysteme von (RST) entsprechen einfach unendlich viele dem ersten Elemente $(zxypqrst)$ zugehörige Werthsysteme von $(uvw\varpi)$*), deren Schaar repräsentirt ist durch Gleichungen der Form:

$$(5) \qquad \begin{cases} u + \lambda v = \varkappa_1\,, \\ v + \lambda w = \varkappa_2\,, \\ w + \lambda\varpi = \varkappa_3\,, \end{cases}$$

(λ, $\varkappa$ determinirte Functionen von z, x, y, p, q, R, S, T bezeichnend, doch λ unabhängig von R, S, T). Nun wird durch die Gleichungen (4), da gemeinsame Integralflächen mit arbiträrer Function existiren sollen, zu jedem ihrer gemeinsamen Elemente $(zxypqrst)$ eine einfache Reihe von Werthsystemen von $(uvw\varpi)$ zugeordnet, die bestimmt ist durch drei Gleichungen der Form:

$$(6) \qquad \begin{cases} u + \mu v = \varrho_1\,, \\ v + \mu w = \varrho_2\,, \\ w + \mu\varpi = \varrho_3\,, \end{cases}$$

und der also eine einfache Schaar von Werthen von (RST) entsprechen muss, nämlich die durch die folgenden Gleichungen dargestellte Schaar:

$$(7) \qquad \begin{cases} \varkappa_1 - \varrho_1 - \lambda\varrho_2 + \mu\varkappa_2 = 0\,, \\ \varkappa_2 - \varrho_2 - \lambda\varrho_3 + \mu\varkappa_3 = 0\,, \end{cases}$$

---

*) Was davon herrührt, dass die beiden Gleichungen (d) ein erstes Integral mit einer willkürlichen Constanten gemeinsam besitzen. Dies Letztere ist eine unmittelbare Folge des Satzes der 15. Nummer meiner ersten Abhandlung.

die auch, wenn für x ihre Ausdrücke in R, S, T benutzt werden, folgendermassen auszudrücken ist:

$$(8)\qquad \begin{cases} R + vS = \varpi_1\,, \\ S + vT = \varpi_2\,, \end{cases}$$

v, ϖ_1, ϖ_2 Functionen von z, x, y, p, q, r, s, t.

Weiterhin, weil ein jedes Flächenelement $(ZXYPQ)$ einmal das Bild von zweifach unendlich vielen Elementen $(zxypq)$, und sodann das Bild von einfach unendlich vielen dem Gleichungssysteme (4) zugehörigen Elementen $(zxypqrst)$ ist, so muss die diesem Gleichungssysteme entsprechende Figur in (XYZ) einem jeden $(ZXYPQ)$ eine einfach unendliche Schaar von Geraden (8), — sofern man R, S, T als Punktcoordinaten interpretirt, — zuordnen. Ich ziehe die Fläche, die von der Linienschaar gebildet ist, einzeln in Betracht. Ich sage also: zu jedem Flächenelemente $(ZXYPQ)$ kommt eine Linienfläche als Ort der dem Bilde von (4) zugehörigen Werthe von (RST); oder, *die dem vorgelegten Gleichungssysteme* (4) *entsprechende Figur in* (XYZ) *wird zunächst durch eine partielle Differentialgleichung 2. O. ausgedrückt.*

Noch mehr, das Gleichungssystem (4) ordnet jedem seiner $(zxypqrst)$ einen bestimmten, durch die Gleichungen (6) gegebenen, charakteristischen Streifen zu, so dass im Ganzen ∞^5 charakteristische Streifen herauskommen. Dementsprechend sind für die eben erwähnte Gleichung 2. O. in (XYZ) ∞^5 Contactscharakteristiken auszuzeichnen. Und ebenso wie sich in einer bestimmten Weise die charakteristischen Streifen des Gleichungssystems (4) zu unbegrenzt unendlich vielen Flächen zusammenordnen, so müssen die entsprechenden Charakteristiken des Bildes in (XYZ) zu unbegrenzt unendlich vielen Flächen zusammengefügt werden können. Es stellt sich daher, wie aus einer späteren Entwickelung, am Ende der 18. Nummer, vollkommen deutlich zu ersehen ist, die genannte Charakteristikenschaar als eine für die schon beschriebene Gleichung 2. O. und eine Gleichung 3. O. gemeinsame Integralschaar dar. *Das von diesen zwei Gleichungen von bez. der 2. und der 3. Ordnung gebildete System wird das exacte Bild in* (XYZ) *des Gleichungssystemes* (4), *indem seine Integralflächen die Bilder der Integralflächen von* (4) *sind.*

6. Anstatt von der durch die einzige Gleichung (a) bestimmten Flächentransformation auszugehen, würde man eine durch zwei oder durch drei Gleichungen zu bestimmende anwenden können, und die obigen Schlussresultate auch für diese Fälle im Wesentlichen unverändert behalten. Nur das könnte vielleicht verdienen besonders bemerkt zu werden, dass, wenn die Flächentransformation von der Form ist:

$$X = F_1(zxypq)\,,$$
$$Y = F_2(\qquad)\,,$$
$$Z = F\,(\qquad)\,,$$

das System der zwei partiellen Differentialgleichungen 2. O. in (XYZ), das einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung 1. O. in (xyz) entspricht, ein System von dreifach unendlich vielen Curven, deren jede mit ∞^1 an dieselbe sich anschliessenden Streifen gedacht werden muss, als vollständiges Integral besitzt. Diese Curven mit ihren Streifenschaaren machen jetzt die Bilder in (XYZ) der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung 1. O. in (xyz) aus.

§ 2.

Erweiterung auf den Raum von $n+1$ Dimensionen.

7. Ich betrachte eine partielle Differentialgleichung 1. O.:

$$\varphi(zx_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = 0\,, \tag{9}$$

und suche das Bild in (ZX), welches von derselben durch die Transformation:

$$f(zx_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n\, ZX_1 \cdots X_n) = 0 \tag{10}$$

entworfen wird, zu ermitteln. —

Einem jeden Flächenelemente (zxp) entspricht eine Fläche in (ZX), einem jeden Werthsysteme $(zx_ip_ip_{ik})$ ein Flächenelement (ZXP), dagegen ist ein Flächenelement (ZXP) das Bild von ∞^n Flächenelementen (zxp), deren jedes mit einem Büschel von (p_{ik}) versehen ist. Und einem jeden Büschel von $(zx_ip_ip_{ik})$, folgender Art:

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_1 + m_1 p_{11} + m_2 p_{12} + \cdots + m_n p_{1n} = 0\,, \\ \mu_2 + m_1 p_{21} + m_2 p_{22} + \cdots + m_n p_{2n} = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_n + m_1 p_{n1} + m_2 p_{n2} + \cdots + m_n p_{nn} = 0\,, \\ \qquad\qquad (p_{kl} = p_{lk})\,, \end{array}\right. \tag{11}$$

muss eine $n-1$-fache Schaar von (ZXP), und zwar von vereinigt liegenden (ZXP) *), entsprechen. Wenn symbolisch gesetzt wird:

$$\mu_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial\psi}{\partial z}\,, \qquad m_i = \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\,,$$

so hat man folgende Gleichungen zur Bestimmung der $n-1$-fachen Punktmannigfaltigkeit in (ZX), an die die Flächenelemente jener Schaar, jener M_{n-1}, sich anschliessen:

---

*) Die $n-1$-fache Schaar muss nämlich auf der Fläche (M_n) liegen, die dem Elemente (zxp) entspricht. Vgl. das Nächstfolgende.

$$(10)\qquad f(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n Z X_1 \cdots X_n) = 0,$$

$$(12)\qquad [f\psi] = 0, —$$

wo die letzte Gleichung symbolisch ist und das Involutionszeichen die Grössen z, x, p betrifft. (Einem jeden (ZXP) dieser M_{n-1} entspricht eine, dem vorigen Flächenelemente (zxp) zugehörige, durch $2n-1$ Gleichungen ausgedrückte, in der Schaar (11) enthaltene Schaar von p_{ik}.)

Demzufolge werden die Charakteristiken von (9) in M_n sich verwandeln, jede von einfach unendlich vielen M_{n-1} erzeugt, entsprechend den verschiedenen, den ∞^1 Elementen (zxp) der Charakteristik zugehörenden Büscheln (11) von p_{ik}, anderseits auch jede M_n von $\infty^{\varkappa-n} M_1$*) erzeugt, entsprechend den verschiedenen Reihen von ∞^1 Werthsystemen von $(z x_i p_i p_{ik})$, die der Charakteristik und einer Integralfläche von (9) (sodann auch unbegrenzt vielen Integralflächen von (9)) zu derselben Zeit zugehören. Als Bild von (9) entsteht in dieser Weise in (ZX) eine Figur, die aus $\infty^{\varkappa+n-1}$ Streifen M_1 besteht, die mit einander selbst in folgender Weise verbunden sind.

Wir wissen, dass je zwei Charakteristiken von (9), die durch zwei vereinigt liegende Flächenelemente (zxp) bestimmt sind, selbst vereinigt, d. h. auf einer M_2, liegen, und dass dann auch zwei ihnen in (ZX) entsprechende M_1, — die bestimmt sind durch die Werthsysteme von $(z x_i p_i p_{ik})$, die den zwei Charakteristiken nebst einer durch sie hindurchgehenden Integralfläche von (9) angehören, — mit einander vereinigt liegen müssen.

Ein beliebiges Flächenelement (ZXP), — das das Bild gewisser der Gleichung (9) zugehörenden Werthsysteme von $(z x_i p_i p_{ik})$ ist, deren ∞^{n-2} Flächenelemente (zxp) bestimmt sind durch die $n+3$ Gleichungen: (9), (10),

$$(13)\qquad \frac{\partial f}{\partial X_1} + P_1 \frac{\partial f}{\partial Z} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial X_n} + P_n \frac{\partial f}{\partial Z} = 0, \quad [f\varphi] = 0, —$$

gehört $\infty^{\varkappa-n-1}$ Streifen M_1 zu, die den von den genannten Elementen $(z x_i p_i p_{ik})$ bestimmten Charakteristiken von (9) entsprechen. Zu einer jeden der fraglichen M_1 construirt man vereinigt liegende M_1 derselben Art, indem man zu derjenigen Charakteristik von (9), die im Raume (ZX) die gegebene M_1 zum Bilde hat, die vereinigt liegenden Charakteristiken bestimmt. Oder, ausgehend von irgend einer M_1 und von irgend einem Elemente $(Z X_i P_i P^{ik})$ derselben, wird man für ein jedes vereinigt liegendes Element $(Z + dZ \cdots P + dP)$:

*) Mannigfaltigkeiten einer Dimension, $\varkappa = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$dZ = P_1\,dX_1 + \cdots + P_n\,dX_n\,,$$
$$dP_i = P_{i1}\,dX_1 + \cdots + P_{in}\,dX_n\,,$$
$$(i = 1, 2, \cdots n),$$

eine M_1 finden können, die mit der gegebenen M_1 vereinigt liegt, so dass die eben beschriebenen Streifen M_1 zu unbegrenzt unendlich vielen Flächen sich zusammenordnen. Sie sind als Integralflächen eines Gleichungssystems darzustellen, von dem die $\infty^{2n-1} M_n$, die den Charakteristiken von (9) entsprechen, eine Lösung ergeben. — Im Falle $n = 3$ wird die der Gleichung 1. O. in (zx) entsprechende Figur in (ZX) durch ihre Elemente $(ZX_i P_i P_{ik})$ alle Elemente einer Gleichung 2. O., die durch die in der 6. Nummer meiner ersten Abhandlung angegebene Rechnung zu gewinnen ist, erfüllen.

8. Ist statt *einer* partiellen Gleichung 1. O. ein *System* partieller Gleichungen 1. O. vorgelegt:

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi_1\,(z x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = 0\,, \\ \varphi_2\,(\qquad\qquad\qquad) = 0\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_m(\qquad\qquad\qquad) = 0\,, \end{cases}$$

und handelt es sich um die Darstellung seines Bildes in (ZX), so hat man sich in erster Hand von der durch die Transformation (10) bewirkten Umformung einer beliebigen $M_{n-\nu}$:

$$(15)\qquad \begin{cases} z = \psi\;(x_{\nu+1} \cdots x_n)\,, \\ x_1 = \psi_1\,(\qquad\qquad)\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_\nu = \psi_\nu\,(\qquad\qquad)\,, \\ p_1 = \chi_1\,(\qquad\qquad)\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_n = \chi_n\,(\qquad\qquad)\,, \text{ —} \end{cases}$$

wo die $n - \nu$ letzten der Functionen χ von den Functionen ψ und den übrigen χ folgendermassen abhängen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu+1}} - \chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{\nu+1}} - \cdots - \chi_\nu \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_{\nu+1}} = \chi_{\nu+1}\,,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x_n} - \chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} - \cdots - \chi_\nu \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_n} = \chi_n\,, \text{ —}$$

Rechnung zu geben. Ich bemerke erstens, dass diese Mannigfaltigkeit jedem ihrer Flächenelemente folgendermassen eine Schaar von p_{ik} zuordnet.

Man hat die Gleichungen:

$$dp_i = p_{i1}\,dx_1 + p_{i2}\,dx_2 + \cdots + p_{in}\,dx_n\,,$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)\,,$$

die für die fragliche Schaar gelten, wenn dp, dx aus den Gleichungen (15) berechnet werden. Es spalten sich diese Gleichungen in die folgenden $n-\nu$ Reihen von je n Gleichungen:

$$(16^1)\quad\begin{cases} p_{11}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_{\nu+1}} + p_{12}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_{\nu+1}} + \cdots + p_{1\nu}\dfrac{\partial\psi_\nu}{\partial x_{\nu+1}} + p_{1\nu+1} = \dfrac{\partial\chi_1}{\partial x_{\nu+1}}\,, \\ p_{21}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_{\nu+1}} + p_{22}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_{\nu+1}} + \cdots + p_{2\nu}\dfrac{\partial\psi_\nu}{\partial x_{\nu+1}} + p_{2\nu+1} = \dfrac{\partial\chi_2}{\partial x_{\nu+1}}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_{\nu+1}} + p_{n2}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_{\nu+1}} + \cdots + p_{n\nu}\dfrac{\partial\psi_\nu}{\partial x_{\nu+1}} + p_{n\nu+1} = \dfrac{\partial\chi_n}{\partial x_{\nu+1}}\,; \end{cases}$$

$$(16^{n-\nu})\quad\begin{cases} p_{11}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} + p_{12}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_n} + \cdots + p_{1\nu}\dfrac{\partial\psi_\nu}{\partial x_n} + p_{1n} = \dfrac{\partial\chi_1}{\partial x_n}\,, \\ p_{21}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} + p_{22}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_n} + \cdots + p_{2\nu}\dfrac{\partial\psi_\nu}{\partial x_n} + p_{2n} = \dfrac{\partial\chi_2}{\partial x_n}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} + p_{n2}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_n} + \cdots + p_{n\nu}\dfrac{\partial\psi_\nu}{\partial x_n} + p_{nn} = \dfrac{\partial\chi_n}{\partial x_n}\,; \; - \end{cases}$$

die sämmmtlich Reihen von der Form (11) sind*).

Demzufolge muss derjenigen Schaar von Werthsystemen von p_{ik}, die die Mannigfaltigkeit (15) irgend einem ihrer Flächenelemente (zxp) zuordnet, eine Figur im Raume (ZX) entsprechen, die durch die folgenden $2n-\nu+1$ Gleichungen definirt ist:

$$(10)\qquad f(zx_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n\, ZX_1 \cdots X_n) = 0\,,$$

$$(17)\qquad \frac{\partial f}{\partial X_1} + P_1\frac{\partial f}{\partial Z} = 0\,, \cdots \frac{\partial f}{\partial X_n} + P_n\frac{\partial f}{\partial Z} = 0\,,$$
$$[f\varrho_1] = 0,\quad [f\varrho_2] = 0, \cdots [f\varrho_{n-\nu}] = 0,$$

wo die letzteren symbolisch, von derselben Bedeutung hinsichtlich der hier in Frage kommenden Schaaren von p_{ik} sind, wie die Gleichung (12) hinsichtlich der Schaar (11).

Also wird derjenigen Schaar von Werthen der p_{ik}, die durch (16^1), $\cdots$ $(16^{n-\nu})$ irgend einem Elemente (zxp) zugeordnet ist, eine

---

*) *Diese* $(n-\nu)n$ *Gleichungen sind, wegen des zwischen* ψ, χ *geltenden Zusammenhangs, nur für* $\dfrac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{2}$ *von einander unabhängige Gleichungen zu rechnen.*

gewisse M_ν im Raume (ZX), also der Mannigfaltigkeit (15) eine von $\infty^{n-\nu} M_\nu$ zusammengesetzte M_n entsprechen. Letztere ist übrigens als Umhüllungsgebilde der den Flächenelementen (15) entsprechenden Flächen (10) zu betrachten.

Jetzt kann die oben für das Gleichungssystem (14) gestellte Aufgabe ohne Schwierigkeit erledigt werden. Man betrachte die Charakteristiken des Systems*) als Erzeugende aller Integrale des Systems, und stelle dann die Bilder der Charakteristiken im Raume (ZX) auf. Diese Bilder werden, nach dem eben Entwickelten, M_n sein, jede von $\infty^{m-2k} M_{n-m+2k}$ erzeugt, wenn sonst $n-k$ die Zahl der Dimensionen der Integralmannigfaltigkeiten grösstmöglicher Dimensionszahl und $m-2k$ die Dimensionszahl der Charakteristiken ist. Je zwei Charakteristiken C, C', die von zwei vereinigt liegenden Elementen (zxp), $(z+dz\cdots p+dp)$ bestimmt sind, liegen selbst mit einander vereinigt d. h. auf einer und derselben M_{m-2k+1}, und alle Integral-M_{n-k}, die ein Element $(zx_ip_ip_{ik})$ gemein haben, müssen also nach einer Charakteristik C eine Berührung der 2. O. besitzen. Die Charakteristik C muss demnach, als Inbegriff von Reihen von Elementen $(zx_ip_ip_{ik})$ auf, gefasst, eine Schaar von $\infty^{\varkappa-\varkappa'}$**) M_{m-2k}, die auf der vorhin erwähnten, der Charakteristik entsprechenden M_n verlaufen, im Raume (ZX) zum Bilde haben. Und jeder Integral-M_{n-k}, erzeugt von Charakteristiken C, entspricht eine Mannigfaltigkeit im Raume (ZX), die, nach dem Obigen, von n Dimensionen ist, und von jenen C entsprechenden M_{m-2k} erzeugt wird. In dieser Weise entsteht als Bild im Raume (ZX) des vorgelegten Systems partieller Gleichungen 1. O. (14) ein Gleichungssystem, für welches Integral-M_n stattfinden, und das von $\infty^{2n-2m+2k+1}$, den Charakteristiken von (14) entsprechenden, M_n gewissermassen bestimmt sein wird, für welches weiterhin, falls $n-m+k\geqq 1$, charakteristische Mannigfaltigkeiten, Berührungsmannigfaltigkeiten, von der Dimensionszahl $m-2k$ existiren.

Der Fall $m-2k=0$, der hierbei ausgeschlossen worden ist, wird durch Adjunction einer beliebigen Gleichung $f_{m+1}(zx_1\cdots x_n\, p_1\cdots p_n)=0$ auf den Fall $m-2k=1$ zurückgeführt.

9. Um das Verhalten der durch partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung in (zx) definirten Figuren gegenüber der Transformation (10) in solcher eingehenden Weise studiren zu können, müssen jene Figuren selbst in Betreff des Zusammenhangs ihrer Integrale sehr

*) Ueber den Begriff von „Charakteristiken eines beliebigen Systems partieller Gleichungen 1. O." siehe meine Abhandlung „Ueber Systeme partieller Differentialgleichungen 1. O." in diesen Annalen Bd. XI.

**) $\varkappa=\frac{n(n+1)}{2}$, $\varkappa'=\frac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{2}$, $\nu=n-m+2k$.

genau bekannt sein. Ebenso wachsen die Schwierigkeiten der Discussion von Fragen der obigen Art beträchtlich mit der Ordnungszahl der in den Transformationsgleichungen auftretenden partiellen Differentialquotienten von z; eine Flächentransformation:

$$f(z x_i p_i \cdots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} Z X_1 \cdots X_n) = 0$$

setzt, behufs einer derartigen Discussion, wie der oben für die Transformation (10) vorgetragenen, eine weit ausgebildetere Theorie der partiellen Gleichungen $m - 1$. Ordnung (im Raume (zx)) voraus, als sie gegenwärtig existirt.

II.

Die mehrdeutigen Flächentransformationen, von denen eben die Rede gewesen ist, habe ich besonders deshalb für interessant gehalten, weil sie über gewisse Gattungen partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung Aufschluss gegeben haben. In meiner ersten Abhandlung (in diesen Annalen Bd. XI, p. 199) habe ich eingehend darüber gesprochen und zugleich darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn eine partielle Differentialgleichung, neben einer Schaar erster Integrale, die sämmtliche Elemente der Gleichung erfüllen, noch ein erstes Integral anderer Art enthält, dieses mit einem jeden jener Integrale Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl*) gemein haben muss. (Nr. 8. der ersten Abhandlung.) Zwei solche erste Integrale bilden ein Gleichungspaar ganz besonderer Art. In dem Falle, dass die anfängliche partielle Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ist, also ihre ersten Integrale partielle Differentialgleichungen von der ersten Ordnung sind, ist jedes der bezüglichen Gleichungspaare ein Involutionspaar und die eine der Gleichungen des Paares eine ganz beliebige Gleichung 1. O.; aber wenn die anfängliche Gleichung von der dritten oder von höherer Ordnung ist, so ist jedes der bezüglichen Gleichungspaare ein Paar von Gleichungen der zweiten oder höherer Ordnung, deren jede ganz eigenthümlicher Natur ist, so dass sie eine specielle Gleichung der betreffenden Ordnungszahl bildet.

Auf besondere Gleichungssysteme dieser Art sind wir im Nächstvorangehenden eben durch die mehrdeutigen Flächentransformationen geführt worden; es sind dies diejenigen Systeme, die wir in Nr. 4., 5. als Bilder in (XYZ) von partiellen Differentialgleichungen 1. O. resp. von gewissen Systemen zweier partieller Differentialgleichungen 2. O.

---

*) Hierdurch ist der Zusammenhang der ersten Integrale keineswegs vollständig definirt. Ich behalte aber auch im Folgenden diesen Ausdruck „zur grösstmöglichen Zahl“ bei, um anzugeben, dass die gemeinsamen Integrale alle Elemente des bezüglichen Systems erfüllen.

in (xyz) erhalten haben. Ihr Charakter ist durch ihre oben beschriebene Erzeugungsweise vollständig angegeben. Aber daraus lässt sich Nichts über die allgemeineren Gleichungssysteme der fraglichen Art schliessen. Mit der Beschreibung dieser Systeme und mit der Entwickelung ihrer charakteristischen Eigenschaften werde ich mich hier beschäftigen.

Vornehmlich halte ich mich bei dem Falle eines Raumes von drei Dimensionen auf.

§ 3.

Von einigen partiellen Differentialgleichungen des Raumes von drei Dimensionen.

10. Die partielle Differentialgleichung 3. O., die ein vollständiges erstes Integral von der Form:

(18) eine arbiträre Function von $(f_1(zxypqrst), f_2(zxypqrst)) = 0$*)

besitzt, ist, wenn die dritten Differentialquotienten von z: u, v, w, ϖ als Punktcoordinaten eines R_4' gedeutet werden, als eine gewisse M_3 dieses Raumes zu betrachten, und zwar als eine solche, die durch eine Schaar von M_2 folgender Art:

$$(19)\qquad \begin{cases} u + mv + nw + \mu = 0, \\ v + mw + n\varpi + \nu = 0 \end{cases}$$

zu erzeugen ist**). Durch jedes der genannten ersten Integrale nämlich ist eine M_2 jener Form bestimmt; z. B. durch $f_1(zxypqrst) = C$ die folgende:

$$u\frac{\partial f_1}{\partial r} + v\frac{\partial f_1}{\partial s} + w\frac{\partial f_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + p\frac{\partial f_1}{\partial z} + r\frac{\partial f_1}{\partial p} + s\frac{\partial f_1}{\partial q}\right) = 0,$$

$$v\frac{\partial f_1}{\partial r} + w\frac{\partial f_1}{\partial s} + \varpi\frac{\partial f_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + q\frac{\partial f_1}{\partial z} + s\frac{\partial f_1}{\partial p} + t\frac{\partial f_1}{\partial q}\right) = 0;$$

und alle diese M_2 gehören einer M_3 an, die, wenn die Punktcoordinaten u, v, w, ϖ wieder als dritte Differentialquotienten von z aufgefasst werden, gerade die fragliche partielle Differentialgleichung 3. O. darstellt. Diese Gleichung lautet:

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} u + m^0 v + n^0 w + \mu^0 & u + m'v + n'w + \mu' \\ v + m^0 w + n^0\varpi + \nu^0 & v + m'w + n'\varpi + \nu' \end{vmatrix} = 0,$$

wenn der Kürze halber die Verhältnisse $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} : \frac{\partial f_1}{\partial r}\right)$ etc. der Differentialquotienten von f_1, f_2 durch m^0 etc. bezeichnet werden.

---

*) z ist die durch die Differentialgleichung definirte Function.

**) Vgl. hierzu die 47. Nummer meiner ersten Abhandlung.

Eine solche M_3 könnte, — was ich in der ersten Abhandlung bewiesen habe, — *eine zweite Schaar von Erzeugenden M_2* (19) *besitzen, und es könnte dann auch eintreffen, dass noch ein zweites vollständiges erstes Integral der Gleichung* 3. *O.* (20) *existirte.*

Eine jede M_2 (19), *die einem Integrale dieser zweiten Schaar entspricht, muss eine jede M_2, die einem Integrale der ersten Schaar entspricht, nach einer Mannigfaltigkeit einer Dimension schneiden*, weil sonst die von der zweiten Schaar erzeugte M_3 eine andere als die von der ersten Schaar erzeugte werden würde.

Andererseits *hat ein jedes Integral der zweiten Schaar mit einem jeden der ersten Schaar Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl gemein.* Denn nehmen wir beliebig einen Streifen von Flächenelementen (zxp) und ziehen eine durch denselben hindurchgehende Integralfläche eines beliebig genommenen Integrals der zweiten Schaar. Diese Fläche ordnet jedem Flächenelemente des Streifens ein gewisses Werthsystem von (rst) zu. Durch die so erhaltene einfach unendliche Reihe von Werthsystemen von $(zxypqrst)$ lässt sich ein völlig bestimmtes Integral der Schaar (18), und weiter, da die Elemente $(zxypqrst)$ jener Reihe zu je zwei vereinigt liegen*), eine Integralfläche dieses Integrales hindurchlegen. Nun kann zu einer vorgelegten einfach unendlichen Reihe von zu je zwei vereinigt liegenden Elementen $(zxypqrst)$ im Allgemeinen nur eine Integralfläche (oder einige Flächen) einer gegebenen partiellen Differentialgleichung 3. O. construirt werden, indem die Gleichung 3. O. zu einem jeden der Elemente der Reihe ein einziges Werthsystem oder einige Werthsysteme der dritten, vierten etc. Differentialquotienten von z bestimmt, die gerade der jene Reihe enthaltenden Integralfläche zukommen.**) Die zwei hier in Betracht gezogenen Integralflächen zweier erster Integrale von (20) müssen selbst Integralflächen dieser Gleichung 3. O. sein, und es müssen folglich, da es *nur eine solche* Fläche giebt, die jene oben besprochene Reihe von Elementen $(zxypqrst)$ enthält, die beiden Flächen mit einander identisch sein. Also werden die beiden, den verschiedenen Schaaren von ersten Integralen der Gleichung (20) zugehörenden Gleichungen 2. O. einer jeden, ihnen gemeinsam zugehörenden Reihe von ∞^1 zu je zwei vereinigt liegenden Elementen $(zxypqrst)$ eine gemeinsame Integralfläche zuordnen. Was eben zu beweisen war.

Diese Beziehung je zweier, den verschiedenen Schaaren zugehören-

*) Von zwei Werthsystemen $(zxypqrst)$, $(z+dz \cdots t+dt)$ sage ich, dass sie vereinigt liegen, wenn sie einer und derselben Fläche zugehören, d. i. wenn $dz = p dx + q dy$, $dp = r dx + s dy$, $dq = s dx + t dy$.

**) Ausgeschlossen bleibt offenbar der Fall, dass die gegebene Reihe eine für die Gleichung 3. O. charakteristische Reihe ist.

der Integrale zu einander ist auch eine nothwendige Folge des erst erwähnten Umstandes, dass ihre M_2 sich nach einer Mannigfaltigkeit einer Dimension schneiden. — Betrachten wir nämlich zwei partielle Differentialgleichungen $2 \cdot 0$:

$$(21) \qquad f(zxypqrst) = 0, \quad \varphi(zxypqrst) = 0$$

und ihre M_2:

$$(22) \qquad \begin{aligned} u + mv + nw + \mu &= 0, \quad u + m'v + n'w + \mu' = 0, \\ v + mw + n\varpi + \nu &= 0; \quad v + m'w + n'\varpi + \nu' = 0; \end{aligned}$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$(23) \quad m = \frac{\partial f}{\partial s} : \frac{\partial f}{\partial r}, \cdots \nu' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} + s\,\frac{\partial \varphi}{\partial p} + t\,\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) : \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

und nehmen wir an, dass diese M_2 nach einer M_1 sich schneiden. Die Bedingungen hierfür drücken sich durch die zwei Gleichungen aus:

$$(24) \qquad \begin{aligned} &(m - m')\,(mn' - m'n) + (n - n')^2 = 0, \\ &(m - m')\,(\nu n' - \nu' n) + (n - n')\,(\mu - \mu') = 0, \end{aligned}$$

von denen die erste aussagt, dass die beiden Gleichungen (21) jedem gemeinsamen Elemente $(zxypqrst)$ eine gemeinsame charakteristische Richtung zuordnen*). — Beiläufig erinnere ich an meine frühere Bemerkung (in der ersten Abhandlung), dass, wenn die Gleichung (20) ein anderes vollständiges erstes Integral als (18) zulässt, diese Integrale (18), etwa $f_1 = C$, $f_2 = C$, in einem solchen Zusammenhange stehen, dass von den charakteristischen Richtungen, die sie einem beliebigen Elemente $(zxypqrst)$ zuordnen, eine diesen Integralen gemeinsam ist. Dies ist eine einfache Consequenz des Vorangehenden; die fragliche Richtung ist nämlich zugleich eine charakteristische Richtung eines Integrals der zweiten Integralschaar der Gleichung (20). —

Die Schnittmannigfaltigkeit der beiden M_2 (22) wird nun durch folgende drei Gleichungen dargestellt:

$$(25) \qquad \begin{aligned} u + \lambda v &= \varkappa_1, \\ v + \lambda w &= \varkappa_2, \\ w + \lambda \varpi &= \varkappa_3, \end{aligned}$$

wo $\lambda = \frac{n - n'}{m - m'}$ die für die Gleichungen (21) gemeinsame charakteristische Richtung $\left(\frac{dy}{dx} = \lambda\right)$ angiebt und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Werthe haben:

$$\varkappa_1 = -\frac{n\mu' - n'\mu}{n - n'}, \quad \varkappa_2 = -\frac{\mu - \mu'}{m - m'}, \quad \varkappa_3 = -\frac{\nu - \nu'}{m - m'}.$$

---

*) Werden r, s, t als Punktcoordinaten eines R_3' interpretirt, so will dies sagen, dass immer die durch die beiden Gleichungen 2. O. einem beliebigen Werthsysteme $(zxypq)$ zugeordneten Flächen in R_3' nach einer Curve des Complexes: $\varrho\tau - \sigma^2 = 0$, sich schneiden.

Durch (25) sind folglich, unter den Voraussetzungen (24), die Werthe der den beiden Gleichungen (21) gemeinsamen Werthsysteme der dritten Differentialquotienten von z gegeben. Für diejenigen Werthe der vierten Differentialquotienten von z, die den beiden Gleichungen (21) gemeinsam sind, erhält man ein ähnliches Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \varepsilon + \lambda\varepsilon_1 &= \mu_1, \\ \varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 &= \mu_2, \\ \varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_3 &= \mu_3, \\ \varepsilon_3 + \lambda\varepsilon_4 &= \mu_4, \end{aligned}$$

wenn ε die fraglichen Differentialquotienten bedeuten, λ den obigen Werth hat, und die μ_i Functionen von $z, x, y, \cdots u, v, w, \varpi$ sind. Und ebenso erhält man für ein jedes dem Systeme (21) zugehörendes Werthsystem von ($zxypq$ 2[te], 3[te], 4[te] Differentialquotienten von z) einfach unendlich viele den beiden Gleichungen des Systems gemeinsam zugehörende Werthsysteme der fünften Differentialquotienten von z, die eine ähnliche Schaar bilden; u. s. w. — Denn im gegenwärtigen Falle ist eine der Gleichungen:

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

$\left(\text{wo } \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}\right.$ vollständige Differentiationen bezeichnen$\Big)$ eine algebraische Folge der anderen, so dass identisch ist:

$$\lambda_1 \frac{df}{dx} + \lambda_2 \frac{df}{dy} + \mu_1 \frac{d\varphi}{dx} + \mu_2 \frac{d\varphi}{dy} = 0. \tag{24'}$$

Von den Gleichungen für die vierten Differentialquotienten von z:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2f}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$$

müssen folglich, wie durch Differentiation von (24′) ersichtlich, *zwei* Gleichungen eine algebraische Folge der anderen sein. Und wegen derselben Identität (24′) müssen sich die Gleichungen für die fünften Differentialquotienten von z auf fünf von einander unabhängige Gleichungen reduciren, u. s. w.; — was in der That auf das eben Behauptete hinauskommt. —

Also: einem jeden den Gleichungen (21) gemeinsamen Elemente ($zxypqrst$) wird eine jenen Gleichungen gemeinsame charakteristische Richtung λ zugeordnet, sodann in Folge der Gleichungen (25) ein gewisses unendlich benachbartes Element ($z + dz \cdots t + dt$), für welches:

$$\begin{aligned} dy &= \lambda dx, & dz &= (p + q\lambda)dx, \\ dp &= (r + s\lambda)dx, & dq &= (s + t\lambda)\,dx, \\ dr &= \varkappa_1 dx, & ds &= \varkappa_2 dx, \quad dt = \varkappa_3 dx \end{aligned}$$

ist, so dass durch die fraglichen partiellen Differentialgleichungen 2. O. zu einem jeden gemeinsamen Elemente $(zxypqrst)$ eine gemeinsame charakteristische Reihe von Elementen $(zxypqrst)$ bestimmt wird. Von irgend einem, unserem Gleichungssysteme zugehörenden Elemente $(zxypqrstuvw\varpi)$ aus kommen wir zu einer für beide Gleichungen gemeinsamen, völlig bestimmten Reihe von $(zx \cdots w\varpi)$, die gegeben ist durch die eben hingeschriebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen, vereint mit diesen:

$$du = \mu_1 dx, \quad dv = \mu_2 dx, \quad dw = \mu_3 dx, \quad d\varpi = \mu_4 dx.$$

Und ebenso wird man, ausgehend von einem Elemente $(zx \cdots \varepsilon_4)$ eine ganz bestimmte charakteristische Reihe derartiger Elemente erhalten, u. s. w.

Betrachten wir eine charakteristische Reihe von Elementen $(zxypqrstuvw\varpi)$ unseres Systems; durch dieselbe gehen, weil sie für $f = 0$ wie für $\varphi = 0$ eine *charakteristische* Reihe bildet, unbegrenzt unendlich viele Integralflächen von $f = 0$, ebensowie unbegrenzt unendlich viele Integralflächen von $\varphi = 0$.*) Da nun diese Flächen längs der Curve, an die sich jene charakteristische Reihe anschliesst, eine Berührung der 3. O. mit einander eingehen, so haben sie nicht nur *eine* charakteristische Reihe von Elementen $(zxypqrst)$, sondern auch eine unendlich benachbarte Reihe von Elementen $(zxypqrst)$ gemein. Diese zweite Reihe ist, da sie sowohl unbegrenzt unendlich vielen Integralflächen von $f = 0$ als unbegrenzt unendlich vielen Integralflächen von $\varphi = 0$ gemeinsam ist, eine gemeinsame *charakteristische* Reihe jener Gleichungen 2. O. Daher schliesslich: *Irgend zwei Elemente des Gleichungssystems* (21), *die vereinigt liegen*,**) *bestimmen zwei diesen Gleichungen gemeinsame Charakteristiken*,***) *die ebenfalls vereinigt, d. i. auf einer Fläche liegen.*

Hieraus folgt dann noch der Satz: *Durch jede beliebige einfache Reihe von zu je zwei vereinigt liegenden, den beiden Gleichungen* (21) *gemeinsamen, Elementen* $(zxypqrst)$ *lässt sich eine Integralfläche der einen Gleichung legen, die dann auch eine Integralfläche der anderen Gleichung ist.*

Um auch das für die Erzeugung dieser Flächen Charakteristische

---

*) Für den Augenblick sehe ich von dem Umstande ab, dass in Wirklichkeit diese beiden Integralschaaren mit einander zusammenfallen.

**) Zwei Elemente $(zxypqrst)$, $(z + dz \cdots t + dt)$ des Gleichungssystemes liegen vereinigt, wenn $dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, $dr = udx + vdy$, $ds = vdx + wdy$, $dt = wdx + \varpi dy$ ist, wo u, v, w, ϖ *die Gleichungen* (25) *befriedigen.*

***) Eine charakteristische Reihe von Elementen $(zxypqrst)$ bezeichne ich kurz als Charakteristik.

anzugeben, füge ich hinzu: *Je zwei Integralflächen des Gleichungssystemes* (21), *die sich in einem Punkte osculiren, osculiren sich längs einer ganzen Curve.*

Von diesen Gleichungen 2. O. (21) ist nur das Stattfinden der Bedingungen (24) vorausgesetzt worden, — so dass wirklich, wie oben behauptet wurde, die für zwei, verschiedenen Schaaren zugehörende erste Integrale der Gleichung (20) ausgesprochene Eigenschaft, gemeinsame Integralflächen zu besitzen, eine nothwendige Consequenz ist der für ihre M_2 ausgesprochenen Eigenschaft, sich nach einer Mannigfaltigkeit einer Dimension zu schneiden.

11. Sei
$$f(zxypqrst) = C$$
eine Gleichung mit der willkürlichen Constanten C, die zu jeder der beiden Gleichungen:
$$\varphi_1(zxypqrst) = C, \quad \varphi_2(zxypqrst) = C$$
in der oben beschriebenen Beziehung steht, *so dass ein jedes Element* ($zxypqrst$) *eine sowohl für f und φ_1 als auch für f und φ_2 gemeinsame charakteristische Richtung bestimmt.* Aus dem, was oben von einer solchen partiellen Gleichung 3. O., die ein vollständiges, durch die Gleichung
$$\text{eine arbiträre Function von } (\varphi_1, \varphi_2) = 0$$
ausgedrücktes erstes Integral besitzt, auseinandergesetzt wurde, folgt dann, *dass nothwendig auch jede partielle Differentialgleichung* 2. O. *von der Form:*
$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$
mit $f = C$ ein Gleichungssystem von der oben vom Systeme (21) *oder von dem von $f = C$ und $\varphi_1 = C$ (oder $\varphi_2 = C$) gebildeten Systeme angemerkten Eigenschaft bildet.*

Dies wird übrigens evident, wenn man bemerkt, dass die Gleichungen (24) als zwei *lineare* partielle Differentialgleichungen 1. O. für φ zu betrachten sind. Sehen wir nämlich f als bekannt an, so können wir statt der ersten der Gleichungen (24) schreiben: $\frac{n-n'}{m-m'}$ gleich einer Wurzel der Gleichung der für f charakteristischen Richtungen, d. i.:
$$\frac{n-n'}{m-m'} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2},$$
und mit Benutzung dieses Ausdruckes von $\frac{n-n'}{m-m'}$ wird durch (23) die zweite der Gleichungen (24) ohne Weiteres in eine *lineare* partielle Differentialgleichung für φ übergeführt. Von zwei *linearen* partiellen Differentialgleichungen 1. O. gilt aber der Satz, dass, *wenn* dieselben

zwei gemeinsame Lösungen $\varphi_1 = C$, $\varphi_2 = C$ zulassen, nothwendig auch $F(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ eine gemeinsame Lösung ist. —

12. Die Gleichung (20) wird eine *lineare* Gleichung, falls:

$$m' = m^0, \quad n' = n^0, ^{*)}$$

d. i. *wenn die ersten Integrale* $f_1 = c$, $f_2 = c$ *einem jeden Elemente* $(zxypqrst)$ *ganz dasselbe Paar von charakteristischen Richtungen zuordnen.* Eine lineare Gleichung 3. O. kann nun *drei* distincte vollständige erste Integrale besitzen, weil für eine lineare M_3:

$$Au + Bv + Cw + D\varpi + E = 0,$$

immer drei Schaaren von erzeugenden M_2 (19) existiren, und weil es sich treffen kann, dass sich sowohl zu der einen charakteristischen Richtung von $f_1 = C$ (und $f_2 = C$) wie zu der anderen ein Gleichungssystem von derselben Beschaffenheit wie das obige von $\varphi_1 = C$, $\varphi_2 = C$ gebildete (Nummer 11) finden lässt. — Seien $f(zxypqrst) = 0$, $\varphi(zxypqrst) = 0$, $\psi(zxypqrst) = 0$ drei erste Integrale, deren M_2 bez. den drei Schaaren angehören; *dieselben ordnen jedem gemeinsamen Elemente* $(zxypqrstuvw\varpi)$ *drei einfach unendliche Reihen von eben solchen Elementen* $(zxypqrstuvw\varpi)$ *zu, deren jede für je zwei der Gleichungen eine gemeinsame charakteristische Reihe ist, — und jene Elemente ordnen sich desshalb zu dreifach unendlich vielen für jene Gleichungen 2. O. gemeinsamen Integralflächen zusammen.*

Umgekehrt, wenn drei Gleichungsschaaren:

eine arbiträre Function von $(f_1, f_2) = 0$,
eine arbiträre Function von $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$,
eine arbiträre Function von $(\psi_1, \psi_2) = 0$,

so mit einander verbunden sind, dass eine jede Gleichung der ersten Schaar zugleich mit einer jeden der zweiten und einer jeden der dritten dreifach unendlich viele Integralflächen gemein hat, so gehören zunächst die drei Schaaren einer und derselben partiellen Differentialgleichung 3. O. an, und stehen folglich weiter in der eben von den Gleichungen $(f = 0,\ \varphi = 0,\ \psi = 0)$ bemerkten Beziehung zu einander.

---

13. Die partielle Differentialgleichung 4. O., die ein vollständiges erstes Integral der Form:

Eine arbiträre Function von

(26) $\quad (f_1(zxypqrstuvw\varpi),\ f_2(zxypqrstuvw\varpi)) = 0$

---

*) D. h. wenn sich die durch die Gleichungen $f_1 = C$, $f_2 = C$ dargestellten Flächen (im Raume R_3') längs einer Curve berühren.

besitzt, ist, wenn die vierten Differentialquotienten von $z : \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, als Coordinaten der Punkte eines R_5' gedeutet werden, selbst als eine gewisse M_4 dieses Raumes zu deuten. Die Gleichung dieser M_4 hat die Form:

$$(27)\quad \begin{vmatrix} \varepsilon + m_1{}^0\varepsilon_1 + m_2{}^0\varepsilon_2 + m_3{}^0\varepsilon_3 + \mu^0 & \varepsilon + m_1{}^1\varepsilon_1 + m_2{}^1\varepsilon_2 + m_3{}^1\varepsilon_3 + \mu^1 \\ \varepsilon_1 + m_1{}^0\varepsilon_2 + m_2{}^0\varepsilon_3 + m_3{}^0\varepsilon_4 + \nu^0 & \varepsilon_1 + m_1{}^1\varepsilon_2 + m_2{}^1\varepsilon_3 + m_3{}^1\varepsilon_4 + \nu^1 \end{vmatrix} = 0,$$

und besitzt folglich eine Schaar von einfach unendlich vielen M_3, die sich durch Gleichungen der Form:

$$(28)\quad \begin{aligned} \varepsilon + m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + m_3\varepsilon_3 + \mu &= 0, \\ \varepsilon_1 + m_1\varepsilon_2 + m_2\varepsilon_3 + m_3\varepsilon_4 + \nu &= 0, \end{aligned}$$

ausdrücken und die auch den verschiedenen, unter der Gleichungsform (26) einbegriffenen Integralen als Gleichungen für die diesen Integralen zugehörenden Differentialquotienten von z entsprechen.

Wenn die ersten Integrale $f_1 = C$, $f_2 = C$ (wo C eine willkürliche Constante) zwei beliebige Gleichungen 3. O. sind, so hat die von der Gleichung (26) dargestellte M_4 (27) nur eine Schaar von Erzeugenden von der Form (28), — soll sie aber noch eine Schaar von erzeugenden M_3 derselben Form (28) besitzen, so müssen die ersten Integrale $f_1 = C$, $f_2 = C$ in einem gewissen, folgendermassen leicht zu erkennenden Zusammenhange zu einander stehen.

Jede M_3 einer zweiten Schaar muss jede M_3 der ersten Schaar nach einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen schneiden, weil beide Schaaren von M_3 dieselbe M_4 erzeugen sollen. D. h. jede durch eine M_3 der ersten Schaar hindurchgelegte ebene M_4:

$$(29)\quad \varepsilon + m_1{}^0\varepsilon_1 + \cdots m_3{}^0\varepsilon_3 + \mu^0 + \lambda(\varepsilon_1 + m_1{}^0\varepsilon_2 + \cdots m_3{}^0\varepsilon_4 + \nu^0) = 0,$$

muss die Fläche (27) nach einer M_3 der anderen Schaar schneiden. Nun erfüllt, wie aus den Formen der bezüglichen Gleichungen (27), (29) ersichtlich ist, diese Schnittmannigfaltigkeit stets die Gleichung:

$$(30)\quad \varepsilon + m_1{}^1\varepsilon_1 + \cdots m_3{}^1\varepsilon_3 + \mu^1 + \lambda(\varepsilon_1 + m_1{}^1\varepsilon_2 + \cdots m_3{}^1\varepsilon_4 + \nu^1) = 0,$$

und daher muss den zwei folgenden Relationen:

$$(31)\quad \begin{aligned} (m_3{}^0 - m_3{}^1)^2 + (m_1{}^0 - m_1{}^1)(m_2{}^0 m_3{}^1 - m_3{}^0 m_2{}^1) &= 0, \\ (m_3{}^0 - m_3{}^1)(m_2{}^0 - m_2{}^1) + (m_1{}^0 - m_1{}^1)(m_1{}^0 m_3{}^1 - m_3{}^0 m_1{}^1) &= 0, \end{aligned}$$

Genüge geleistet werden, — falls [(29), (30)] eine M_3 von der Form (28) werden soll.

Diese Relationen sind unabhängig von λ. Folglich, wenn es für die M_4 (27) eine M_3 von der Form (28) giebt, die nicht der gegebenen (ersten) Schaar von erzeugenden M_3 angehört, so giebt es nothwendig auch eine ganze zweite Schaar von Erzeugenden derselben Form (28). —

Von den einem beliebigen Elemente $(zxypqrstuvw\varpi)$ *durch die partiellen Differentialgleichungen* 3. *Ordnung* $f_1(zxypqrstuvw\varpi) = C$, $f_2(zxypqrstuvw\varpi) = C$ *zugeordneten zwei Gruppen von drei charakteristischen Richtungen**) *sind, wegen* (31), *zwei Richtungen für beide Gruppen gemeinsam*, — und es ist dies der Zusammenhang, der zwischen zwei ersten Integralen $f_1 = C$, $f_2 = C$ bestehen muss, damit es möglich sei, dass die Gleichung 4. O. (27) ein erstes Integral gestatten könne, das nicht schon in der Integralschaar (26) enthalten ist. — Dies wird aber auch aus dem nun Folgenden unmittelbar klar.

14. Wenn $f = C$, $\varphi = C$ zwei erste Integrale verschiedener Schaaren bedeuten, deren M_3 (28) sich, nach dem eben Erörterten, also in einer Mannigfaltigkeit zweier Dimensionen schneiden, so muss, — wie leicht durch die Rechnung zu verificiren ist, — diese Mannigfaltigkeit nothwendig eine solche sein, die sich durch Gleichungen von folgender Form ausdrückt:

$$(32)\qquad \begin{aligned} \varepsilon + \varrho_1\varepsilon_1 + \varrho_2\varepsilon_2 &= \varkappa_1, \\ \varepsilon_1 + \varrho_1\varepsilon_2 + \varrho_2\varepsilon_3 &= \varkappa_2, \\ \varepsilon_2 + \varrho_1\varepsilon_3 + \varrho_2\varepsilon_4 &= \varkappa_3. \end{aligned}$$

Auf dieser Mannigfaltigkeit sind insbesondere zwei Schaaren von M_1 ausgezeichnet, nämlich die folgenden:

$$(33)\qquad \begin{aligned} \varepsilon + \lambda_1\varepsilon_1 &= \mu_1, & \varepsilon + \lambda_2\varepsilon_1 &= \mu_1', \\ \varepsilon_1 + \lambda_1\varepsilon_2 &= \mu_2, & \varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 &= \mu_2', \\ \varepsilon_2 + \lambda_1\varepsilon_3 &= \mu_3, & \varepsilon_2 + \lambda_2\varepsilon_3 &= \mu_3', \\ \varepsilon_3 + \lambda_1\varepsilon_4 &= \mu_4; & \varepsilon_3 + \lambda_2\varepsilon_4 &= \mu_4'; \text{ —} \end{aligned}$$

wo λ_1, λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$(34)\qquad \lambda^2 - \varrho_1\lambda + \varrho_2 = 0,$$

und μ, μ' *von einem variablen Parameter abhängen.*

Einem jeden, unserem Gleichungspaare: $f = C$, $\varphi = C$ zugehörigen Werthsysteme von $(zxypqrstuvw\varpi\,\varepsilon\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4)$ werden zweifach unendlich viele Werthsysteme der fünften Differentialquotienten von z: $\zeta, \zeta_1, \cdots \zeta_5$ zugeordnet. Die von ihnen gebildete Reihe ist bestimmt durch Gleichungen der Form:

---

*) Die durch eine Gleichung 3. O. $F(z \cdots \varpi) = 0$ irgend einem ihrer Elemente $(z \cdots \varpi)$ zugeordneten charakteristischen Richtungen sind gegeben durch die Gleichungen: $dz = (p + q\lambda)\,dx$, $dy = \lambda dx$,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\lambda^3 - \frac{\partial F}{\partial v}\lambda^2 + \frac{\partial F}{\partial w}\lambda - \frac{\partial F}{\partial \varpi} = 0.$$

(Vgl. hierzu Nr. 17.)

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
\zeta + \varrho_1\zeta_1 + \varrho_2\zeta_2 &= \nu_1, \\
\zeta_1 + \varrho_1\zeta_2 + \varrho_2\zeta_3 &= \nu_2, \\
\zeta_2 + \varrho_1\zeta_3 + \varrho_2\zeta_4 &= \nu_3, \\
\zeta_3 + \varrho_1\zeta_4 + \varrho_2\zeta_5 &= \nu_4,
\end{aligned}
$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die schon in (32) vorkommenden Grössen sind.

Dies ersieht man sogleich aus der Relation:

$$\lambda_1 \frac{df}{dx} + \lambda_2 \frac{df}{dy} + \mu_1 \frac{d\varphi}{dx} + \mu_2 \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

$\left(\text{wo } \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}\right.$ vollständige Differentiationen bezeichnen$\left.\right)$ die, zufolge des zwischen f, φ supponirten Zusammenhangs, identisch erfüllt ist. Hieraus folgt nämlich, ganz so wie in Nr. 10. aus der Gleichung (24′) der entsprechende Satz gefolgert wurde, dass jedem unserer Elemente (32) alle diejenigen Werthe von $\zeta, \zeta_1, \cdots \zeta_5$, die die vier Gleichungen befriedigen:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0,$$

als die dem Gleichungssysteme: $f = C$, $\varphi = C$ zugehörigen Differentialquotienten von z zugehören müssen. Denn die übrigen Gleichungen für ζ:

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0,$$

sind, wegen der eben bemerkten identischen Relation, eine blosse Folge jener. Und weiter erkennt man leicht, etwa aus der Form der Gleichungen (32), dass diese Gleichungen für ζ durch ein System der behaupteten Form zu ersetzen sind.

Zu einem jeden, unserem Gleichungssysteme: $f = C$, $\varphi = C$ zugehörigen Werthsysteme $(zx \cdots \zeta_5)$ gehört eine Reihe von zweifach unendlich vielen Werthsystemen der sechsten Differentialquotienten von z, in deren Gleichungen die obigen Grössen ϱ_1, ϱ_2 in ganz derselben Weise, wie in (32), (35), auftreten, — und von den siebenten Differentialquotienten von z gilt ein entsprechender Satz, u. s. w.

Man hat also, da die zwei Gleichungen 3. O.

$$f = C, \quad \varphi = C$$

zu den Gleichungen (32), (35) etc. für die ihnen zugehörenden vierten, fünften etc. Differentialquotienten von z führen, ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen vor sich:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dy = \lambda\,dx, \ (\lambda \text{ eine Wurzel von (34)})$$
$$dr = u\,dx + v\,dy, \text{ etc.}$$
$$du = \mu_1\,dx, \text{ etc. (D. i. die Gleichungen (33))}$$
$$\text{etc.},$$

das ein System von eben derselben Natur ist wie dasjenige, durch wel-

ches die Charakteristiken der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 2. O. bestimmt sind. Ich sehe es als einen sehr bemerkenswerthen Umstand an, dass, wie ich sogleich beweisen werde, die Elemente ($zx \cdots u \cdots \varepsilon \cdots \zeta \cdots$) *dieses Systems zu Flächen zusammengefügt werden können, so dass durch ein Flächensystem ein vollständiges Integral jenes Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen auszudrücken ist.*

15. Das vorgelegte Gleichungssystem ist dadurch vollständig charakterisirt, dass die zwei partiellen Differentialgleichungen 3. O. $f = C$, $\varphi = C$, die es begründen, zu zwei M_3 (28) Anlass geben, die sich nach einer Mannigfaltigkeit zweier Dimensionen schneiden. In Folge dieser Eigenschaft dieser partiellen Differentialgleichungen 3. O. wird man immer unbegrenzt viele M_4 (27), — u. A. eine ebene M_4, — construiren können, die, als partielle Differentialgleichungen 4. O. aufgefasst, die Gleichungen $f = C$, $\varphi = C$ als erste Integrale besitzen. Nun betrachte ich irgend eine dieser Gleichungen 4. O. und bezeichne sie kurz durch $\Omega = 0$; ich betrachte weiter eine Reihe von zu je zwei unendlich benachbarten vereinigt liegenden, den zwei Gleichungen 3. O. $f = C_0$, $\varphi = C_1$ gemeinsam zugehörenden Elementen ($zxypqrstuvw\varpi$). Durch dieselbe*) geht stets eine, und *nur eine* Integralfläche von $\Omega = 0$, durch dieselbe, weil sie aus Elementen von $f = C_0$ zusammengesetzt ist, geht eine Integralfläche von $f = C_0$, und aus ähnlichem Grunde eine Integralfläche von $\varphi = C_1$. Aber alle Integralflächen der ersten Integrale einer Gleichung müssen Integralflächen dieser Gleichung selbst sein. Also müssen die zwei zuletzt besprochenen Flächen mit der ersten Fläche zusammenfallen. *Also müssen die Gleichungen $f = C_0$, $\varphi = C_1$ Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl gemein haben, und zwar so, dass jede für die beiden Gleichungen gemeinsame Reihe von Elementen* ($zxypqrstuvw\varpi$) *eine für beide Gleichungen gemeinsame Integralfläche bestimmt.* Also muss schliesslich, wie zu beweisen war, das am Ende der vorangehenden Nummer erörterte System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ein aus Flächen bestehendes Integralsystem besitzen.

Das Problem der Darstellung dieser Integralflächen ist ein Problem derselben Natur wie das der Darstellung der Integralflächen der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 2. O. mit zwei unabhängigen Variabeln. —

Ein specieller Fall eines derartigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ist ein aus einer Gleichungsschaar:

---

*) Von dem Falle, dass die Linienelemente der Reihe für die fraglichen partiellen Gleichungen oder für eine derselben charakteristische Richtungen sind, sehe ich ab.

$$\psi(zxypqrstC^0C') = C,$$

(wo C^0, C' willkürliche Constanten bezeichnen) herzuleitendes System; in ein solches verwandelt sich das vorhin betrachtete, wenn die Gleichungen: $f = C^0$, $\varphi = C'$ für alle Werthe von C^0, C' ein erstes Integral mit einer willkürlichen Constanten C gemein haben.

16. Aus dem Satze, dass, wenn $f_1 = C$, $f_2 = C$ zwei erste Integrale derselben Schaar einer Gleichung (27) sind, auch die Gleichung: eine jede Function von (f_1, f_2) gleich Null, ein erstes Integral bildet, folgt, dass, wenn von einer partiellen Differentialgleichung 3. O.:

$$\varphi\,(zxypqrstuvw\varpi) = 0,$$

bekannt ist, dass sie zu zwei Gleichungen:

$$f_1\,(zxypqrstuvw\varpi) = C,$$
$$f_2(\qquad\qquad) = C,$$

(wo C eine willkürliche Constante bezeichnet) in der oben beschriebenen Beziehung steht, *so dass sie mit diesen Gleichungen dieselben zwei charakteristischen Richtungen und ausserdem Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl gemein hat*, — sie zu jeder Gleichung 3. O. von der Form:

$$F\,(f_1, f_2) = 0,$$

in derselben Beziehung steht. — Umgekehrt, wenn eine jede Integralfläche einer partiellen Differentialgleichung 3. O. $\varphi = 0$ auch einer partiellen Differentialgleichung 3. O. der Form: $F\,(f_1, f_2) = 0$, genügt, — wo f_1, f_2 determinirte Functionen von $z, x, y, p, q, r, s, t, u, v, w, \varpi$ bedeuten, — so ist nothwendig $\varphi = 0$ eine Gleichung, die zu f_1, f_2 in der oben erörterten besonderen Beziehung steht.

Es könnten zwei (aber nicht mehr) von einander unabhängige Gleichungen 3. O., jede mit einer willkürlichen Constanten C: $\varphi_1 = C$, $\varphi_2 = C$ dieselbe Beziehung, wie oben $\varphi = 0$, zu $f_1 = C$, $f_2 = C$ haben. Alsdann hat jede Gleichung $\Phi\,(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ die nämliche Beziehung zu jeder Gleichung $F\,(f_1, f_2) = 0$.

17. Betrachten wir für den Augenblick eine partielle Differentialgleichung 4. O. allgemeinster Form:

$$F\,(zx \cdots \varepsilon_3 \varepsilon_4) = 0,$$

und bilden wir die ersten Derivirten derselben:

$$\zeta + m_1\zeta_1 + \cdots + m_4\zeta_4 + \mu = 0,$$
$$\zeta_1 + m_1\zeta_2 + \cdots + m_4\zeta_5 + \nu = 0.$$

Sie stellen, — die ζ_i als Punktcoordinaten interpretirt, — eine gewissse M_4 dar, die u. A. Mannigfaltigkeiten erster Dimension von folgender Form enthält:

$$\begin{aligned}
\zeta + \lambda\zeta_1 &= \mu_1,\\
\zeta_1 + \lambda\zeta_2 &= \mu_2,\\
\cdot\quad \cdot\quad &\cdot\quad \cdot\quad \cdot\\
\zeta_4 + \lambda\zeta_5 &= \mu_5,
\end{aligned}$$

wenn λ eine Wurzel der Gleichung ist:

$$\lambda^4 - m_1\lambda^3 + m_2\lambda^2 - m_3\lambda + m_4 = 0. \tag{36}$$

Dass aber die der partiellen Differentialgleichung 4. O. zugehörenden Differentialquotienten ζ in vier (vierfach unendliche) Büschel der genannten Art sich vertheilen, bedeutet nichts Anderes, als dass es Streifen von vereinigt liegenden Elementen $(zx\dot{y}p\cdots w\varpi\varepsilon\cdots\varepsilon_4)$ geben muss, die unbegrenzt unendlich vielen Integralflächen gemein sind, wobei die Linienelemente jedes solchen Streifens durch die Bedingungen bestimmt sind:

$$dy = \lambda dx,\quad dz = (p+q\lambda)\,dx,$$
$$(\lambda \text{ eine Wurzel von (36).})$$

Die Richtungen dieser Linienelemente nennt man für die Gleichung 4. O. charakteristische Richtungen; *jedem Elemente* $(zx\cdots\varepsilon)$ *der Gleichung werden vier charakteristische Richtungen zugeordnet.* — Durch einen Streifen von vereinigt liegenden Elementen $(zx\cdots w\varpi)$, dessen Linienelemente keine charakteristische Richtungen haben, gehen nur endlich viele Integralflächen der fraglichen partiellen Differentialgleichung. —

18. Es werden also durch die partielle Differentialgleichung 4. O. (27), mit der wir uns oben beschäftigt haben, jedem ihrer Elemente vier charakteristische Richtungen zugeordnet. Zwei dieser Richtungen sind selbstverständlich die schon angemerkten, für $f_1 = C$, $f_2 = C$ gemeinsamen charakteristischen Richtungen. — *Betrachten wir jetzt im Besonderen den Fall einer linearen Gleichung* 4. *O.*; eine solche würde für die ersten Integrale $f_1 = C$, $f_2 = C$ dieselben drei charakteristischen Richtungen liefern, *und überdies drei, sogar vier Schaaren von ersten Integralen besitzen können.* Mehr als vier Schaaren von ersten Integralen sind desshalb unmöglich, weil es nicht mehr als vier Combinationen von den einem beliebigen Elemente zugehörenden vier charakteristischen Richtungen zu Gruppen von je drei geben kann, und jede erste Integralschaar eben eine solche Gruppe als System von eigenen charakteristischen Richtungen enthalten muss, — oder weil es nicht mehr als drei Gruppierungen zu je zwei der für $f_1 = C, f_2 = C$ gemeinsamen drei charakteristischen Richtungen giebt, und eine solche Gruppierung bedingt wird, wenn f_1, f_2 zu einem Gleichungssysteme $F(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ in der hier in Frage kommenden, in Nr. 16. beschriebenen Beziehung stehen sollen.

Drei erste Integrale, die drei verschiedenen Schaaren zugehören, stehen zu einander zu je zwei in dem oben von Integralen zweier Schaaren bemerkten Zusammenhange und haben alle drei eine charakteristische Richtung gemein. Oder, ihre M_3 (28) schneiden sich nach einer M_1; in Folge dessen *bestimmt jedes den drei Gleichungen gemeinsame Element* ($zxypqrstuvw\varpi$) *einen für alle Gleichungen gemeinsamen charakteristischen Streifen. Aus diesen Charakteristiken bildet man, gerade wie in Nr.* 10., *Flächen, so dass die drei Gleichungen Integralflächen zu einer unbegrenzt unendlichen Zahl gemein haben.* Jede Integralfläche eines ersten Integrals der einen Schaar wird zugleich eine Integralfläche eines Integrals der zweiten und eines der dritten Schaar.

Wir würden insbesondere annehmen können, dass zwei der fraglichen ersten Integrale selbst ein erstes Integral gemeinsam besitzen. Letzteres ist eine partielle Differentialgleichung 2. O. Diese Gleichung 2. O. steht dann zu jeder Gleichung 3. O.: $\psi = C$, die ein, einer dritten Integralschaar zugehörendes erstes Integral der Gleichung 4. O. bildet, in folgender Beziehung: *Jedem der Elemente* ($zxypqrstuvw\varpi$) *der Gleichung* 2. *O. wird vermittelst der genannten Gleichung* 3. *O. ein bestimmter charakteristischer Streifen zugeordnet.* Man gewinnt, wenn die Gleichungen 2. und 3. O. gegeben sind, diese Streifen durch Integration eines Systems von $\varkappa$ gewöhnlichen Differentialgleichungen mit $\varkappa + 1$ Variablen. Die Integration eines zweiten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ist dann weiter nöthig, um diese Streifen, — die Reihen von ∞^1 Elementen ($zxypqrstuvw\varpi$) sind, — ihrerseits zu Integralflächen zusammenzufügen.

Wenn eine partielle Differentialgleichung 2. O. zu zwei Gleichungen 3. O.: $\varphi_1 = C$, $\varphi_2 = C$, — die dieselben drei charakteristischen Richtungen besitzen, von denen die eine zugleich der Gleichung 2. O. als eine charakteristische Richtung zugehört, — in der obigen Beziehung steht, so hat sie auch zu jeder Gleichung 3. O.:

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

die nämliche Beziehung. Jede Integralfläche der Gleichung 2. O. ist dann auch als Integral einer der letzteren Gleichungen darzustellen.

19. Ich nehme schliesslich an, dass die lineare partielle Gleichung 4. O. *vier* Schaaren von ersten Integralen zulässt. Je drei von ihnen stehen in dem in nächstvorangehender Nummer bemerkten Zusammenhange; je vier, den verschiedenen Schaaren zugehörende erste Integrale haben sechsfach unendlich viele Integralflächen gemein.

Wenn zwei erste Integrale wieder ein erstes Integral gemein hätten, so müsste dies eine partielle Differentialgleichung 2. *O. sein, die zu zwei Schaaren von Gleichungen* 3. *O. von der Form:*

$$\text{eine arb. } F(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$
$$\text{eine arb. } F(\psi_1, \psi_2) = 0,$$

in der am Schlusse der vorangehenden Nummer von den dort betrachteten Gleichungen 2. und 3. O. erörterten Beziehung stehen würde. Diesen zwei Schaaren Gleichungen 3. O. würden die zwei charakteristischen Richtungen der partiellen Differentialgleichung 2. O. entsprechen.

---

20. Die partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem ersten Integrale der Form:

$$\text{eine arbiträre Function von } (f_1, f_2) = 0,$$

wo f_1, f_2 bestimmte Functionen von z, x, y und den ersten bis den $n-1^{\text{sten}}$ Differentialquotienten von z nach x, y bezeichnen, führt in ähnlicher Weise, wie sich oben, den Fällen $n = 3$, $n = 4$ entsprechend, für die Gleichungen 3. und 4. O. ergab, zu Systemen von zwei, drei, $\cdots n$ Schaaren von partiellen Differentialgleichungen $n - 1$. O., die in einer eigenthümlichen gegenseitigen Beziehung stehen.

Wenn die Gleichungen $n - 1$. O. $f_1 = C$, $f_2 = C$ $n - 2$ und nicht mehr charakteristische Richtungen gemein haben, so kann es höchstens noch eine Schaar von Integralgleichungen $n - 1$. O. geben, für welche dann jene Richtungen nothwendig charakteristische Richtungen sind. Jede Gleichung $F(f_1, f_2) = 0$ hat mit jeder Gleichung der letzten Schaar unbegrenzt unendlich viele Integralflächen gemein. — Wenn jene Gleichungen $f_1 = C$, $f_2 = C$ dieselben $n - 1$ charakteristischen Richtungen besitzen, so ist es möglich, dass sie hinsichtlich einer Gruppe von $n - 2$ dieser Richtungen so beschaffen sind, dass sie eine Schaar von Gleichungen $n - 1$. O. mit den genannten $n - 2$ Richtungen als (gemeinsame) charakteristische Richtungen zulassen, mit denen sie Integralflächen zu unbegrenzt unendlicher Zahl gemein haben, — eine Gleichungsschaar, die also eine zweite Schaar von ersten Integralen von der, nun linearen, partiellen Differentialgleichung n. Ordnung bildet. Es ist weiter möglich, dass die Gleichungen $f_1 = C$, $f_2 = C$ hinsichtlich zweier Gruppen von je $n - 2$ ihrer $n - 1$ charakteristischen Richtungen von der nämlichen Beschaffenheit sind, wie es eben hinsichtlich einer Gruppe von ihnen angenommen wurde, oder dass dasselbe von drei, vier, sogar $n - 1$ (der grösstmöglichen Zahl) Gruppen von je $n - 2$ der für $f_1 = C$, $f_2 = C$ (gemeinsamen) charakteristischen Richtungen gilt. Dementsprechend finden sich drei, vier, $\cdots n$ Schaaren von ersten Integralen der linearen Gleichung n. Ordnung. — Je n Integrale der n verschiedenen Schaaren haben Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl gemein.

*Insbesondere können wir den Fall betrachten, dass gewisse $n-k$ dieser Integralgleichungen $n-1$. O. eine partielle Differentialgleichung k. O. als gemeinsames Integral besitzen.**) — Wir sehen, dass diese Gleichung k. O. zu irgend welchen k Gleichungen $n-1$. O., die den übrigen k Schaaren von Integralen der Gleichung n. O. bezüglich zugehören, in folgender Beziehung steht:

*Sie hat mit jeder dieser Gleichungen $n-1$. Ordnung $k-1$ charakteristische Richtungen und mit je $k-1$ derselben eine charakteristische Richtung gemein. Zusammen mit je $k-1$ der Gleichungen ordnet sie jedem ihr und diesen Gleichungen gemeinsamen Elemente ($zxypq$, 2^te^, 3^te^, $\cdots n-1$^ste^ Differentialquotienten von z) einen gemeinsamen charakteristischen Streifen, oder besser, eine gemeinsame charakteristische Reihe derartiger Elemente zu. Je zwei solche charakteristische Reihen, die von zwei vereinigt liegenden Elementen bestimmt sind, liegen selbst vereinigt. Nach diesem Satze bildet man leicht für die Gleichung k. O. und für das von je $k-1$ der Gleichungen $n-1$. O. gebildete System gemeinsame Integralflächen. Mit allen k Gleichungen $n-1$. O. muss die Gleichung k. O. Integralflächen zu einer solchen Zahl gemein haben, dass durch dieselben alle Elemente ($zxypq \cdots n-2$^te^* Diffqu. von z) *der Gleichung k. O. herauskommen.*

Durch Anwendung aller Gleichungen $n-1$. Ordnung von $k-1$ der k supponirten Integralschaaren wird man in der eben angeführten Weise alle Integralflächen der Gleichung k. O. erhalten.

Wie alles dies auszusprechen ist, wenn es nicht k, sondern weniger als k Schaaren von ersten Integralen giebt, ist ohne Weiteres klar.**) Setzt man $k=2$, so sieht man, wenn eine partielle Differentialgleichung 2. O. mit einer partiellen Differentialgleichung $n-1$. Ordnung: $\varphi_1 = C$, (C eine willkürliche Constante) in einem solchen Zusammenhange steht, dass zu jedem Elemente ($zxypq \cdots n-1$^ste^ Diffqu. v. z) der Gleichung 2. O. eine Charakteristik***) gehört, die zu derselben

---

*) Aus $n-k$ Gleichungen $n-k-1$. O. mit einer Integralfläche können wir durch Anwendung einer Flächentransformation: $f(zxypqr \cdots k^{\text{te}}$ Differentialqu. v. z, $ZXY) = 0$, ein System von $n-k$ Gleichungen $n-1$. O. mit einer Gleichung k. O. als gemeinsamem Integrale ableiten.

**) Die Bedingung eines Zusammenhangs der eben beschriebenen Art zwischen einer Gleichung k. O.: $F=0$, und einer Gleichung $n-1$. O.: $\varphi = 0$, drückt sich algebraisch so aus: *Von den $n-k+3$ Gleichungen:*

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} F = 0, \quad \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k-1} dy} F = 0, \quad \cdots \quad \frac{d^{n-k}}{dy^{n-k}} F = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

muss die eine Gleichung eine algebraische Folge der anderen sein.

***) Unter Charakteristik hier eine charakteristische Reihe von einfach unendlich vielen Elementen ($zxypq \cdots n-1$^ste^ Differentialquotienten von z) verstanden.

Zeit Charakteristik der Gleichung $\varphi_1 = C^0$ ist, in welchem Falle je zwei von vereinigt liegenden Elementen bestimmte Charakteristiken vereinigt liegen, — und wenn weiter die Gleichung 2. O., hinsichtlich der *nämlichen* charakteristischen Richtungen, auch zu einer zweiten Gleichung $n-1$. O.: $\varphi_2 = C$, (C eine willkürliche Constante) in derselben Beziehung steht, so steht sie nothwendig zu jeder Gleichung $F(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ in ganz der nämlichen Beziehung, so dass jede Integralfläche der Gleichung 2. O. als Integralfläche einer der letzteren Gleichungen erscheint. Vermittelst der Gleichungen: $\varphi_1 = C$, $\varphi_2 = C$ werden alsdann die Integrale der partiellen Differentialgleichung 2. O. mit Hülfe von Systemen von $\varkappa$ gewöhnlichen Differentialgleichungen mit $\varkappa + 1$ Variablen hergeleitet. Die zweiten, durch die partielle Gleichung 2. O. ihren Elementen zugeordneten charakteristischen Richtungen würden zu einer ähnlichen Beziehung zwischen der Gleichung 2. O. und anderen partiellen Differentialgleichungen, etwa der m. Ordnung, führen können.

Dieser Satz ist zuerst von Herrn Darboux aufgestellt worden. Auf denselben hat er eine neue Methode zur Untersuchung partieller Gleichungen 2. O. gegründet. (Comptes rendus etc. T. LXX.)

§ 4.

Erweiterung auf den Raum von $n+1$ Dimensionen.

21. Ich wiederhole zunächst das in meiner früheren Abhandlung (in der 46. Nr.) über die partielle Differentialgleichung 2. O. mit $n+1$ Variablen und mit einem vollständigen ersten Integrale:

$$\varphi(u_1, u_2, \cdots u_n) = 0,$$

Auseinandergesetzte. — Indem wir die zweiten Differentialquotienten von z als Punktcoordinaten eines Raumes R betrachten und mit $M^{(n)}$ eine solche Mannigfaltigkeit in R bezeichnen, die dargestellt ist durch ein Gleichungssystem von der Form:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_1} f(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0, \\
&\frac{d}{dx_2} f(\qquad\qquad\qquad) = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d}{dx_n} f(\qquad\qquad\qquad) = 0,
\end{aligned}$$

wo unter $\frac{d}{dx_i}$ eine vollständige Differentiation nach x_i verstanden wird, und hierauf z, x_i, p_i als Constanten aufgefasst werden, — oder allgemeiner, durch ein Gleichungssystem von der Form:

$$
(37)\qquad
\begin{aligned}
&\mu_1 + m_1 p_{11} + m_2 p_{12} + \cdots + m_n p_{1n} = 0,\text{*)}\\
&\mu_2 + m_1 p_{21} + m_2 p_{22} + \cdots + m_n p_{2n} = 0,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\mu_n + m_1 p_{n1} + m_2 p_{n2} + \cdots + m_n p_{nn} = 0,
\end{aligned}
$$

so haben wir die partielle Differentialgleichung 2. O. mit dem vollständigen ersten Integrale:

(38) eine arbiträre Function von $(u_1, u_2, \cdots u_n) = 0$,

als eine gewisse durch $n-1$fach unendlich viele $M^{(n)}$ erzeugte Punktmannigfaltigkeit im Raume R zu interpretiren. Die Gleichung dieser Mannigfaltigkeit ist so zu schreiben:

$$
(39)\qquad
\begin{vmatrix}
\frac{du_1}{dx_1} & \frac{du_2}{dx_1} \cdots & \frac{du_n}{dx_1}\\
\frac{du_1}{dx_2} & \frac{du_2}{dx_2} \cdots & \frac{du_n}{dx_2}\\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\\
\frac{du_1}{dx_n} & \frac{du_2}{dx_n} \cdots & \frac{du_n}{dx_n}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Sie besitzt stets eine zweite Schaar von erzeugenden $M^{(n)}$ (37), denn jede der $n-1$fach unendlich vielen, durch das folgende Gleichungssystem:

$$
(40)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dx_1} + \lambda_1 \frac{du_1}{dx_2} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{du_1}{dx_n} = 0,\\
&\frac{du_2}{dx_1} + \lambda_1 \frac{du_2}{dx_2} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{du_2}{dx_n} = 0,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\frac{du_{n-1}}{dx_1} + \lambda_1 \frac{du_{n-1}}{dx_2} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{du_{n-1}}{dx_n} = 0,
\end{aligned}
$$

($\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{n-1}$ variable Parameter bedeutend)

ausgedrückten Mannigfaltigkeiten schneidet die Mannigfaltigkeit (39) in einer durch die eben hingeschriebenen Gleichungen und durch diese:

$$
(40)\qquad \frac{du_n}{dx_1} + \lambda_1 \frac{du_n}{dx_2} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{du_n}{dx_n} = 0,
$$

ausgedrückten Mannigfaltigkeit. Und das System dieser n Gleichungen lässt sich auf die Form bringen:

$$
\begin{aligned}
&p_{11} + \lambda_1 p_{12} + \cdots + \lambda_{n-1} p_{1n} + \mu_1 = 0,\\
&p_{21} + \lambda_1 p_{22} + \cdots + \lambda_{n-1} p_{2n} + \mu_2 = 0,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&p_{n1} + \lambda_1 p_{n2} + \cdots + \lambda_{n-1} p_{nn} + \mu_n = 0,
\end{aligned}
$$

*) $p_{ik} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$.

weshalb die fragliche Schnittmannigfaltigkeit eine $M^{(n)}$ (37) ist; sie ist, wie man leicht erkennt, keine der durch das Integral (38) begründeten $M^{(n)}$, die Gleichungen von der Form haben:

$$
(41) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dx_1} + \lambda \dfrac{du_2}{dx_1} + \cdots + \mu \dfrac{du_n}{dx_1} = 0\,, \\ \dfrac{du_1}{dx_2} + \lambda \dfrac{du_2}{dx_2} + \cdots + \mu \dfrac{du_n}{dx_2} = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du_1}{dx_n} + \lambda \dfrac{du_2}{dx_n} + \cdots + \mu \dfrac{du_n}{dx_n} = 0\,. \end{cases}
$$

Diese zweite Schaar von erzeugenden $M^{(n)}$ würde für die Gleichung 2. O. (39) dieselbe Bedeutung haben können wie die erste Schaar (41), so dass es eintreffen kann, dass die Gleichung 2. O., ausser dem Integrale (38), ein vollständiges anderes erstes Integral:

(42) eine arbiträre Function von $(v_1, v_2, \cdots v_n) = 0$,

besitzt. Dass jede in dem letzteren Integrale enthaltene partielle Differentialgleichung 1. O. mit jeder in dem früheren Integrale enthaltenen involutorisch ist, folgt schon daraus, dass die beiden Integralschaaren (38), (42) doch dieselben Integralflächen liefern müssen, nämlich alle Integralflächen der partiellen Differentialgleichung 2. O.; es folgt auch daraus, dass von den $2n$ Gleichungen zweier $M^{(n)}$: (40) und (41), die eine eine algebraische Folge der anderen ist.

22. Wird auf eine partielle Differentialgleichung 2. O. mit zwei distincten vollständigen ersten Integralen (38), (42) eine Flächentransformation (10) angewandt, so resultirt eine partielle Differentialgleichung 3. O. mit zwei distincten vollständigen ersten Integralen der Form:

$$
\begin{aligned} &\text{eine arb. Funct. } (u_1, u_2, \cdots u_n) = 0\,, \\ &\text{eine arb. Funct. } (v_1, v_2, \cdots v_n) = 0. \text{ —} \end{aligned}
$$

Diese Gleichung 3. O. ist insofern als eine specielle Gleichung 3. O. mit zwei distincten vollständigen ersten Integralen anzusehen, als jene ersten Integrale selbst erste Integrale besitzen. Die allgemeinere Gleichung mit zwei vollständigen ersten Integralschaaren ist, ähnlich wie die genannten specielleren, hinsichtlich ihrer ersten Integrale von der folgenden Beschaffenheit.

Durch eine beliebige Mannigfaltigkeit von ∞^{n-1} zu je zwei unendlich benachbarten vereinigt liegenden Flächenelementen, d. i. durch eine M_{n-1}, kann stets eine, oder im Allgemeinen einige, Integral-M_n einer partiellen Differentialgleichung 2. O. hindurchgelegt werden, denn durch eine Gleichung 2. O. wird jedem Flächenelemente der M_{n-1} ein Werthsystem der zweiten, eins der dritten etc. Differentialquotienten

von z zugeordnet. Durch eine beliebig gewählte M_{n-1} kann also eine Integral-M_n eines beliebigen ersten Integrals, etwa $u_1 = 0$, gelegt werden. Durch die $n-1$-fach unendlich vielen, dieser M_{n-1} und dieser Integral-M_n gemeinsam zugehörenden Werthsysteme von $(zx_ip_ip_{ik})$ lässt sich ein einziges erstes Integral der anderen Schaar:

$$\text{eine bestimmte } \varphi(v_1, v_2, \cdots v_n) = 0,$$

legen. *Und die eben erwähnte Integral-M_n von $u_1 = 0$ ist zu gleicher Zeit eine Integral-M_n von $\varphi = 0$.*

Es ist weiter folgende Bemerkung von Gewicht. Auf einer Integral-M_n einer partiellen Differentialgleichung 2. O. können höchstens zwei Schaaren von M_1, die zu M_{n-1} zusammengehen, die unbegrenzt vielen Integral-M_n derselben Gleichung gemeinsam sind, sagen wir, von *charakteristischen* M_1, existiren. Es kann nämlich möglicherweise dann auf unbegrenzt viele Arten, zu jedem beliebigen Elemente $(zx_ip_ip_{ik})$ der gegebenen Gleichung, eine partielle Differentialgleichung 2. O. mit einem ersten Integrale der Form (38) construirt werden, die die gegebene Gleichung in jenem Elemente berührt, — so dass sie diesem Elemente dieselben Werthsysteme der dritten Differentialquotienten von z zuordnet, wie die gegebene Gleichung. Beide Gleichungen müssen dann nothwendig dem besprochenen Elemente $(zx_ip_ip_{ik})$ die nämlichen charakteristischen Richtungen zuordnen. Aber für eine Gleichung 2. O. mit einem ersten Integrale (38) giebt es, wie ich gleich zeigen werde, zu jedem Elemente zwei und nie mehr als zwei charakteristische Richtungen, und daraus schliesse ich sodann auf die Richtigkeit des für die allgemeine Gleichung 2. O. jetzt behaupteten Satzes.

Eine Integral-M_n einer Gleichung 2. O. mit einem ersten Integrale (38) ist immer in einer dieser letzteren Gleichungen als ihre Integral M_n enthalten. Setze ich nun voraus, dass es M_1, also Reihen von ∞^1 vereinigt liegenden, der Gleichung 2. O. zugehörenden Elementen $(zx_ip_ip_{ik})$ giebt, aus denen M_{n-1} sich bilden, die unendlich vielen Integral-M_n angehören, dass es also charakteristische M_1 giebt, und betrachte ich alle die durch eine solche M_1 hindurchgehenden Integral-M_n der Gleichung 2. O., so sehe ich erstens von den M_n, die durch irgend eine von derartigen M_1 zusammengesetzte M_{n-1} hindurchgehen, dass dieselben entweder demselben ersten Integrale als Integral-M_n zugehören, — in diesem Falle muss die bezügliche M_{n-1} von Charakteristiken dieses ersten Integrals erzeugt sein, — oder dass sie verschiedenen ersten Integralen angehören. Dann ist die fragliche M_{n-1} in dem Schnitte zweier ersten Integrale: $\varphi(u_1, \cdots u_n) = 0$, $\psi(u_1, \cdots u_n) = 0$, enthalten. In derselben Weise ist für eine von ∞^{n-3} charakteristischen M_1 zusammengesetzte M_{n-2} (den Schnitt zweier (somit unendlich vieler) M_{n-1}) zu räsonniren; entweder ist sie für ein

erstes Integral eine charakteristische M_{n-2}, oder sie gehört dem Schnitte dreier erster Integrale an, u. s. w. — So dass schliesslich von irgend einer charakteristischen M_1 Folgendes gilt. Entsprechend der Bemerkung, dass unendlich viele durch eine charakteristische M_1 hindurchgehende charakteristische M_{n-1} *) (und $M_{n-2}, \cdots M_2$) der Gleichung 2. O. entweder demselben ersten Integrale oder verschiedenen ersten Integralen angehören können, muss eine jede charakteristische M_1 entweder eine Charakteristik des bezüglichen ersten Integrals sein, oder dem Schnitte von n ersten Integralen: $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$, $\cdots u_n = C_n$ angehören. Also finden sich auf einer beliebigen Integral-M_n diese *zwei* Schaaren**) von charakteristischen M_1. —

Wir sehen leicht, wohin dies für unsere partielle Differentialgleichung 3. O. führt. Man betrachte eine Integral-M_n eines ersten Integrals $u_1 = 0$, nebst allen denjenigen Integral-M_n derselben Gleichung $u_1 = 0$, die sie osculiren nach einer aus charakteristischen M_1 bestehenden M_{n-1}***). Diese Integral-M_n gehören, nach dem eben entwickelten Satze, entweder alle einem und demselben ersten Integrale $\varphi = 0$ der anderen Schaar an, zu welcher $u_1 = 0$ nicht gehört, oder sie gehören verschiedenen Integralen dieser Schaar an. Daher, *von den zwei Schaaren, auf einer Integral-M_n eines ersten Integrals $u_1 = 0$ verlaufender, durch diese Gleichung 2. O. bestimmter charakteristischer M_1 gehört die eine zu gleicher Zeit einem ersten Integrale $\varphi = 0$ der zweiten Schaar als Charakteristikenschaar an,* die andere dagegen muss aus M_1 bestehen, die jede in der Schnittmannigfaltigkeit von n ersten Integralen der letzten Schaar enthalten sind. Auf derselben Integralfläche, wenn man sie als dem Integrale $\varphi = 0$ zugehörig betrachtet, läuft, ausser der schon genannten, für die beiden hier in Betracht stehenden partiellen Differentialgleichungen 2. O. gemeinsamen Charakteristikenschaar, eine zweite Schaar von M_1, welche die durch die zuletzt erwähnte Gleichung 2. O. bestimmte zweite Charakteristikenschaar bildet. — So haben wir nicht weniger als *drei* Schaaren von M_1, die sämmtlich den Charakter von Osculationsmannigfaltigkeiten zwischen unendlich vielen Integral-M_n der Gleichung 3. O. besitzen. Auf jeder Integral-M_n unserer Gleichung 3. O. giebt es also *drei* Schaaren charakteristischer M_1.

23. Dass eine partielle Differentialgleichung 3. O. mit einem vollständigen ersten Integrale:

---

*) Die nur diese charakteristische M_1 gemeinsam haben.

**) Jede Schaar aus ∞^{n-1} M_1 bestehend.

***) Dass $u_1 = 0$ eine Schaar charakteristischer M_1 (und daher auch zwei Schaaren) besitzt, ist eine Folge der Existenz der zweiten Integralschaar $\varphi(v_1, v_2, \cdots v_n) = 0$ der Gleichung 3. O. (Vgl. das Nächstfolgende.)

(43) eine arb. $F(u_1, u_2, \cdots u_n) = 0$,

ein zweites vollständiges erstes Integral besitzt, muss, nach dem eben Auseinandergesetzten, als eine Eigenschaft der früheren Integrale hinsichtlich der einen Schaar ihrer Charakteristiken betrachtet werden. Es kann nun eintreffen, dass diese Gleichungen 2. O. (43) in Bezug auf ihre beiden Charakteristikenschaaren von derselben Beschaffenheit sind, so dass sie zu *zwei* Schaaren von Gleichungen 2. O. von der Form:

(44) eine arb. $F(v_1, v_2, \cdots v_n) = 0$,

(45) eine arb. $F(w_1, w_2, \cdots w_n) = 0$,

in derjenigen Beziehung stehen, die eben in Bezug auf die angenommene zweite Schaar erster Integrale der Gleichung 3. O. beschrieben wurde. Wenn dies wirklich eintrifft, so hat die von der Gleichungsschaar (43) bestimmte Gleichung 3. O. nicht nur die Gleichungen (44), sondern auch die Gleichungen (45) als erste Integrale. Diese Gleichung 3. O. hat dann nicht weniger als *drei* vollständige erste Integrale (43), (44), (45), die zu je zwei gemeinsame Charakteristiken besitzen. — Irgend drei Gleichungen der drei Schaaren besitzen Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl gemein.

24. Als eine einfache Consequenz dieser Auseinandersetzung folgt als nothwendige Bedingung für eine von n Gleichungen 2. O. begründete Gleichung 3. O., die noch ein anderes vollständiges bez. zwei andere vollständige erste Integrale besitzt, *dass jene n Gleichungen 2. O. im ersten Falle zu jedem Elemente ($zx_ip_ip_{ik}$) eine und dieselbe charakteristische Richtung, im zweiten Falle eben dasselbe Paar von charakteristischen Richtungen zuordnen müssen.* Im letzteren Falle, wo die Gleichung 3. O. drei vollständige erste Integralschaaren hat, muss die Gleichung linear sein.

25. Ich betrachte zwei Gleichungen 3. O., jede mit zwei vollständigen ersten Integralschaaren, darunter ein erstes Integral mit einer willkürlichen Constanten: $u = C$, das beiden Gleichungen gemein ist. Es können nun zwei Gleichungen 2. O. derjenigen beiden Integralschaaren der beiden Gleichungen 3. O., zu denen $u = C$ *nicht* gehört, — ich nenne dieselben kurz v bez. w, — eine und dieselbe Charakteristikenschaar mit $u = C$ gemein haben, oder es können die verschiedenen Charakteristikenschaaren von $u = C$ den verschiedenen Integralschaaren v, w als Charakteristiken zugehören. Im letzteren Falle werden die verschiedenen Integral-M_n der Gleichung $u = C^0$, die eine von ∞^{n-2} charakteristischen M_1 gebildete M_{n-1} gemein haben, einem Integrale v der einen Gleichung 3. O., dagegen verschiedenen Integralen w der anderen Gleichung 3. O. als Integral-M_n zugehören. Im ersten Falle aber müssen die Integral-M_n von $u = C^0$, die sich nach einer, allen

hier betrachteten ersten Integralen der Gleichungen 3. O. gemeinsamen charakteristischen M_{n-1} osculiren, sowohl in einem und demselben ersten Integrale v der einen Gleichung 3. O. als in einem und demselben ersten Integrale w der anderen Gleichung 3. O. enthalten sein. Insbesondere kann es geschehen, dass in diesem Falle v zu w ganz dieselbe Beziehung hat als u zu v (und zu w), — *so dass wir dann ein System von drei Gleichungen 2. O. vor uns haben, welche Integral-M_n zur grösstmöglichen Zahl und eine Charakteristikenschaar gemeinsam besitzen**). — Es bildet dieses letztere einen charakteristischen Unterschied zwischen diesem Systeme und dem am Ende der 23. Nummer betrachteten Systeme von ebenfalls drei Gleichungen 2. O. mit einer grösstmöglichen Zahl von Integral-M_n.

26. Nothwendige algebraische Bedingungen, die unser System erfüllen muss, gehen aus dem folgenden Satze hervor: *Von den $3n$ Gleichungen, die unsere Gleichungen 2. O. für die dritten Differentialquotienten von z liefern, müssen drei eine algebraische Folge der anderen sein.* Man entwickelt ihn leicht durch folgende Ueberlegung:

Man kann zwei Gleichungen 3. O. aufstellen, die $n-1$ erste Integrale $u_1 = C$, $u_2 = C$, $\cdots u_{n-1} = C$ gemein haben, und von denen die eine Gleichung 3. O. noch ein erstes Integral anderer Art $v = C$, die andere Gleichung 3. O. ebenfalls noch ein erstes Integral anderer Art $w = C$ besitzt. Nun sollen nach Annahme die letzteren Integrale dieselbe Charakteristikenschaar mit den Integralen u gemein haben**), wodurch der Fall ausgeschlossen ist, dass irgend drei Integrale u, v, w einer und derselben Gleichung 3. O. angehören können. Fasse ich die dritten Differentialquotienten von z als Punktcoordinaten eines Raumes R auf, so habe ich die genannten Gleichungen 3. O. als Flächen in R und ein jedes der ersten Integrale als eine gewisse durch n Gleichungen ausgedrückte Mannigfaltigkeit in R, — ich bezeichne sie kurz mit $M^{(n)}$, — zu interpretiren. Nun soll der Schnitt zwischen den von $v = C$, $w = C$ bestimmten $M^{(n)}$ dem Schnitte der eben genannten Flächen angehören. Dieser ist anderseits von den ∞^{n-2} von $F(u_1, \cdots u_{n-1}) = 0$ begründeten $M^{(n)}$ erzeugt, und daher, — da nun, zufolge der obigen Annahme einer für die Integrale u, v, w gemeinsamen Charakteristikenschaar, keine ebene Fläche durch die von diesen Integralen herrührenden $M^{(n)}$ gelegt werden kann, — müssen von den Gleichungen der von $u = C$ und den Gleichungen des Schnittes der von $v = C$, $w = C$ herrührenden $M^{(n)}$ *zwei* Gleichungen aus den übrigen folgen. Die An-

*) Beispiel eines solchen Systems: drei Gleichungen 2. O. mit ∞^{n-2} gemeinsamen ersten Integralen.

**) Für die beiden Gleichungen 3. O. drei distincte Charakteristikenschaaren angenommen.

zahl der Gleichungen jenes Schnittes ist $2n-1$, denn, — *ich setze denselben Zusammenhang zwischen v, w wie zwischen u, v voraus,* — die Integrale v, w gehören einer und derselben (dritten) Gleichung 3. O. als Integrale verschiedener Schaaren zu und die entsprechenden $M^{(n)}$ verlaufen also auf einer und derselben Fläche in R und schneiden einander, so dass von ihren $2n$ Gleichungen die eine eine algebraische Folge der anderen sein muss; — die Anzahl der Gleichungen der von $u=C$ herrührenden $M^{(n)}$ ist n. Also ist der Schnitt der drei von $u=C$, $v=C$, $w=C$ herrührenden $M^{(n)}$ durch $3n-3$ Gleichungen dargestellt. Die Umkehrung dieses Satzes ist dagegen nicht richtig. Durch Interpretation der Punktcoordinaten von R als dritte Differentialquotienten von z ergiebt sich hieraus der behauptete Satz.

Selbstverständlich können die Gleichungen $u=0$, $v=0$, $w=0$ in dem hier erörterten Zusammenhange stehen, ohne dass je zwei der Gleichungen die oben von je zwei der Gleichungen $u=C$, $v=C$, $w=C$ festgesetzte Beziehung zu einander haben. Es ist nur nöthig, dass in Bezug auf die gemeinsamen Elemente der drei Gleichungen diese Beziehung besteht.

27. Es können drei Gleichungen 3. O. ein erstes Integral $u=C$ gemein haben und ausserdem erste Integrale anderer Art besitzen, die in derselben Beziehung zu $u=C$ und zu einander stehen, wie die früheren Integrale v, w zu u und zu einander. Dann bildet $u=C^0$ mit den drei ersten Integralen der letzten Art jener drei Gleichungen 3. O. ein solches System von vier Gleichungen 2. O., das eine alle Elemente $(zx_ip_ip_{ik})$ des Systems umfassende unbegrenzt unendliche Charakteristikenschaar, d. i. eine Schaar von Streifen, die für alle vier Gleichungen 2. O. Charakteristiken bilden, und weiter Integralflächen zur grösstmöglichen Zahl, erzeugt von jenen Charakteristiken, besitzt.

Für ein solches System von vier Gleichungen 2. O. gilt der Satz: *Die $4n$ Gleichungen für die dritten Differentialquotienten von z, die aus den fraglichen Gleichungen 2. O. durch Differentiation hergeleitet werden, müssen sich auf $4n-6$ von einander unabhängige Gleichungen reduciren.*

Vier Gleichungen 2. O., deren erste Derivirte in Bezug auf $x_1, \cdots x_n$ in dieser Weise sich reduciren, bilden immer ein System mit gemeinsamen Integral-M_n zur grösstmöglichen Zahl, aber nicht nothwendig mit charakteristischen M_1.

28. Vier, fünf, $\cdots n-1$ Gleichungen 3. O. können in ähnlicher Beziehung zu einander stehen, wie oben in Nr. 25., 27. von zwei resp. drei Gleichungen angenommen ist. *Dementsprechend bekommt man Systeme von fünf, sechs bis n Gleichungen 2. O., jedes mit einer alle Elemente des Systems umfassenden Schaar von Charakteristiken und aus*

diesen zusammengesetzten Integral-M_n *). *Die für die zugehörenden dritten Differentialquotienten von z geltenden Gleichungen müssen sich auf bez.* $5n-10$, $6n-15$, $\cdots \frac{n(n+1)}{2}$ *von einander unabhängige Gleichungen reduciren.*

Von dem aus n Gleichungen bestehenden Systeme **) ist insbesondere zu bemerken, dass, — *da nun ein jedes dem Systeme zugehörende Element* $(z x_i p_i p_{ik})$ *eine allen jenen Gleichungen gemeinsame Charakteristik bestimmt, und da je zwei vereinigt liegende Elemente des Systems, d. h. zwei, die einem und demselben dem Systeme zugehörenden Werthsysteme von* $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ *entsprechen, Charakteristiken liefern, die selbst vereinigt liegen,* — die Integration desselben durch Systeme von $\varkappa$ gewöhnlichen Differentialgleichungen in $\varkappa+1$ Variablen zu erzielen ist.

Daher, so oft eins der hier betrachteten Systeme von zwei resp. drei etc. Gleichungen 2. O. mit anderen $n-2$ resp. $n-3$ etc. Gleichungen derselben Ordnung zu einem Systeme der jetzt beschriebenen Beschaffenheit von n Gleichungen führen kann, ist auch immer eine Schaar von Integral-M_n desselben durch bekannte Operationen zu erhalten. — Ob aber zwei oder mehrere Gleichungen 2. O. als Theile eines solchen Systems fungiren können, ist eine Frage, die, vermöge der erwähnten Form der nothwendigen algebraischen Bedingungen der in Rede stehenden Systeme, auf die von dem möglichen Stattfinden gemeinsamer Lösungen gegebener Systeme partieller Differentialgleichungen 1. O., — eine Frage, deren Erledigung bekannt ist, — zurückzuführen ist.

29. Wenn k Gleichungen 2. O. mit einer jeden der $n-k+1$ von einander unabhängigen Gleichungen 2. O.:

$$u_1 = C, \quad u_2 = C, \quad \cdots \; u_{n-k+1} = C,$$

ein System von $k+1$ Gleichungen 2. O. von der im Anfange der vorigen Nummer genannten Art bilden, so bilden sie auch mit jeder Gleichung 2. O.:

$$F(u_1, u_2, \cdots u_{n-k+1}) = 0,$$

ein Gleichungssystem der nämlichen Beschaffenheit. Denn nun können k Gleichungen 3. O. mit den $n-k+1$ Gleichungen $u = C$ als gemeinsamen Integralen und jede mit einer der k zuerst gegebenen Gleichungen 2. O. als Integral anderer Art aufgestellt werden, — und für jede dieser Gleichungen 3. O. ist $F(u_1, u_2, \cdots u_{n-k+1}) = 0$ ebenfalls ein Integral, das zu dem von den k anfänglichen Gleichungen

*) Durch Anwendung einer Flächentransformation (10) auf ein involutorisches System partieller Gleichungen 1. O. bekommt man ein specielles System partieller Gleichungen 2. O. *dieser* Art.

**) Ein solches ist u. A. das System, das gebildet ist von n Gleichungen, die ein erstes Integral mit einer willkürlichen Constanten gemein haben.

gebildeten Systeme in derselben Beziehung steht wie ein jedes der u. (Vgl. Nr. 11.)

30. Ebenso wie aus der partiellen Differentialgleichung 2. O. partielle Differentialgleichungen 3. O. abgeleitet wurden, können wir von den letzteren Gleichungen zu Gleichungen 4. und höherer Ordnung aufsteigen. Wir werden in dieser Weise successive zu dem Satze gelangen, dass es partielle Differentialgleichungen der k^{ten} Ordnung giebt, die jedem ihrer Elemente k charakteristische Richtungen zuordnen, und dass es partielle Differentialgleichungen k^{ter} Ordnung giebt mit einer vollständigen ersten Integralschaar von der Form:

$$\text{eine arb. } F(u_1, u_2, \cdots u_n) = 0,$$

und ebenso solche mit zwei, drei, $\cdots$ bis k verschiedenen ersten Integralschaaren.

Die ersten Integrale der verschiedenen Schaaren stehen mit einander in einem ähnlichen Zusammenhange wie die eben beschriebenen ersten Integrale der Gleichung 3. O. (Vgl. auch Nr. 20.) — Der zuletzt entwickelten Theorie entsprechend ergiebt sich eine auf Systeme von drei, vier, $\cdots$ Gleichungen $k - 1^{\text{ster}}$ O. sich beziehende; aus ihr folgt sodann eine Erweiterung auf den Raum von $n + 1$ Dimensionen der am Ende der 20. Nummer für den Fall $n = 2$ entwickelten Theorie partieller Differentialgleichungen k^{ter} Ordnung.

Helsingborg, 21. August 1877.

Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Von F. Brioschi in Mailand.

Erster Abschnitt.

Die Multiplicatorgleichungen bei Transformation der elliptischen Functionen.*)

§ 1.

Die Bezeichnungen, von denen wir in diesem Abschnitte Gebrauch machen werden, sind diejenigen, deren sich Jacobi in seinen berühmten Aufsätzen im 3ten und 4ten Bande von Crelle's Journal bedient und die sich mit einigen Abänderungen in den *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* wiederfinden.

Sei n eine Primzahl; $U(x)$ und $V(x)$ bezeichnen zwei ganze Functionen von x vom Grade n und $n-1$; ferner sei:

$$\varphi(x) = \sqrt{1 - \alpha x^2 + x^4}, \quad \psi(y) = \sqrt{1 - \beta y^2 + y^4}.$$

Wenn dann die algebraische Gleichung

$$U(x) - y\,V(x) = 0, \tag{1}$$

unter v eine Constante verstanden, der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{dy}{\psi(y)} = v\,\frac{dx}{\varphi(x)}, \tag{2}$$

so sagt man, dass (1) eine Transformation n^{ter} Ordnung von (2) darstelle.

---

*) In diesem Abschnitte sind diejenigen Resultate enthalten, welche der Verf. in folgenden Arbeiten entwickelt hat:

1) Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni elittiche. — Annali di Matematica, pubblicati da B. Tortolini — Maggio 1858.

2) Sur diverses équations analogues aux équations modulaires. (Lettre à Mr. Hermite 31 Juillet 1858.) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Août 1858.

3) Sopra alcune nuove relazioni modulari. — Atti della R. Accademia di Napoli, 1866.

Die α, β sind Functionen der Moduln $\varkappa$, λ, nämlich:

$$(3)\qquad \alpha = \frac{1+\varkappa^2}{\varkappa}, \quad \beta = \frac{1+\lambda^2}{\lambda},$$

und bezeichnet man mit μ den Multiplicator, so hat man:

$$v = \mu \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}.$$

Aus (2) folgt ferner:

$$x = \sqrt{\varkappa} \cdot \mathrm{sn}\,(u, k), \quad y = \sqrt{\lambda} \cdot \mathrm{sn}\,(\mu u, \lambda)$$

und also:

$$(4)\qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{\varkappa} \cdot \varphi(x), \quad \frac{dy}{du} = \sqrt{\varkappa} \cdot v \cdot \psi(y).$$

Die Polynome $U(x)$, $V(x)$ kann man auf zwei verschiedene Weisen ausdrücken. Entweder man setzt:

$$(5)\qquad \begin{aligned} U(x) &= x\left(Bx^{n-1} + B_1 x^{n-3} + \cdots + B_{\frac{n-3}{2}} x^2 + B_{\frac{n-1}{2}}\right), \\ V(x) &= B + B_1 x^2 + B_2 x^4 + \cdots + B_{\frac{n-3}{2}} x^{n-3} + B_{\frac{n-1}{2}} x^{n-1}, \end{aligned}$$

oder man benutzt:

$$\omega = \frac{mK + m' i K'}{n}, \quad g_s = \sqrt{\varkappa} \cdot \mathrm{sn}\,(2 s\omega, \varkappa)$$

und hat dann:

$$(6)\qquad U(x) = Bx \prod_s (x^2 - g_s^2), \quad V(x) = B \prod_s (1 - g_s^2 x^2),$$

wo $s = 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}$. Beide Polynome genügen der partiellen Differentialgleichung:

$$\varphi^2(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (n-1)\varphi(x)\varphi'(x) \frac{\partial U}{\partial x} + n(n-1) x^2 U = 2n(\alpha^2 - 4) \frac{\partial U}{\partial \alpha},$$

und man hat daher zwischen drei auf einander folgenden Coefficienten $B_{\nu+1}$, B_ν, $B_{\nu-1}$ die folgenden Relationen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} 2n(\alpha^2 - 4) \frac{\partial B_\nu}{\partial \alpha} = {} & (2\nu+1)(2\nu+2) B_{\nu+1} + 2\nu(n-2\nu)\alpha B_\nu \\ & + (n-2\nu+1)(n-2\nu+2) B_{\nu-1}. \end{aligned}$$

Zwei minder bekannte Differentialgleichungen*), denen ebenfalls die Polynome $U(x)$, $V(x)$ identisch genügen müssen, sind diese:

$$\left[V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] \varphi^2(x) + V \frac{\partial V}{\partial x} \varphi(x) \varphi'(x) - (2A_1 + nx^2) V^2 + v^2 U^2 = 0,$$

$$\left[U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right] \varphi^2(x) + U \frac{\partial U}{\partial x} \varphi(x) \varphi'(x) - (2A_1 + nx^2) U^2 + v^2 V^2 = 0,$$

---

*) Diese Differentialgleichungen, zu denen man leicht durch einfache algebraische Ueberlegungen gelangt, finden sich in dem Aufsatze Jacobi's: De functionibus ellipticis commentatio (Crelle, Vol. 4, p. 376, Gleichung (20), (21)).

wo A_1 nach der Formel zu bestimmen ist:

$$A_\nu = \frac{B_\nu}{B}.$$

Aus diesen Gleichungen leitet man durch Vergleichung der einzelnen Potenzen von x eine Reihe von algebraischen Relationen zwischen den Coefficienten B, oder besser den A, her, welche einige Erläuterung verdienen. Man hat zunächst

$$v = A_{\frac{n-1}{2}},$$

wie auch sonst bekannt, da

$$B = \sqrt{\mu \frac{\lambda'}{\varkappa'}}, \quad B_{\frac{n-1}{2}} = \mu \sqrt{\mu \frac{\lambda\lambda'}{\varkappa\varkappa'}};$$

überdies kommt:

$$v^4 - 6(A_1^2 - 2A_2) - 4\alpha A_1 - n = 0,$$

$$A_{\frac{n-3}{2}} v^3 - (A_1^3 + 3A_1A_2 - 15A_3) - 8\alpha A_2 - (n-3)A_1 = 0,$$

$$2A_{\frac{n-5}{2}} v^3 + A^2_{\frac{n-3}{2}} v^2 - 2(2A_1^2A_2 + 2A_2^2 - 2A_1A_3 - 27A_4) - 4\alpha(A_1A_2 + 9A_3)$$
$$- (n-2)A_1^2 - 2(n-10)A_2 = 0,$$

und so fort. Aus ihnen kann man die algebraischen Gleichungen ableiten, denen die Coefficienten $A_1, A_2, \cdots$ genügen. Zum Beispiel, wenn $n = 3$, wo $A_1 = v$, $A_2 = 0$, so giebt die erste der angeschriebenen Relationen für $v = A_1$ die Gleichung:

(8) $$v^4 - 6v^2 - 4\alpha v - 3 = 0,$$

wenn $n = 5$, wo $A_2 = v$, $A_3 = 0$, so ergeben die beiden ersten Relationen:

$$A_1^2 = v(v^2 - 2v + 5), \quad 4\alpha A_1 = (v^2 - 2v + 5)(v^2 - 4v - 1),$$

und aus ihnen folgt:

$$(v^2 - 2v + 5)(v^2 - 4v - 1)^2 - 16\alpha^2 v = 0,$$

oder:

(9) $$(v-1)^6 - 4(v-1)^5 - 16(\alpha^2 - 4)(v-1) - 16(\alpha^2 - 4) = 0.$$

§ 2.

Wenn man mit $x, x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ die n Wurzeln der Gleichungen (1) bezeichnet, so hat man:

$$x = \sqrt{\varkappa} \cdot \operatorname{sn}(u, \varkappa), \quad x_\nu = \sqrt{\varkappa} \cdot \operatorname{sn}(u + 4\nu\omega, \varkappa),$$

so wie ferner aus:

$$U(x) - yV(x) = B \prod_\nu (x - x_\nu), \quad (\nu = 0, 1, \cdots n-1)$$

$$(10) \qquad vy = \sum_{\nu} x_{\nu}, \quad y = \prod_{\nu} x_{\nu}.$$

Das Element ω hat $n+1$ Werthe, welche zu $n+1$ verschiedenen Transformationen führen: diese Werthe sind:

$$\omega = \frac{K}{n}, \quad \omega_m = \frac{mK + iK'}{n}; \quad (m = 0, 1, \cdots (n-1)),$$

ihnen entsprechen $(n+1)$ Werthe von y und von x_{ν} und $n+1$ Werthe von λ und von μ, die wir folgendermassen bezeichnen wollen:

$$y, y_m; \quad x_{\nu}, x_{\nu, m},$$
$$\lambda, \lambda_m; \quad \mu, \mu_m.$$

Die $n(n-1)$ Werthe, welche man für $x_{\nu, m}$ erhält, indem man $\nu = 1, 2, \cdots n-1$, $m = 0, 1, 2, \cdots n-1$ setzt, zusammen mit den n Wurzeln $x, x_1, \cdots x_{n-1}$, bilden die n^2 Wurzeln der Gleichung für die Multiplication. Wenn man also unter S_{ν} die Summe der ν^{ten} Potenzen der Wurzeln der Multiplicationsgleichung versteht, und unter s_{ν} die Summe derselben Potenzen für die Wurzeln, welche einer der $n+1$ Transformationen entsprechen, so hat man die Beziehung:

$$(11) \qquad S_{\nu} + nx^{\nu} = \sum s_{\nu},$$

wo sich das Summenzeichen auf die $n+1$ Transformationen bezieht. Aehnlich erhält man:

$$(12) \qquad \prod y = x^n z$$

für

$$z = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(nu, \varkappa).$$

Da für $\nu = 1$, S_1 gleich nz ist und s_1, wie oben gezeigt wurde, gleich vy, so kommt*):

$$(13) \qquad z + x = \frac{1}{n} \sum vy,$$

eine Formel, in der, wie in den anderen, der Multiplicator μ, welcher der Transformation $\omega = \frac{K}{n}$ entspricht, mit dem Zeichen $\varrho = (n-1)^{\frac{n-1}{2}}$ behaftet gedacht werden muss. Man hat:

$$\mu K = n\Lambda, \quad \mu_m K = \Lambda_m;$$

setzt man also in (13) $u = K$ und beachtet, dass in diesem Falle:

$$y = \varrho\sqrt{\lambda}, \quad y_m = \sqrt{\lambda_m}, \quad z = \varrho\sqrt{\varkappa}, \quad x = \sqrt{\varkappa},$$

so kommt:

---

*) Diese Formel findet sich in einer Abhandlung von Jacobi im vierten Bande von Crelle's Journal, p. 191, aber enthält dort einen Druckfehler.

$$\sum \mu \frac{\lambda}{\varkappa} = (\varrho+1)n,$$

und da vermöge (2), wenn $\varkappa$ in $\frac{1}{\varkappa}$, λ in $\frac{1}{\lambda}$ verwandelt wird, μ in $\mu\frac{\lambda}{\varkappa}$ übergeht, so kommt ferner:

$$\sum \mu = (\varrho+1)n,$$

d. h. der Coefficient des zweiten Terms der Multiplicatorgleichung wird Null oder gleich $-2n$, je nachdem $\frac{n-1}{2}$ eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Setzt man zweitens in (11) $r=2$, so findet sich, da $S_2 = n^2 z^2$, $s_1 = v^2 y^2 - 2A_1$:

$$nz^2 + x^2 = \frac{1}{n}\left\{\sum v^2 y^2 - 2\sum A_1\right\}.$$

Macht man nun $u=0$, so dass x, y, z verschwinden, so ergiebt sich:

$$\sum A_1 = 0,$$

und die Formel selbst wird:

$$nz^2 + x^2 = \frac{1}{n}\sum v^2 y^2, \tag{14}$$

aus der für $u = \mathsf{K}$ und nach Verwandlung von $\varkappa$ in $\frac{1}{\varkappa}$ folgt:

$$\sum \mu^2 = n(n+1).$$

Der Coefficient des dritten Gliedes der Multiplicatorgleichung ist also gleich $-\frac{n(n+1)}{2}$, wenn $\frac{n-1}{2}$ ungerade, und gleich $\frac{n(3n-1)}{2}$, wenn $\frac{n-1}{2}$ gerade.

Differentiirt man weiter (13) nach u, beachtet (4) und bemerkt, dass man hat:

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{\varkappa}\cdot n\varphi(z),$$

so erhält man:

$$n\varphi(z) + \varphi(x) = \frac{1}{n}\sum v^2\psi(y).$$

Differentiirt man diese Gleichung noch einmal nach u, so kommt:

$$n^2 z(2z^2-\alpha) + x(2x^2-\alpha) = \frac{1}{n}\sum v^3 y(2y^2-\beta),$$

wo die α, β die Werthe (3) haben. Setzt man hier $u = K$, so folgt:

$$\sum \mu^3 \frac{\lambda\lambda'^2}{\varkappa\varkappa'^2} = \varkappa(\varrho n^2+1)$$

und, wenn $\varkappa$ in $\frac{1}{\varkappa}$ geändert wird:

$$\sum \mu^3\lambda'^2 = n(\varrho n^2+1)\varkappa'^2.$$

Setzt man weiter $\varkappa$ statt $\varkappa'$, λ statt λ', wobei der Multiplicator mit dem Zeichen ϱ genommen werden muss (Fundamenta nova p. 58), so hat man:

$$\sum \mu^3 \lambda^2 = n(\varrho n^2 + 1)\varrho \varkappa^2,$$

eine Gleichung, die, zu den vorangehenden addirt, ergiebt:

$$\sum \mu^3 = n(\varrho n^2 + 1)\,(\varkappa'^2 + \varrho \varkappa^2).$$

Ebenso, wenn man (14) zweimal nach u differentiirt, und im Resultate $u = 0$ setzt, so erhält man:

$$\sum \mu^4 \lambda^2 = n(n^3 + 1)\varkappa^2,$$

und durch Vertauschung von $\varkappa$ und $\varkappa'$ und Summation:

$$\sum \mu^4 = n(n^3 + 1).$$

Es ist leicht zu sehen, wie der hier gebrauchte Process zu vielen anderen Relationen hinführt. Ich schreibe nur die folgenden beiden an:

$$\sum \mu \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}} = (\varrho + 1)n, \qquad \sum \mu \frac{\lambda'}{\varkappa'} = (\varrho + 1)n,$$

aus denen folgt, dass die Coefficienten des zweiten Terms derjenigen Gleichungen, deren Wurzeln sind:

$$(15) \qquad \left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu \frac{\lambda}{\varkappa}}\right)^2, \qquad \left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu \frac{\lambda'}{\varkappa'}}\right)^2,$$

in jedem Falle gleich Null sind.

Um den Coefficienten des letzten Terms zu berechnen, bemerke man zunächst, dass die Gleichung (12) für $u = K$ ergiebt:

$$\prod \sqrt{\lambda} = \varkappa^{\frac{n+1}{2}}.$$

Differentiirt man jetzt die zweite Gleichung (10) in Bezug auf u und setzt $u = 0$, so kommt:

$$v_m = x_{1,m}\, x_{2,m} \cdot \cdot \cdot \cdot x_{n-1,m},$$

und da hier $x_{\nu,m} = sn(4\nu\omega_m, \varkappa)$, so folgt aus der Multiplicationsgleichung:

$$\prod v_m = \varrho \prod \mu \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}} = n,$$

und hieraus und aus der eben abgeleiteten Formel:

$$\prod \mu = \varrho n,$$

d. h. der Coefficient des letzten Terms der Multiplicatorgleichung ist unabhängig von $\varkappa$ und gleich $+n$ oder gleich $-n$, je nachdem $\frac{n-1}{2}$ gerade oder ungerade ist.

§ 3.

Jacobi hat im dritten Bande von Crelle's Journal (p. 308) für die Wurzeln der Multiplicatorgleichung einen Satz ausgesprochen, von dem er selbst bemerkt: „*c'est un théorème des plus importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques*“, und der aussagt, dass *zwischen den Quadratwurzeln der* $n+1$ *Wurzeln der Multiplicatorgleichung:*

$$\sqrt{\mu},\ \sqrt{\mu_0},\ \sqrt{\mu_1},\ \cdots \sqrt{\mu_{n-1}}$$

$\frac{n+1}{2}$ *lineare Relationen bestehen.* Dieselbe Eigenthümlichkeit hat Statt, wie Jacobi zufügt, für die Gleichungen, welche $\lambda\mu$, $\lambda'\mu$, $\cdots$ durch $\varkappa$ ausdrücken.

Sei

$$e^{\frac{-\pi K'}{K}} = q,$$

so ist bekanntlich:

$$\sqrt{K} = \sum q^{g^2}, \quad \sqrt{K\varkappa} = \sum q^{\frac{1}{4}h^2}, \quad \sqrt{K\varkappa'} = \sum (-1)^g q^{g^2},$$

wo g alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft und h alle *ungeraden* positiven und negativen Zahlen*). Man hat ferner:

$$\sqrt{\Lambda} = \sum q^{ng^2}, \qquad \sqrt{\Lambda_m} = \sum q_m^{g^2},$$

wo $q_m = \varepsilon^m q^{\frac{1}{n}}$ und $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. So kommt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Lambda\lambda} &= \sum q^{\frac{1}{4}nh^2}, & \sqrt{\Lambda_m\lambda_m} &= \sum q_m^{\frac{1}{4}h^2}, \\ \sqrt{\Lambda\lambda'} &= \sum (-1)^g q^{ng^2}, & \sqrt{\Lambda_m\lambda'_m} &= \sum (-1)^g q_m^{g^2}, \end{aligned}$$

und weiter:

$$(16)\quad \begin{aligned} \sqrt{K\mu} &= \sqrt{\varrho n} \sum q^{ng^2}, & \sqrt{K\mu_m} &= \sum q_m^{g^2}, \\ \sqrt{K\lambda\mu} &= \sqrt{\varrho n} \sum q^{\frac{1}{4}nh^2}, & \sqrt{K\mu_m\lambda_m} &= \sum q^{\frac{1}{4}h^2}. \\ \sqrt{K\lambda'\mu} &= \sqrt{\varrho n} \sum (-1)^g q^{ng^2}, & \sqrt{K\mu_m\lambda'_m} &= \sum (-1)^g q_m^{g^2}. \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt die doppelt unendliche Reihe:

$$\sum q_m^{g^2}$$

---

*) Diese zweckmässige Bezeichnung wurde neuerdings von Prof. Kronecker eingeführt in seiner Note: Ueber die algebraischen Gleichungen, von denen die Theilung der elliptischen Functionen abhängt, Monatsberichte der k. Akademie zu Berlin, 19. Juli 1875.

und bemerken, dass g in ihr alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so werden wir statt g das Binom $gn+s$ setzen können, wo s die Werthe annimmt $0, 1, 2, \cdots n-1$. Dadurch wird die Reihe:

$$\sum_0^{n-1}{}_s\, \varepsilon^{ms^2} \cdot q^{\frac{s^2}{n}} \cdot \sum q^{ng^2+2sg},$$

und dieser Ausdruck ändert sich nicht, wenn man s in $-s$ verwandelt, da man statt g, $-g$ setzen darf. Es wird daher gleich sein:

$$\sum q^{ng^2} + 2\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_s\, \varepsilon^{ms^2} q^{\frac{s^2}{n}} \sum q^{ng^2+2sg},$$

und setzt man:

$$a_0\sqrt{K} = \sum q^{ng^2}, \qquad a_s\sqrt{K} = 2q^{\frac{s^2}{n}} \sum q^{ng^2+2sg},$$

so kommt also:

$$(17) \qquad \sqrt{\mu} = \sqrt{\varrho\, n} \cdot a_0, \qquad \sqrt{\mu_m} = a_0 + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_s\, \varepsilon^{ms^2} \cdot a_s.$$

Da die $a_0, a_1, \cdots a_{\frac{n-1}{2}}$ in der Zahl $\frac{n+1}{2}$ vorhanden sind, so bestehen, wie Jacobi angab, $\frac{n+1}{2}$ lineare Relationen zwischen den Quadratwurzeln der Wurzeln der Multiplicatorgleichung. Auf ähnliche Weise erhält man die Formeln:

$$\sqrt{\mu_m\lambda_m} = \sum q^{\frac{1}{4}nh^2} + 2\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_s\, \varepsilon^{ms^2} q^{\frac{s^2}{n}} \sum q^{\frac{1}{4}nh^2+sh},$$

$$\sqrt{\mu_m\lambda'_m} = \sum (-1)^g q^{ng^2} + 2\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_s (-1)^s \varepsilon^{ms^2} q^{\frac{s^2}{n}} \sum (-1)^g q^{ng^2+2sg},$$

welche zeigen, dass dieselbe Eigenthümlichkeit für die Wurzeln der Gleichungen Statt hat, die $\lambda\mu$, $\lambda'\mu$ geben. — Die $\frac{n+1}{2}$ linearen Relationen, welche aus (17) folgen, sind diese:

$$\sum_m \sqrt{\mu_m} = \varrho\sqrt{\varrho n \mu}, \qquad \sum_m \varepsilon^{mr}\sqrt{\mu_m} = 0, \qquad (m = 0, 1, \cdots n-1),$$

wo r quadratischer Rest von n ist, wenn $\frac{n-1}{2}$ ungerade ist, und quadratischer Nichtrest im anderen Falle.

Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung und aller anderen Gleichungen, deren Wurzeln die von Jacobi angegebene Eigenschaft haben,

— Gleichungen, welche nach Galois' Ausdrucksweise dieselbe *Gruppe* haben, wie die Multiplicatorgleichung, oder, nach Kronecker, denselben *Affect* —, lassen sich wegen der Formeln (17) als rationale ganze Functionen von $\frac{n+1}{2}$ Grössen $a_0, a_1, \cdots a_{\frac{n-1}{2}}$ darstellen.

Für $n = 3$ kommt:

$$\sqrt{z} = a_0 \sqrt{-3}, \quad \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1, \quad (m = 0, 1, 2)$$

und die Gleichung wird:

$$z^4 - 6az^2 + bz - 3a^2 = 0, \tag{19}$$

wo

$$a = a_0(a_0^3 + a_1^3), \quad b = 8a_0^6 - 20a_0^3 a_1^3 - a_1^6.$$

Für $n = 5$ hat man:

$$\sqrt{z} = a_0 \sqrt{5}, \quad \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1 + \varepsilon^{4m} a_2, \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4),$$

und es ergiebt sich als Gleichung:

$$\begin{gathered}(z-a)^6 - 4a(z-a)^5 + 10b(z-a)^3 - 4c(z-a) + 5b^2 - 4ac = 0,\\ a = a_0^2 + a_1 a_2, \quad b = 8a_0^4 a_1 a_2 - 2a_0^2 a_1^2 a_2^2 + a_1^3 a_2^3 - a_0(a_1^5 + a_2^5),\\ c = 80 a_0^6 a_1^2 a_2^2 - 40 a_0^4 a_1^3 a_2^3 + 5 a_0^2 a_1^4 a_2^4\\ - a_0(32a_0^4 - 20a_0^2 a_1 a_2 + 5a_1^2 a_2^2)(a_1^5 + a_2^5) + \frac{1}{4}(a_1^5 + a_2^5)^2.\end{gathered} \tag{20}$$

Die Multiplicatorgleichung wird, im ersten Falle:

$$a = 1, \quad b = 8(1 - 2\varkappa^2),$$

im zweiten:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -64\varkappa^2\varkappa'^2.$$

§ 4.

Bezeichnet man allgemein für eine Transformation n^{ter} Ordnung die Multiplicatorgleichung mit

$$f(\mu, \varkappa) = 0,$$

und erinnert man, dass der Coefficient des letzten Terms von $\varkappa$ unabhängig ist, so erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial \varkappa} = \mu\, \varphi(\mu),$$

wo $\varphi(\mu)$ ein Polynom von nicht höherem als $(n-1)^{\text{tem}}$ Grade ist. Für eine beliebige Wurzel der Multiplicatorgleichung hat man daher:

$$\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi(\mu)}{f'(\mu)}\sqrt{\mu} = \psi_1(\mu)\sqrt{\mu},$$

unter $\psi_1(\mu)$ ein Polynom von niederem als dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade verstanden. Auf ähnliche Weise kommt:

$$\frac{d^2\sqrt{\mu}}{d\varkappa^2} = \psi_2(\mu)\sqrt{\mu}, \quad \frac{d^3\sqrt{\mu}}{d\varkappa^3} = \psi_3(\mu)\sqrt{\mu} \cdots$$

und offenbar genügen auch die $\frac{n-1}{2}$ so gefundenen Ausdrücke:

$$\psi_1(\mu)\sqrt{\mu},\quad \psi_2(\mu)\sqrt{\mu},\quad \cdots\ \psi_{\frac{n-1}{2}}(\mu)\sqrt{\mu}$$

dem Jacobi'schen Theoreme.

Für $n=3$ hat man einfach:

$$12\varkappa\varkappa'^2\,\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa} = -\left[\mu^3-7\mu+6\,(1-2\varkappa^2)\right]\sqrt{\mu}\,.$$

Für $n=5$ ist:

$$f(\mu,\varkappa)=(\mu-1)^6-4\,(\mu-1)^5+256\,\varkappa^2\varkappa'^2\mu=0$$

und also zunächst:

$$f'(\mu)\,\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa} = -\,256\,\varkappa\,(1-2\varkappa^2)\sqrt{\mu}\,.$$

Beachtet man jetzt die Identitäten:

$$\mu f'(\mu)=5\,(\mu-1)^4(\mu^2-4\mu-1)\,;$$
$$(\mu^2-4\mu-1)^2(\mu^2-2\mu+5)=64\,(1-2\varkappa^2)^2\mu$$

so kommt:

$$\frac{320\,(1-2\varkappa^2)^2}{f'(\mu)} = 1-8\,\frac{\mu+1}{(\mu-1)^2}-\frac{2}{\mu-1}\,,$$

und setzt man hier

$$\sqrt{\mu'}=128\,\varkappa^2\varkappa'^2\,\frac{\mu+1}{(\mu-1)^4}\sqrt{\mu},\quad \sqrt{\mu''}=-\,128\,\varkappa^2\varkappa'^2\,\frac{1}{\mu-1}\sqrt{\mu},$$

so ergiebt sich:

$$(21)\quad \begin{cases} 400\,\varkappa\,\varkappa'^2\,\dfrac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa} = -\,320\,\varkappa^2\varkappa'^2\sqrt{\mu}+20\sqrt{\mu'}-5\sqrt{\mu''} \\[2ex] 400\,\varkappa^2\varkappa'^4\,\dfrac{d^2\sqrt{\mu}}{d\varkappa^2} = -\,64\,\varkappa^2\varkappa'^2\,(1+3\varkappa^2)\sqrt{\mu}-4\,(3-11\varkappa^2)\sqrt{\mu'}-5\varkappa^2\sqrt{\mu''}, \end{cases}$$

wo die Ausdrücke $\sqrt{\mu'}$, $\sqrt{\mu''}$ die von Jacobi ausgesprochene Eigenschaft besitzen. Offenbar hat dieselbe Eigenthümlichkeit Statt bei allen Ausdrücken der Form:

$$(22)\qquad \sqrt{M}=p\sqrt{\mu}+q\sqrt{\mu'}+r\sqrt{\mu''}\,,$$

wo p, q, r Functionen von $\varkappa$ sind.

Wie das Folgende zeigt, ist es wichtig, hier zu bemerken, dass der Coefficient des zweiten Gliedes in der Gleichung für M gleich ist dem Producte aus (-10) in den Ausdruck

$$(23)\qquad p^2-\frac{1}{4}\,m\,(q^2+2pr+8qr),$$

wo $m=4^4\varkappa^2\varkappa'^2$. Dieser Ausdruck wird offenbar Null, 1) wenn $p=q=0$; 2) wenn $p=64\,\varkappa^2\varkappa'^2$, $q=-\,8\varkappa^2$, $r=1$; 3) wenn $p=-\,64\,\varkappa^2\varkappa'^2$, $q=8\varkappa'^2$, $r=-\,1$.

Im ersten Falle haben wir, wenn $r^2 = \frac{4}{m}$:

$$M = -(\mu-1)^3(\mu-5)$$

und die Gleichung für M wird:

$$M^6 - 10m^2M^3 - m^3(16-m)M + 5m^4 = 0,$$

welche durch Vergleich mit der allgemeinen Gleichung (20) für a, b, c die Werthe ergiebt:

$$a = 0, \quad b = -4^8\varkappa^4\varkappa'^4, \quad c = 4^{13}\varkappa^6\varkappa'^6(1-16\varkappa^2\varkappa'^2).$$

Die Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Functionen bietet also zwei Reihen von Gleichungen, welche die von Jacobi angegebene Eigenschaft besitzen; sie sind beide in der allgemeinen Gleichung (20) enthalten, aber in dem einen Falle ist $b = 0$, in dem anderen $a = 0$. Es ist bemerkenswerth, dass in beiden Fällen die nicht numerischen Coefficienten der Gleichung sich auf einen einzigen reduciren lassen.

In der That, wenn $b = 0$, so erhält man für $z - a = ay$ die transformirte Gleichung:

$$y^6 - 4y^5 - 4\frac{c}{a^5}y - 4\frac{c}{a^5} = 0,$$

und wenn $a = 0$, so kommt für $z\sqrt[3]{b} = y$:

$$y^6 + 10y^3 - 4\frac{c}{b^{5/3}}y + 5 = 0.$$

§ 5.

Setzt man

$$\gamma_s = \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{cn\cdot 2s\omega}{dn\cdot 2s\omega},$$

so hat man die beiden Transformationsformeln:

$$B\sqrt{\varkappa - x^2}\cdot\Pi(\gamma_s^2 - x^2) - \sqrt{\lambda - y^2}\cdot V(x) = 0,$$
$$B\sqrt{1 - \varkappa x^2}\cdot\Pi(1 - \gamma_s^2x^2) - \sqrt{1 - \lambda y^2}\cdot V(x) = 0.$$

Macht man nun in (1) und in der letzten der voranstehenden Gleichungen $u = K$, so erhält man:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{U(\sqrt{\varkappa})}{V(\sqrt{\varkappa})}, \quad \lambda^2 = \frac{\varkappa'^n}{\Pi dn^2\, 2s\omega}\cdot\frac{B}{V(\sqrt{\varkappa})}.$$

Aber aus dem Werthe (6) von V folgt:

$$V(\sqrt{\varkappa}) = B\,\Pi dn^2\, 2s\omega,$$

und also kommt:

$$V(\sqrt{\varkappa}) = \frac{\varkappa'^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda'}}B; \quad U(\sqrt{\varkappa}) = \varkappa'^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}\,B,$$

und hieraus, mit Rücksicht auf den Werth von B:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \varkappa'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\mu} &= B + B_1\varkappa + B_2\varkappa^2 + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}}\cdot\varkappa^{\frac{n-1}{2}} \\ \varkappa'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\mu\frac{\lambda}{\varkappa}} &= B\varkappa^{\frac{n-1}{2}} + B_1\varkappa^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + B_{\frac{n-3}{2}}\varkappa + B_{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Die nach α oder $\varkappa$ genommenen Differentialquotienten von $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{\mu\frac{\lambda}{\varkappa}}$ und der anderen analogen Ausdrücke lassen sich offenbar, vermöge der in Gleichung (7) ausgesprochenen Eigenschaft der Coefficienten B, als lineare Functionen dieser Coefficienten ausdrücken; man hat z. B.:

$$n\varkappa'^{\frac{n-1}{2}}\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa} = B_1 + 2B_2\varkappa + 3B_3\varkappa^2 + \cdots + \frac{n-1}{2}B_{\frac{n-1}{2}}\varkappa^{\frac{n-3}{2}}.$$

Daher bestehen folgende Theoreme:

1) *Die Coefficienten B, B_1, B_2, $\cdots$ lassen sich durch lineare Functionen der Quadratwurzel aus dem Multiplicator und ihrer nach dem Modul bis zu der $\frac{n-1}{2}$ten Ordnung hin genommenen Differentialquotienten ausdrücken.*

2) *Die aus dem Multiplicator gezogene Quadratwurzel genügt einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung $\frac{n+1}{2}$.*

Bei der Transformation dritter Ordnung haben wir:

$$B = \varkappa'\sqrt{\mu} - 3\varkappa\varkappa'\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa}, \quad B_1 = 3\varkappa'\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa},$$

und die Quadratwurzel aus dem Multiplicator genügt daher der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$3\varkappa\varkappa'^2\frac{d^2\sqrt{\mu}}{d\varkappa^2} + (1-5\varkappa^2)\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa} + \varkappa\sqrt{\mu} = 0,$$

welche für $\varkappa^2 = \xi$ in die hypergeometrische Differentialgleichung übergeht:

$$(26)\qquad \frac{d^2\sqrt{\mu}}{d\xi^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)}\,\frac{d\sqrt{\mu}}{d\xi} + \frac{\sqrt{\mu}}{12\xi(1-\xi)} = 0.$$

Für $n = 5$ hat man:

$$(27)\qquad \begin{aligned} 6B &= 2(2\varkappa^2+3)\sqrt{\mu} - 5\varkappa(5\varkappa^2+3)\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa} + 25\varkappa^2\varkappa'^2\frac{d^2\sqrt{\mu}}{d\varkappa^2}, \\ 3B_1 &= -10\varkappa\sqrt{\mu} + 40\varkappa^2\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa} - 25\varkappa\varkappa'^2\frac{d^2\sqrt{\mu}}{d\varkappa^2}, \\ 6B_2 &= 10\sqrt{\mu} + \frac{5}{\varkappa}(3-11\varkappa^2)\frac{d\sqrt{\mu}}{d\varkappa} + 25\varkappa'^2\frac{d^2\sqrt{\mu}}{d\varkappa^2}, \end{aligned}$$

und hieraus vermöge der Gleichungen (21):

$$\sqrt{\mu'} = 4\varkappa(2B\varkappa + B_1), \quad \sqrt{\mu''} = -32\varkappa^2(B + B_1\varkappa + B_2)$$

und endlich für $\varkappa^2 = \xi$

$$(28)\quad \frac{d^3\sqrt{\mu}}{d\xi^3} + 2\,\frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)}\,\frac{d^2\sqrt{\mu}}{d\xi^2} + \frac{1}{25}\,\frac{49\xi^2-49\xi+4}{\xi^2(1-\xi)^2}\,\frac{d\sqrt{\mu}}{d\xi} + \frac{1}{50}\,\frac{1-2\xi}{\xi^2(1-\xi)^2}\sqrt{\mu} = 0,$$

eine lineare Differentialgleichung der dritten Ordnung.

Man bemerke, dass vermöge der Relationen (27) und wegen $B = \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{\varkappa'}}$ die soeben angegebenen Werthe von $\sqrt{\mu'}$, $\sqrt{\mu''}$ zu folgenden Gleichungen führen:

$$\sqrt{\mu''} = -32\,\varkappa^2\varkappa'^2\left[\sqrt{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}} + \sqrt{\frac{\lambda'\mu'}{\varkappa'}}\right],$$

$$64\varkappa^2\varkappa'^2\sqrt{\mu} - 8\varkappa^2\sqrt{\mu'} + \sqrt{\mu''} = 32\varkappa^2(1-2\varkappa^2)\left[\sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}}\right],$$

$$-64\varkappa^2\varkappa'^2\sqrt{\mu} + 8\varkappa'^2\sqrt{\mu'} - \sqrt{\mu''} = 32\varkappa'^2(1-2\varkappa^2)\left[\sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{\varkappa'}}\right],$$

wo die ersten Glieder diejenigen Werthe von $\sqrt{M}$ (22) vorstellen, in denen für p, q, r die Ausdrücke eingesetzt sind, welche (23) zu Null machen. Für die Gleichungen daher, deren Wurzeln gleich sind:

$$\left[\sqrt{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}} + \sqrt{\frac{\lambda'\mu'}{\varkappa'}}\right]^2, \quad \left[\sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}}\right]^2, \quad \left[\sqrt{\mu} - \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{\varkappa'}}\right]^2,$$

ist der Coefficient a gleich Null.

Um ein Beispiel für die Differentialgleichungen dritter Ordnung zu erhalten, welche diesen letzten Gleichungen entsprechen, bemerke man, dass für

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}} + \sqrt{\frac{\lambda'\mu'}{\varkappa'}}$$

vermöge der oben angegebenen Relationen sich ergiebt:

$$B + B_1\varkappa + B_2 = \varkappa'^2\sqrt{\tau}$$

und also wegen der Eigenschaften der B:

$$(29)\quad \frac{d^3\sqrt{\tau}}{d\xi^3} + 3\,\frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)}\,\frac{d^2\sqrt{\tau}}{d\xi^2} + \frac{3}{25}\cdot\frac{8-53\xi+53\xi^2}{\xi^2(1-\xi)^2}\,\frac{d\sqrt{\tau}}{d\xi} - \frac{9}{50}\,\frac{1-2\xi}{\xi^2(1-\xi)^2}\sqrt{\tau} = 0,$$

wo $\xi = \varkappa^2$. Gleichzeitig ergiebt wegen $\sqrt{M} = -4\varkappa\varkappa'\sqrt{\tau}$ die oben für M berechnete Gleichung für τ folgende Werthe:

$$a = 0, \qquad b = -\frac{4}{\varkappa^2\varkappa'^2}, \qquad c = 4^3\,\frac{1-16\varkappa^2\varkappa'^2}{\varkappa^4\varkappa'^4}.$$

§ 6.

Setzt man

$$\Delta(x, \varkappa) = \sqrt{(\varkappa - x^2)(1-\varkappa x^2)},$$

so hat man vermöge (2):

$$\frac{dy}{\Delta(y,\lambda)} = \mu\,\frac{dx}{\Delta(x,\varkappa)}\,.$$

Jetzt sei vermittelst zweier Transformationen derselben Ordnung:

$$(30)\qquad \frac{d\xi}{\Delta(\xi,h)} = p\,\frac{dx}{\Delta(x,\varkappa)}\,,\qquad \frac{d\eta}{\Delta(\eta,l)} = q\,\frac{dy}{\Delta(y,\lambda)}\,,$$

so hat man auch

$$\frac{d\eta}{\Delta(\eta,l)} = \nu\,\frac{d\xi}{\Delta(\xi,h)}\,,$$

wo

$$\nu = \frac{q}{p}\cdot\mu\,.$$

Entspricht dieser letzten Formel eine Transformation der n^{ten} Ordnung, so bestehen, den Gleichungen (25) entsprechend, die Relationen:

$$h'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\nu} = C + C_1 h + C_2 h^2 + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}\, h^{\frac{n-1}{2}}\,,$$

$$h'^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{l\nu}{h}} = C h^{\frac{n-1}{2}} + C_1 h^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}\,,$$

wo offenbar die C, $C_1, \cdots$ sich eins aus dem anderen ableiten, wie die B, $B_1, \cdots$. Nehmen wir nun insbesondere an, dass die den Gleichungen (30) entsprechenden Transformationen von der zweiten Ordnung sind, so erhält man, wie bekannt, die Werthe von $\sqrt{\nu}$, $\sqrt{\nu_m}$ indem man in denjenigen doppelt unendlichen Reihen, welche die Werthe von $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{\mu_m}$ darstellen, q in q^2 verwandelt; d. h. die Quadratwurzeln aus den $n+1$ Werthen von ν befriedigen $\frac{n+1}{2}$ lineare Relationen, die man offenbar aus den für die $\sqrt{\mu}$ bestehenden erhält, indem man in letzteren ε durch ε^2 ersetzt. Es giebt also eine zweite Classe von Gleichungen, welche die von Jacobi angegebene Eigenschaft besitzen. Für sie bestehen die Relationen:

$$(31)\qquad \sum_0^{n-1}\sqrt{\nu_m} = -\varrho\sqrt{\varrho n\nu}\,,\qquad \sum_0^{n-1}\varepsilon^{mr}\sqrt{\nu_m} = 0\,,$$

wo in der zweiten r einen quadratischen Rest von n bedeutet, wenn $\frac{n-1}{2}$ gerade ist, und einen quadratischen Nichtrest, wenn $\frac{n-1}{2}$ ungerade ist. Die Unterscheidung dieser beiden Classen von Gleichungen verdankt man Hrn. Kronecker.

Eine beliebige der 18 Transformationen zweiter Ordnung führt zur Auffindung solcher Functionen μ, welche den neuen Relationen genügen. Sei z. B.:

$$h = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\,,\quad l = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}\,;\quad p = 1+\varkappa\,,\quad q = 1+\lambda\,,$$

so kommt:

$$\frac{l\nu}{h} = \mu \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}},$$

und also befriedigen die Quadratwurzeln aus den $(n+1)$ Werthen von $\mu \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}$ die Bedingungen (31). Wir haben bereits im § 1. diejenigen beiden Gleichungen vom vierten und sechsten Grade aufgestellt, denen die Werthe von $v = \mu \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}$ genügen. Bemerken wir jetzt, dass für $n = 3$ sich vermöge (25):

$$\varkappa' \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}} = B\varkappa + B_1,$$

folgende Formel ergiebt:

$$\sqrt{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}} = -\frac{1}{4\varkappa}\left(\mu^3 - 7\mu + 2(3 - 8\varkappa^2)\right)\sqrt{\mu},$$

und aus ihr:

$$v = \frac{1}{4\varkappa}(\mu - 1)(\mu + 3),$$

so gewinnt man, unter φ, ψ folgende Ausdrücke verstanden:

$$\varphi(\mu) = [\mu^3 - 5\mu + 8(1 - 2\varkappa^2)]\sqrt{\mu}, \qquad \psi(\mu) = (\mu^2 - 5)\sqrt{\mu}$$

als Gleichung vierten Grades für μ:

$$\sqrt{v} = \frac{1}{8\varkappa\sqrt{\varkappa}}[\varphi(\mu) + \psi(\mu)].$$

Da nun

$$v = \frac{1+\lambda}{1+\varkappa}\mu,$$

so kommt:

$$v = \frac{1}{4\varkappa(1+\varkappa)}[\mu^3 + \mu^2 + (4\varkappa - 5)\mu + 3(1 - 4\varkappa^2)]$$

und weiter:

$$\sqrt{v} = \frac{1}{8\varkappa(1+\varkappa)}[(1 + 2\varkappa)\varphi(\mu) + \psi(\mu)].$$

Das heisst: die Functionen $\varphi(\mu)$, $\psi(\mu)$ befriedigen die Relationen (31) und alle Functionen, welche diese Eigenschaft besitzen, werden lineare Functionen derselben sein.

Für $n = 5$ giebt die zweite der Gleichungen (25) vermöge der Werthe (27):

$$-64\varkappa^2(1 - 2\varkappa^2)\mu\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}} = \mu^5 - 9\mu^4 + 2(13 + 4\varkappa^2)\mu^3 - 2(17 + 20\varkappa^2)\mu^2 + 7(3 + 8\varkappa^2)\mu - 5(1 - 8\varkappa^2).$$

Setzt man hier:

$$\varphi(\mu) = [\mu^5 - 10\mu^4 + 35\mu^3 - 59\mu^2 + 48\mu - 15 + 4^4\varkappa^2\varkappa'^2]\sqrt{\mu},$$

$$\varphi_1(\mu) = [\mu^3 - 7\mu^2 + 11\mu - 5]\sqrt{\mu}, \qquad \varphi_2(\mu) = (\mu - 3)\sqrt{\mu},$$

so erhält man:

$$\sqrt{v} = \frac{1}{32\varkappa(1-2\varkappa^2)}[\varphi(\mu) + \varphi_1(\mu) + 16\varkappa^2\varphi_2(\mu)]$$

d. h. die drei Functionen $\varphi(\mu)$, $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$ befriedigen die Relationen (31) und alle Ausdrücke, welche dieselbe Eigenschaft haben, sind linear aus ihnen zusammengesetzt.

Man kann noch bemerken, dass zu diesen Resultaten auch die Ausdrücke hinleiten, welche den betrachteten quadratischen Transformationen selbst entsprechen, nämlich:

$$\xi\sqrt{h} = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \eta\sqrt{l} = \frac{2y}{1+y^2},$$

indem man vermöge derselben leicht die Werthe der Verhältnisse der Grössen C in Function der B erhält.

Indem wir das Vorangehende zusammenfassen, können wir sagen, dass die Transformation der elliptischen Functionen zwei Classen von Gleichungen darbietet, bei denen die Quadratwurzeln aus den Wurzeln die Jacobi'schen Relationen befriedigen. Zur ersten Classe gehören diejenigen, deren Wurzeln die $(n+1)$ Werthe sind:

$$\mu, \quad \frac{\lambda\mu}{\varkappa}, \quad \frac{\lambda'\mu}{\varkappa'}, \quad \frac{\lambda\lambda'}{\varkappa\varkappa'}\mu^3, \ldots$$

zur zweiten die anderen, deren Wurzeln folgende $(n+1)$ Werthe haben:

$$\mu\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}, \quad \mu\sqrt{\frac{\lambda'}{\varkappa'}}, \quad \mu\sqrt{\frac{\lambda\lambda'}{\varkappa\varkappa'}}, \quad \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\mu^3\sqrt{\frac{\lambda'}{\varkappa'}}, \quad \frac{\lambda'^2}{\varkappa'^2}\mu^3\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}, \ldots$$

Zweiter Abschnitt.

Die Eigenschaften der Jacobi'schen Gleichungen vom vierten und vom sechsten Grade.*)

§ 1.

Wie im vorhergehenden Abschnitte bewiesen ist, haben die Wurzeln der Gleichungen (19), (20) vom vierten und vom sechsten Grade die von Jacobi für die Multiplicatoren bei Transformation dritter oder fünfter Ordnung ausgesprochene Eigenschaft; ich werde also diese allgemeinen Gleichungen als *Jacobi'sche Gleichungen* bezeichnen.

Die Wurzeln der Gleichungen vierten Grades:

$$f(z) = z^4 - 6az^2 + bz - 3a^2 = 0 \tag{1}$$

---

*) Dieser Abschnitt enthält die Resultate, welche in folgenden Arbeiten abgeleitet wurden: 1) Sur une classe d'équations du quatrième dégré. Comptes Rendus 13 Juillet 1863; 2) La soluzione più generale delle equazioni del 5⁰ grado. — Parte prima. Annali di Matematica. Anno 1867. Vol. 1⁰.

befriedigen somit die zwei Bedingungen:

(2) $\sqrt{z_0}+\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}=-3\sqrt{-3z},\quad \sqrt{z_0}+\varepsilon\sqrt{z_1}+\varepsilon^2\sqrt{z_2}=0,$

und setzt man

$$\sqrt{z}=a_0\sqrt{-3},\quad \sqrt{z_0}+\varepsilon^2\sqrt{z_1}+\varepsilon\sqrt{z_2}=3a_1,$$

so hat man:

$$a=a_0(a_0^3+a_1^3),\quad b=8a_0^6-20a_0^3a_1^3-a_1^6.$$

Bezeichnet man jetzt mit $f'(z)$ den nach z genommenen Differentialquotienten der linken Seite von $f(z)=0$, so erhält man leicht:

$$z^3-7az+\frac{3}{4}b=-\frac{3}{4}\frac{64a^3-b^2}{f'(z)},$$

oder also aus (1):

$$\frac{3}{2}(64a^3-b^2)\frac{d\sqrt{z}}{db}=\left(z^3-7az+\frac{3}{4}b\right)\sqrt{z}.$$

Die Ausdrücke von der Art des hier rechts auftretenden Gliedes befriedigen daher ebenfalls zwei lineare Relationen (2), und im Allgemeinen, wenn man setzt:

$$\sqrt{Z}=p\sqrt{z}+q\,(z^3-7az+b)\sqrt{z},$$

wo $p, q,$ Functionen von a, b sind, so hat man immer:

$$\sqrt{Z_0}+\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z_2}=-\sqrt{-3Z},\quad \sqrt{Z_0}+\varepsilon\sqrt{Z_1}+\varepsilon^2\sqrt{Z_2}=0$$

und die Z, Z_0, Z_1, Z_2 sind die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades:

$$Z^4-6AZ^2+BZ-3A^2=0,$$

wo A, B wieder Functionen von a, b sind.

Man zeigt ferner mit Leichtigkeit, vermöge der Werthe, welche $\sqrt{z}, \sqrt{z_0}\cdots$ in a_0, a_1 besitzen, dass folgende zwei Reihen von Ausdrücken:

$$(z^3-5az+b)\sqrt{z},\quad (z^2-5a)\sqrt{z}$$

und überhaupt, unter p, q Functionen von a, b verstanden, die Grössen:

$$\sqrt{Z}=p\,(z^3-5az+b)\sqrt{z}+q\,(z^2-5a)\sqrt{z}$$

der zweiten Reihe von Relationen genügen:

$$\sqrt{Z_0}+\sqrt{Z_1}+\sqrt{Z_2}=\sqrt{-3Z},\quad \sqrt{Z_0}+\varepsilon^2\sqrt{Z_1}+\varepsilon\sqrt{Z_2}=0.$$

Diese Resultate finden unmittelbare Verwendung bei einer geometrischen Frage, die sich auf die Theorie der ternären cubischen Formen bezieht*).

Setzt man in der Gleichung (1) $y=z\sqrt{a}$ und dividirt die Gleichung durch a^2, so kommt:

---

*) Siehe die Note in den Comptes Rendus, welche oben citirt ist, und eine Note von Hrn. Hermite — Sur la résolution de l'équation du quatrième dégré — in den Comptes Rendus von demselben Jahre.

$$y^4 - 6y^2 + 8my - 3 = 0,$$

wo $8m = \frac{b}{a\sqrt{a}}\cdot$ Aus ihr leitet man wie oben ab:

$$12(1-m^2)\frac{d\sqrt{y}}{dm} = (y^3 - 7y + 6m)\sqrt{y},$$

und durch nochmalige Differentiation gelangt man zu der linearen Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$12(1-m^2)\frac{d^2\sqrt{y}}{dm^2} - 16m\frac{d\sqrt{y}}{dm} + \sqrt{y} = 0,$$

welche mit (26) [Abschn. I] zusammenfällt, sobald man setzt

$$m = 1 - 2\xi, \quad y = \mu.$$

§ 2.

Die allgemeine Jacobi'sche Gleichung vom sechsten Grade ist:

(2) $(z-a)^6 - 4a(z-a)^5 + 10b(2-a)^3 - 4c(z-a) + 5b^2 - 4ac = 0;$

ihre Wurzeln genügen den drei Relationen:

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned} &\sqrt{z_0} + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} + \sqrt{z_4} = \sqrt{5z},\\ &\sqrt{z_0} + \varepsilon^2\sqrt{z_1} + \varepsilon^4\sqrt{z_2} + \varepsilon\sqrt{z_3} + \varepsilon^3\sqrt{z_4} = 0,\\ &\sqrt{z_0} + \varepsilon^3\sqrt{z_1} + \varepsilon\sqrt{z_2} + \varepsilon^4\sqrt{z_3} + \varepsilon^2\sqrt{z_4} = 0, \end{aligned}$$

und die Coefficienten a, b, c sind (Glch. (20) des Abschn. I) Functionen der drei Grössen a_0, a_1, a_2, welche durch folgende Gleichungen gegeben sind:

(4) $\sqrt{z} = a_0\sqrt{5}, \quad \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1 + \varepsilon^{4m} a_2, \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4).$

Bemerken wir zunächst, dass vermöge des Werthes von a sich ergiebt:

$$\frac{da}{da_0} = 2a_0, \qquad \frac{da}{da_1} = a_2, \qquad \frac{da}{da_2} = a_1.$$

Setzen wir entsprechend:

$$\frac{db}{da_0} = 2b_0, \qquad \frac{db}{da_1} = b_2, \qquad \frac{db}{da_2} = b_1,$$

$$\frac{1}{5}\frac{dc}{da_0} = 2c_0, \quad \frac{1}{5}\frac{dc}{da_1} = c_2, \quad \frac{1}{5}\frac{dc}{da_2} = c_1,$$

so folgt aus (4):

$$\begin{aligned} 2\left[a_0\frac{d\sqrt{z_m}}{da} + b_0\frac{d\sqrt{z_m}}{db} + 5c_0\frac{d\sqrt{z_m}}{dc}\right] &= \frac{d\sqrt{z_m}}{da_0} = 1,\\ a_2\frac{d\sqrt{z_m}}{da} + b_2\frac{d\sqrt{z_m}}{db} + 5c_2\frac{d\sqrt{z_m}}{dc} &= \frac{d\sqrt{z_m}}{da_1} = \varepsilon^m,\\ a_1\frac{d\sqrt{z_m}}{da} + b_1\frac{d\sqrt{z_m}}{db} + 5c_1\frac{d\sqrt{z_m}}{dc} &= \frac{d\sqrt{z_m}}{da_2} = \varepsilon^{4m}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man hier der Reihe nach mit a_0, a_1, a_2, dann mit b_0, b_1, b_2,

endlich mit c_0, c_1, c_2 und summirt jedesmal, so kommt für jede Wurzel z:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\sqrt{z} = a\,\frac{d\sqrt{z}}{da} + n\,\frac{d\sqrt{z}}{db} + 5m\,\frac{d\sqrt{z}}{dc},\\
(5)\qquad &\tfrac{1}{2}\sqrt{z'} = n\,\frac{d\sqrt{z}}{da} + a'\,\frac{d\sqrt{z}}{db} + 5l\,\frac{d\sqrt{z}}{dz},\\
&\tfrac{1}{2}\sqrt{z''} = m\,\frac{d\sqrt{z}}{da} + l\,\frac{d\sqrt{z}}{db} + 5a''\,\frac{d\sqrt{z}}{dc},
\end{aligned}$$

wo

$$(6)\qquad \sqrt{z'_m} = b_0 + \varepsilon^m b_1 + \varepsilon^{4m} b_2, \qquad \sqrt{z''_m} = c_0 + \varepsilon^m c_1 + \varepsilon^{4m} c_2,$$

und

$$\begin{aligned}
&a_0^2 + a_1 a_2 = a, \qquad 2b_0c_0 + b_1c_2 + b_2c_1 = 2l,\\
(7)\qquad &b_0^2 + b_1 b_2 = a', \qquad 2c_0a_0 + c_1a_2 + c_2a_1 = 2m,\\
&c_0^2 + c_1 c_2 = a'', \qquad 2a_0b_0 + a_1b_2 + a_2b_1 = 2n.
\end{aligned}$$

Offenbar genügen die Ausdrücke $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ ähnlichen Relationen wie (3) und geben also zu zwei neuen Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades Anlass, deren Coefficienten Functionen von a, b, c sind, und dasselbe kann gesagt werden von dem allgemeineren

$$(8)\qquad \sqrt{Z} = p\sqrt{z} + q\sqrt{z'} + r\sqrt{z''},$$

wo p, q, r Functionen von a, b, c sind.

Die Werthe der Ausdrücke (7) a', a'', $\cdots$ berechnen sich ziemlich leicht und sind diese:

$$\begin{aligned}
&a' = 8a^2b + c, \qquad a'' = b(4ac - 3b^2),\\
&l = a(4ac - b^2), \qquad m = c, \qquad n = 3b.
\end{aligned}$$

Setzt man also:

$$h = \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & a' & l \\ m & l & a'' \end{vmatrix},$$

das heisst:

$$(9)\qquad h = 27b^5 - c^3 - 25a^3b^4 + 40a^4b^2c + 20a^2bc^2 - 45ab^3c - 16a^5c^2,$$

so kommt:

$$\begin{aligned}
&2h\,\frac{d\sqrt{z}}{da} = e\sqrt{z} + \varphi\sqrt{z'} + f\sqrt{z''} = P,\\
(10)\qquad &2h\,\frac{d\sqrt{z}}{db} = \varphi\sqrt{z} + f\sqrt{z'} + \varepsilon\sqrt{z''} = Q,\\
&10h\,\frac{d\sqrt{z}}{dc} = f\sqrt{z} + \varepsilon\sqrt{z'} + g\sqrt{z''} = R,
\end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned}
&e = 40a^3b^2c + 4abc^2 - 25a^2b^4 - 3b^3c - 16a^4c^2,\\
(11)\qquad &f = 4a^2bc - 3ab^3 - c^2, \qquad g = 8a^3b + ac - 9b^2,\\
&\varepsilon = 3bc - 4a^3c + a^2b^2, \qquad \varphi = 4a^2c^2 - 13ab^2c + 9b^4.
\end{aligned}$$

Die Werthe von $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ in Function von $\sqrt{z}$ leiten sich aus (6) ab mit Hilfe der Werthe der Coefficienten a, b, c unter Benutzung der Gleichung sechsten Grades. Man findet:

$$2(a^3-b)\sqrt{z'}=[z^5-10az^4+35a^2z^3-61a^3z^2+11bz^2+60a^4z-35abz-25a^5 \\ +29a^2b-4c]\sqrt{z},$$

$$2\sqrt{z''}=2a^2\sqrt{z'}+[z^4-9az^3+27a^2z^2-39a^3z+9bz \\ +20a^4-14ab]\sqrt{z},$$

und aus ihnen, indem man $y=z-a$ setzt und unter $f_1, f_2, \cdots$ die Functionen versteht:

(12) $f_1=y-4a,\quad f_2=yf_1,\quad f_3=y^2f_1+10b,\quad f_4=yf_3,\quad f_5=y^2f_3-4c,$

folgende Formeln:

$$z=5a+f_1,\; z'=c-10abf_1-5bf_2-4a^2f_3+af_4-f_5,\; z''=-2bcf_1-b^2f_3+cf_4,$$

$$2\sqrt{z'z''}=-(4ac+5b^2)f_1-2cf_2-4abf_3+3bf_4,$$

$$2\sqrt{zz''}=4c-bf_2+f_5,\qquad 2\sqrt{zz'}=15b-2af_2-f_3.$$

Diese letzteren führen mit Rücksicht auf die Relationen:

$$\sum f_1=-20a,\quad \sum f_2=0,\quad \sum f_3=30b,\quad \sum f_4=0,\quad \sum f_5=-4c,$$

(wo sich das Summenzeichen auf die Wurzeln der Gleichung sechsten Grades bezieht) vermöge (8) zunächst zu der Formel:

$$\sum Z=10A,$$

wo:

$$A=ap^2+a'q^2+a''r^2+2lqr+2mrp+2npq,$$

sodann, für $Y=Z-A$, zu dem folgenden Werthe von Y:

$$Y=t+t_0f_1+t_1f_2+t_2f_3+t_3f_4+t_4f_5,$$

wo die $t, t_0, \cdots t_4$ Functionen der a, b, c, p, q, r sind. Vermöge dieser Transformationsformel geht man von einer Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades zu einer beliebigen anderen über. Setzt man z. B. in (2) $b=0$ und will eine transformirte Gleichung mit $A=0$ erhalten, so braucht man nur, da in diesem Falle:

$$A=ap^2+cq^2+8a^2cqr+2cpr,$$

$p=q=0$ zu nehmen. Setzt man dann überdiess $cr^2=1$, so wird die Transformationsformel:

$$Y=f_4=y^4-4ay^3$$

und man erhält die Gleichung:

$$Y^6+10BY^3-4CY+5B^2=0,$$

wo:

$$B=4^2a^2c^2,\qquad C=4^3c^3(c+4a^5).$$

§ 3.

Aus den Relationen (12) leitet man mit Rücksicht auf (10) die Werthe der nach a, b, c genommenen Ableitungen von $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ ab. Drückt man dieselben in Function der a, b, c und der Trinome P, Q, R (Glch. (10)) aus, so erhält man:

$$2h\frac{d\sqrt{z'}}{da}=16abQ+(12ac-5b^2)R,\quad 2h\frac{d\sqrt{z''}}{da}=4(ac-33b^2)Q-41bcR,$$

$$2h\frac{d\sqrt{z'}}{db}=5P+8a^2Q,\quad 2h\frac{d\sqrt{z''}}{db}=41abQ+(4ac-9b^2)R,$$

$$10h\frac{d\sqrt{z'}}{dc}=5Q+8a^2R,\quad 10h\frac{d\sqrt{z''}}{dc}=9P+32a^2Q+65abR,$$

Diese Resultate führen weiter zu folgenden Relationen:

$$10\left(h\frac{dP}{dc}-P\frac{dh}{dc}\right)=\alpha_1P+\beta_1Q+\gamma_1R,$$

$$10\left(h\frac{dQ}{dc}-Q\frac{dh}{dc}\right)=\alpha_2P+\beta_2Q+\gamma_2R,$$

$$10\left(h\frac{dR}{dc}-R\frac{dh}{dc}\right)=\alpha_3P+\beta_3Q+\gamma_3R,$$

wo α_1, $\alpha_2\cdots$ die folgenden Functionen von a, b, c sind:

$$\alpha_1=-f,\quad \beta_1=-(5\varphi+8a^2f),\quad \gamma_1=-(9e+32a^2\varphi-25abf),$$

$$\alpha_2=-\varepsilon,\quad \beta_2=-(5f+8a^2\varepsilon),\quad \gamma_2=-(9\varphi+32a^2f-25ab\varepsilon),$$

$$\alpha_3=-g,\quad \beta_3=-(5\varepsilon+8a^2g),\quad \gamma_3=-(9f+32a^2\varepsilon-25abg),$$

und die φ, $f\cdots$ durch (11) gegeben sind. Da nun

$$10h\frac{d^2\sqrt{z}}{dc^2}+10\frac{dh}{dc}\frac{d\sqrt{z}}{dc}=\frac{dR}{dc},$$

so folgt aus der letzten Gleichung (10):

$$10^2h^2\frac{d^2\sqrt{z}}{dc^2}=\alpha_3P+\beta_3Q+\gamma_3R.$$

Setzt man jetzt:

$$m=5\,[121a^2bc-144ab^3+128a^4b^2-96a^5c-9c^2],$$

$$\alpha=-15a,\quad b=15(8a^3-11b),\quad \gamma=3(512a^5-395a^2b+78c),$$

so erhält man durch leichte Rechnung:

$$10^2h\left[10h\frac{d^3\sqrt{z}}{dc^3}+m\frac{d^2\sqrt{z}}{dc^2}\right]=\alpha P+\beta Q+\gamma R,$$

und endlich, da:

$$h\sqrt{z}=aP+nQ+mR,$$

durch Elimination der P, Q, R die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} 10^2\left[10h\dfrac{d^3\sqrt{z}}{dc^3}+m\dfrac{d^2\sqrt{z}}{dc^2}\right] & \alpha & \beta & \gamma \\ 10^2 h\dfrac{d^2\sqrt{z}}{dc^2} & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 10h\dfrac{d\sqrt{z}}{dc} & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{z} & a & n & m \end{vmatrix}=0.$$

Nehmen wir $a=0$, so ist $h=27b^5-c^3$, also:

$$h=\frac{c^3}{t}(1-t) \text{ für } c^3=27b^5t,$$

und die Differentialgleichung formt sich in folgende um:

$$\frac{d^3\sqrt{z}}{dt^3}+\frac{1}{2}\,\frac{4-7t}{t(1-t)}\,\frac{d^2\sqrt{z}}{dt^2}+\frac{1}{900}\,\frac{200-1389t}{t^2(1-t)}\,\frac{d\sqrt{z}}{dt}+\frac{11}{5400}\,\frac{\sqrt{z}}{t^2(1-t)}=0.$$

Macht man hier:

$$\sqrt{z}=(1-t)w,$$

so wird:

$$\frac{d^3w}{dt^3}+3p\frac{d^2w}{dt^2}+\left(\frac{dp}{dt}+2p^2+4q\right)\frac{dw}{dt}+2\left(2pq+\frac{dq}{dt}\right)w=0,$$

wo:

$$p=\frac{1}{6}\,\frac{4-13t}{t(1-t)},\quad q=-\frac{29\cdot 41}{3600}\cdot\frac{1}{t(1-t)};$$

es lässt sich also w ausdrücken vermittelst zweier hypergeometrischer Reihen, welche die Differentialgleichung befriedigen:

$$\frac{d^2w}{dt^2}+p\frac{dw}{dt}+qw=0.$$

§ 4.

Dividirt man die Glieder der linken Seite der Gleichung (20) [Absch. I] durch:

$$(z-a)^6\,(5b^2-4ac),$$

und setzt man:

$$\xi-\alpha=\frac{1}{z-a},\quad \alpha=\frac{c}{5b^2-4ac},\quad \beta=\frac{b}{5b^2-4ac},\quad \gamma=\frac{a}{5b^2-4ac},$$

also:

$$5\beta^2-4\alpha\gamma=\frac{1}{5b^2-4ac},$$

so formt sich die Gleichung (20) in eine von eben derselben Form um:

(13) $(\xi-\alpha)^6-4\alpha(\xi-\alpha)^5+10\beta(\xi-\alpha)^3-4\gamma(\xi-\alpha)+5\beta^2-4\alpha\gamma=0.$

Da nun für den Werth von z_m:

$$z_m-a=a_1a_2+2\varepsilon^m a_0a_1+\varepsilon^{2m}a_1{}^2+\varepsilon^{3m}a_2{}^2+2\varepsilon^{4m}a_0a_2,$$

so kann man analog setzen:

$$\xi_m-\alpha=h_0+\varepsilon^m h_1+\varepsilon^{2m}h_2+\varepsilon^{3m}h_3+\varepsilon^{4m}h_4.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen Glied für Glied, so erhält man fünf Gleichungen, aus denen sich $h_0, h_1 \cdots h_4$ bestimmen lassen.

Zu dem Zwecke führe man die Bezeichnungen ein:

$$
(14) \qquad \begin{aligned} C_0 &= -a_1(4a_0^2 - a_1 a_2), & C_1 &= 2a_0 a_1^2 - a_2^3, \\ C_3 &= a_2(4a_0^2 - a_1 a_2), & C_2 &= -(2a_0 a_2^2 - a_1^3), \end{aligned}
$$

und leite aus vier dieser Gleichungen folgende ab:

$$
(15) \qquad \begin{aligned} h_0 C_2 + h_1 C_1 &= 0, & h_0 C_0 &= h_2 C_3 + h_4 C_1, \\ h_2 C_2 + h_3 C_1 &= 0, & h_1 C_0 &= h_3 C_3 + h_0 C_1, \end{aligned}
$$

aus denen folgt:

$$
h_0 h_3 = h_1 h_2, \qquad h_0^2 = h_1 h_4,
$$

und also:

$$
h_0 h_2 = h_3 h_4.
$$

Diese Relationen werden befriedigt, wenn man setzt:

$$
h_0 = \alpha_1 \alpha_2, \quad h_1 = \alpha_2^2, \quad h_2 = 2\alpha_0 \alpha_1, \quad h_3 = 2\alpha_0 \alpha_2, \quad h_4 = \alpha_1^2,
$$

und trägt man diese Werthe in die von ξ_m ein, so kommt:

$$
\xi_m - \alpha = (\alpha_0 + \varepsilon^{2m}\alpha_1 + \varepsilon^{3m}\alpha_2)^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1 \alpha_2).
$$

Durch Einsetzung derselben Werthe in die Gleichungen (15) ergiebt sich:

$$
\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1 = 0, \qquad 2\alpha_0 C_3 = \alpha_2 C_0 - \alpha_1 C_1,
$$

oder, unter ϱ eine unbestimmte Grösse verstanden:

$$
\alpha_1 = \varrho C_1, \quad \alpha_2 = -\varrho C_2, \quad 2\alpha_0 C_3 = -\varrho(C_0 C_2 + C_1^2).
$$

Nun hat man identisch:

$$
(16) \qquad C_0^2 C_2 + C_1^2 C_0 + C_2^2 C_3 + C_3^2 C_1 = 0,
$$

und also:

$$
\alpha_0 = -\frac{1}{2}\varrho \cdot \frac{C_0 C_2 + C_1^2}{C_3} = \frac{1}{2}\varrho\,\frac{C_1 C_3 + C_2^2}{C_0}.
$$

Um den Werth von ϱ zu bestimmen, verwenden wir die fünfte der oben genannten Gleichungen. Indem wir in sie für $h_0, h_1 \cdots$ die eben bestimmten Werthe eintragen, kommt:

$$
(4a_0^2 - a_1 a_2)^2 = \varrho^2(5b^2 - 4ac),
$$

indem:

$$
(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} C_0^3 C_1 + C_1^3 C_3 + C_2^3 C_0 + C_3^2 C_2 + 3C_0 C_1 C_2 C_3 &= 4ac - 5b^2, \\ C_0 C_3 + C_1 C_2 &= -2b. \end{aligned} \right.
$$

Man hat also:

$$
\varrho = -\frac{C_0}{a_1\sqrt{5b^2 - 4ac}} = \frac{C_3}{a_2\sqrt{5b^2 - 4ac}},
$$

und wegen der identischen Gleichung:

$$
C_1^3 C_3 + C_2^3 C_0 + C_1^2 C_2^2 + 5C_0 C_1 C_2 C_3 = 4a_1 a_2 c,
$$

weiter:

$$\alpha_0^2 + \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{5b^2 - 4ac} = \alpha,$$

und also:

$$\sqrt{\xi_m} = \alpha_0 + \varepsilon^{2m}\alpha_1 + \varepsilon^{3m}\alpha_2.$$

Die Quadratwurzeln aus den Wurzeln von (13) befriedigen also die drei linearen Gleichungen:

$$(18)\quad \begin{aligned} &\sqrt{\xi_0} + \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} + \sqrt{\xi_3} + \sqrt{\xi_4} = -\sqrt{5\xi},\\ &\sqrt{\xi_0} + \varepsilon\sqrt{\xi_1} + \varepsilon^2\sqrt{\xi_2} + \varepsilon^3\sqrt{\xi_3} + \varepsilon^4\sqrt{\xi_4} = 0,\\ &\sqrt{\xi_0} + \varepsilon^4\sqrt{\xi_1} + \varepsilon^3\sqrt{\xi_2} + \varepsilon^2\sqrt{\xi_3} + \varepsilon\sqrt{\xi_4} = 0.\end{aligned}$$

Eine jede der Quadratwurzeln $\sqrt{\xi}$ lässt sich als Function der entsprechenden $\sqrt{z}$ darstellen. Man findet leicht:

$$(19)\quad \begin{aligned} 2(a^3-b)\sqrt{5b^2-4ac}\,\sqrt{\xi} = [&z^5 - 10az^4 + 35a^2z^3 - 59a^3z^2 + 9bz^2\\ &+ 48a^4z - 23abz - 15a^5 + 19a^2b - 4c]\sqrt{z},\end{aligned}$$

und offenbar erhält man den Werth von $\sqrt{z}$ in Function von $\sqrt{\xi}$, indem man in dieser letzten Gleichung die ξ, z vertauscht, α, β, γ an Stelle von a, b, c schreibt und das Vorzeichen des zweiten Gliedes umkehrt.

Ebenso wie sich aus dem $\sqrt{z}$ die $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ ableiten, erhält man aus dem $\sqrt{\xi}$ analoge Ausdrücke $\sqrt{\xi'}$, $\sqrt{\xi''}$. Man setze:

$$\alpha' = 8\alpha^2\beta + \gamma,\quad \alpha'' = \beta(4\alpha\gamma - 3\beta^2),\quad \lambda = \alpha(4\alpha\gamma - \beta^2),\quad \mu = \gamma,\quad \nu = 3\beta,$$

so hat man:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi} &= \alpha\frac{d\sqrt{\xi}}{d\alpha} + \nu\frac{d\sqrt{\xi}}{d\beta} + 5\mu\frac{d\sqrt{\xi}}{d\nu},\\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi'} &= \nu\frac{d\sqrt{\xi}}{d\alpha} + \alpha'\frac{d\sqrt{\xi}}{d\beta} + 5\lambda\frac{d\sqrt{\xi}}{d\nu},\\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi''} &= \mu\frac{d\sqrt{\xi}}{d\alpha} + \lambda\frac{d\sqrt{\xi}}{d\beta} + 5\alpha''\frac{d\sqrt{\xi}}{d\nu},\end{aligned}$$

und bezeichnet man der Kürze wegen mit k den Ausdruck (9), nachdem man in ihn statt a, b, c bez. α, β, γ eingesetzt hat, so kommt die Relation:

$$\frac{k}{(5\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{5/4}} = \frac{h}{(5b^2 - 4ac)^{5/4}}.$$

Die Werthe von $\sqrt{\xi'}$, $\sqrt{\xi''}$ als Function von $\sqrt{z}$ erhält man leicht mit Hilfe dieser letzten Gleichungen. Bezeichnet man mit $\Phi(\sqrt{z})$ die rechte Seite von (19) und mit $\Phi_1(\sqrt{z})$, $\Phi_2(\sqrt{z})$ die folgenden Polynome:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\sqrt{z}) &= (z^3 - 7az^2 + 11a^2z - 5a^3 + 7b)\sqrt{z},\\ \Phi_2(\sqrt{z}) &= (z - 3a)\sqrt{z},\end{aligned}$$

so erhält man folgende Ausdrücke:

$$2(a^3-b)(5b^2-4ac)^{3/2}\sqrt{\xi'}=-5ab\,\Phi(\sqrt{z})+(a^3-b)[5b\,\Phi_1(\sqrt{z})+4c\,\Phi_2(\sqrt{z})],$$
$$2(a^3-b)(5b^2-4ac)^{3/2}\sqrt{\xi''}=-2a^2\,\Phi(\sqrt{z})+2(a^3-b)[a\,\Phi_1(\sqrt{z})+b\,\Phi_2(\sqrt{z})],$$

und die drei Polynome $\Phi(\sqrt{z})$, $\Phi_1(\sqrt{z})$, $\Phi_2(\sqrt{z})$ genügen daher drei Relationen, welche den Gleichungen (18) entsprechen.

§ 5.

Aus dem, was in § 2. bewiesen ist, geht hervor, dass man eine Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades für Z bilden kann, deren Coefficienten A, B, C drei Parameter p, q, r enthalten. Die Transformationsformel, durch welche man von der Gleichung (2) zu der Gleichung mit Z gelangt, ist folgende, wie ebendort gezeigt wurde:

$$(20)\qquad Y=t+t_0f_1+t_1f_2+t_2f_3+t_3f_4+t_4f_5,$$

wo $Y=Z-A$ und die $f_1, f_2, \cdots$ die Werthe (12) haben. Die $t, t_0, \cdots$ sind Functionen zweiten Grades von p, q, r, nämlich:

$$(21)\qquad \begin{aligned} &t+A=-ct_4+5pw,\quad t_0=p^2-10abq^2-2bcr^2-(4ac+5b^2)qr,\\ &t_1=-bt_4-2qw,\quad t_2=-4a^2q^2-b^2r^2-4abqr-pq,\\ &t_3=-at_4+rw,\quad t_4=pr-q^2, \end{aligned}$$

wo der Kürze wegen $w=ap+3bq+cr$ gesetzt ist. Man hat also:

$$(22)\qquad \sum Y=4A=6t-20at_0+30bt_2-4ct_4,$$

woraus sich der Werth von A, wie er in § 2. gefunden wurde, oder auch folgender ableitet:

$$(23)\qquad Aa=w^2+gq^2-2\varepsilon qr+fr^2,$$

wo die g, ε, f die Werthe (11) haben. Bemerkt man endlich, dass das Product zweier beliebiger f sich als lineare Function der f darstellen lässt, indem man hat:

$$(24)\qquad \begin{aligned} &f_1^2=f_2-4af_1, && f_1f_2=f_3-4af_2-10b, && f_2f_3=f_5-4af_4+4c,\\ &f_2^2=f_4-4af_3-10bf_1, && f_1f_3=f_4-4af_3, && f_2f_4=-4af_5+4cf_1-d,\\ &f_3^2=-4af_5+10bf_3+4cf_1-d, && f_1f_4=f_5-4af_4+4c, && f_2f_5=-df_1,\\ &f_4^2=10bf_5+4cf_3-df_2, && f_1f_5=-4af_5-d, && f_3f_4=10bf_4+4cf_2-df_1,\\ &f_5^2=-4cf_5-df_4, && f_4f_5=-df_3, && f_3f_5=10bf_5-df_2, \end{aligned}$$

(wo $d=5b^2-4ac$), so sieht man, dass man für Y^2, $Y^3, \cdots$ ähnliche Ausdrücke, wie für Y erhält und mit ihrer Hilfe die Berechnung der Coefficienten B, C, abgesehen von der Länge der Rechnung, keinerlei Schwierigkeit bietet.

Wie in einem der späteren Abschnitte auseinanderzusetzen ist,

ist es sehr wichtig, den Fall, in welchem $A = 0$ ist, näher zu betrachten. Die Formel (23) giebt dann zur Bestimmung des Verhältnisses zweier der p, q, r die Gleichung:

$$w^2 + gq^2 - 2\varepsilon qr + fr^2 = 0,$$

aus der man für $w = 0$, $r = g$ die folgenden ableitet:

$$q = \varepsilon + \delta, \quad p = f - \frac{n}{a}\delta,$$

wo, wie in § 2., $n = 3b$ und $\delta = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - fg} = \pm\sqrt{-ah}$ ist. Die drei ersten Relationen (21) und die (22) werden also:

$$t = -ct_4, \quad t_1 = -bt_4, \quad t_3 = -at_4, \quad 2at_0 - 3bt_2 + ct_4 = 0,$$

und demnach der Werth (20) von Y einfach:

$$2aY = uP + vQ, \tag{25}$$

wo:

$$\left\{\begin{aligned} P &= 2af_3 + 3bf_1, \\ Q &= 2af_5 - 2a^2f_4 - 2abf_2 - cf_1 - 2ac, \\ t_2 &= u, \\ t_4 &= v. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Man bemerke, dass

$$\sum P = 0, \quad \sum Q = 0,$$

und daher $\sum Y = 0$ unabhängig von den Werthen von u und v ist. Diese letzteren haben die Werthe:

$$\left\{\begin{aligned} u &= 2(4a^3 - n)h - \frac{\delta}{a}\Big[4a^2(2a\varepsilon + ng) - (2n\varepsilon + a^2g)\Big], \\ v &= 2ah - \frac{\delta}{a}(2a\varepsilon + ng). \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Setzt man die angegebenen Werthe von p, q, r in (8) ein, so erhält man:

$$\sqrt{Z} = f\sqrt{z} + \varepsilon\sqrt{z'} + g\sqrt{z''} - \frac{\delta}{a}(n\sqrt{z} - a\sqrt{z'}), \tag{28}$$

und wegen der letzten Gleichung (10) und der beiden ersten (5):

$$\sqrt{Z} = \frac{2\delta}{a}\left[g\frac{d\sqrt{z}}{db} - 5(\varepsilon + \delta)\frac{d\sqrt{z}}{dc}\right].$$

Jetzt bemerke man, dass man, unter $f(z)$ das erste Glied der Gleichung (2) verstanden, folgende Gleichungen hat:

$$f'(z)\frac{dz}{db} = -10\left[(z-a)^3 + b\right], \quad f'(z)\frac{dz}{dc} = 4z,$$

und also:

$$\sqrt{Z} = -\frac{10\delta}{a\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{f'(z)}\left[gy^3 + 2(\varepsilon + \delta)y + 2a(\varepsilon + \delta) + bg\right], \tag{29}$$

wo, wie vorher, $y = z - a$ und $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$ gesetzt ist. Diese letzte Gleichung führt nun leicht zur Bestimmung des Werthes von B. In der That, setzt man:

$$U = -y[gy^2 + 2(\varepsilon + \delta)]\,,$$
$$\varkappa = bg + 2a(\varepsilon + \delta)\,,$$

und bemerkt, dass:

$$\prod \sqrt{Z} = -B\sqrt{5}\,, \qquad \prod \sqrt{z} = (a^3 - b)\sqrt{5}\,,$$

so erhält man:

$$B = 2 \cdot 5^5 \cdot \frac{h^3}{a^3(a^3-b)} \, \frac{\Pi(\varkappa - U)}{\Pi f'(z)}\,, \tag{30}$$

und die Untersuchung ist also zurückgeführt auf die Aufsuchung der Gleichung für die U, welche aus der Gleichung für die y durch Transformation hervorgeht.

Man berechnet:

$$\prod f'(z) = -4^6 \cdot 5^5 \cdot h^2\,,$$
$$\prod (\varkappa - U) = 4^3(a^3 - b)\,h^2(\delta W - V)\,,$$

wo rechter Hand:

$$V = 160\,a^3(a^3-b)h + bg^3 + 6ag^2\varepsilon - 16\,a^2 g\varepsilon\psi - 32\,a^3 g^3\,,$$
$$W = 2\,a\,[40(a^3-b)\,(2a\varepsilon - 3bg) + 8\,ag\psi - 25\,g^2]\,.$$

Hier bedeuten g, ε die Ausdrücke (11) und ψ hat den Werth

$$= 32\,a^5 - 35\,a^2 b + 3c\,.$$

Der Werth (30) von B nimmt also folgende einfache Form an:

$$B = \frac{h^3}{a^3}\,(V - \delta W)\,.$$

Bezeichnet man mit B_1, B_2 die zwei Werthe von B, welche dem doppelten Vorzeichen von δ entsprechen, so ist:

$$B_1 B_2 = \frac{h^6}{a^6}\,[V^2 + ah\,W^2]\,,$$

woraus sich durch kurze Berechnung ergiebt:

$$B_1 B_2 = \frac{g^6 h^6}{a^6}\,(128\,a^3 b - 4ac + b^2)\,. \tag{31}$$

Dieses Resultat, welches den Zusammenhang zwischen dem hier betrachteten particulären Falle und den interessanten Untersuchungen von Prof. Klein über das Ikosaeder*) klarlegt, lässt sich leichter aus dem

*) Vergl. diese Annalen Bd. XII, p. 503 ff., bes. p. 535, Gleichung (13).

anfänglichen Werthe von $\sqrt{z}$ ableiten. Bezeichnet man nämlich mit Z_1, Z_2 die beiden Werthe von Z, welche dem zwiefachen Vorzeichen von δ entsprechen, so kommt unmittelbar:

$$\sqrt{Z_1 Z_2} = \frac{gh}{a}(5a - z).$$

Diese letzte Relation bietet nun auch ein ziemlich einfaches Mittel, um zu dem Werthe von C zu gelangen. In der That, man hat vermöge derselben:

$$\frac{Z_1}{(5a-z)^2} = \frac{g^2 h^2}{a^2} \cdot \frac{1}{Z_2},$$

und also:

$$\sum \frac{Z_1}{(5a-z)^2} = \frac{4}{5} \frac{g^2 h^2}{a^2} \cdot \frac{C_2}{B_2^2}.$$

Setzt man jetzt:

$$\Theta = 128\, a^2 b - 4\, ac + b^2 = \frac{1}{5} f(5a),$$

$$w = 256\, a^5 + 120\, a^2 b - c = \frac{1}{4} f'(5a),$$

$$\varrho = 4\,[w^2 - 25\, a\,(32\, a^3 + 3b)\,\Theta],$$

so kommt:

$$\frac{5}{4}\Theta^2 \sum \frac{z}{(5a-z)^2} = -w\Theta + a\varrho,$$

$$\frac{5}{4}\Theta^2 \sum \frac{z'}{(5a-z)^2} = -25(28a^3 + 3b)\Theta^2 + 4a(64a^3 + 25b)w\Theta - (32a^2 b - c)\varrho,$$

$$\frac{5}{4}\Theta^2 \sum \frac{z''}{(5a-z)^2} = 5a(32ac - 7b^2)\Theta^2 - 8(8a^3 c - 2a^2 b^2 + bc)w\Theta + 2b(4ac - b^2)\varrho,$$

$$\frac{5}{4}\Theta^2 \sum \frac{2\sqrt{z z'}}{(5a-z)^2} = 5(68a^2 b - c)\Theta^2 - (128a^3 b - 12ac + 25b^2)w\Theta + 16ab^2\varrho,$$

$$\frac{5}{4}\Theta^2 \sum \frac{2\sqrt{z z''}}{(5a-z)^2} = 30(24a^3 + b)\Theta^2 - 4a(64a^3 + 19b)w\Theta + 32a^2 b\varrho,$$

$$\frac{5}{4}\Theta^2 \sum \frac{2\sqrt{z' z''}}{(5a-z)^2} = -50a\Theta^2 + 24a^2 w\Theta + b\varrho,$$

und also, wenn man unter λ, λ', λ'', μ, μ', μ'' die rechten Seiten dieser Gleichungen versteht:

$$C = \frac{a^2 B^2}{g^2 h^2 \Theta^2}[p^2\lambda + q^2\lambda' + r^2\lambda'' + qr\mu + pr\mu' + pq\mu''],$$

wo p, q, r, wie oben, die Werthe besitzen:

$$p = f - 3\frac{b}{a}\delta, \quad q = \varepsilon + \delta, \quad r = g.$$

Bemerken wir schliesslich, dass

$$\sum \frac{dz}{db} = 0, \quad \sum \frac{dz}{dc} = 0,$$

so folgt noch, dass der Werth von A bei denjenigen Jacobi'schen Gleichungen, deren Wurzeln durch

$$\sqrt{Z} = p\sqrt{z} + q\,\frac{d\sqrt{z}}{db} + r\,\frac{d\sqrt{z}}{dc}$$

gegeben wird, keine Terme in pq, pr enthält.

§ 6.

Wie im ersten Abschnitte bewiesen ist, kann man eine Jacobi'sche Gleichung, für die $A = 0$ ist, immer mit Hülfe elliptischer Functionen lösen. Setzt man nämlich in der Jacobi'schen Gleichung $Z = Y\sqrt[3]{B}$, so kommt:

$$Y^6 + 10\,Y^3 - 4\,\frac{C}{B^{2/3}}\,Y + 5 = 0,$$

und vergleicht man dies mit einer der betr. Gleichungen, die sich bei der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Functionen einstellen, so hat man eine Relation, aus der der Modul $\varkappa$ bestimmt werden kann. Betrachtet man z. B. die Gleichung, deren Wurzeln sind:

$$\left[\sqrt{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}} + \sqrt{\frac{\lambda'\mu}{\varkappa'}}\right]^2$$

und für die wir die Werthe gefunden hatten:

$$A = 0\,, \quad B = -\frac{4^2}{\varkappa^2\varkappa'^2}\,, \quad C = 4^3 \cdot \frac{1 - 16\,\varkappa^2\varkappa'^2}{\varkappa^4\varkappa'^4},$$

so kommt zur Bestimmung von $\varkappa$:

$$\frac{C^3}{B^5} = -\frac{1}{4}\,\frac{(1 - 16\,\varkappa^2\varkappa'^2)^3}{\varkappa^2\varkappa'^2},$$

und die Wurzeln der Jacobi'schen Gleichung für Z sind dann durch die sechs Werthe des Ausdrucks gegeben:

$$Z = -\sqrt[3]{\frac{B\varkappa^2\varkappa'^2}{16}}\left(\frac{cn \cdot 2\,\omega}{cn \cdot 4\,\omega} - \frac{cn \cdot 4\,\omega}{cn \cdot 2\,\omega}\right)^2.$$

Ich werde nun zeigen, dass dieselbe Eigenschaft bei jeder Jacobi'schen Gleichung Statt hat, was auch a, b, c sein mögen. Bemerken wir zuvörderst, dass für

$$\sqrt{Z} = p\sqrt{z} + q\sqrt{z'} + r\sqrt{z''}$$

1) $A = 0$ wird, wenn p, q, r einer quadratischen Gleichung genügen, deren Coefficienten Functionen von a, b, c sind,

2) sich Z als Function von z mit Hülfe eines Polynoms vom fünften Grade ausdrückt, in welchem die Coefficienten quadratische Functionen von p, q, r sind. Macht man in diesem Polynom den Coefficienten von z^5 zu Null, dessen Werth als

$$t_4 = pr - q^2$$

bestimmt war, so sind die Verhältnisse $p : q : r$ gegeben und man hat eine Gleichung vierten Grades in z, mit Hülfe deren man z als Function

von Z bestimmen kann. Hiermit ist also gezeigt, dass eine Jacobi'sche Gleichung für z immer mit Hülfe der elliptischen Functionen gelöst werden kann, was auch a, b, c sein mögen.

In dem besonderen Falle, den wir im vorigen Paragraphen betrachteten, ist es nützlich, auf beide Lösungen Z_1, Z_2 gleichzeitig Rücksicht zu nehmen, insofern ihr Product sich sehr einfach durch z ausdrückt. In der That hatten wir:

$$z = a\left[5 - \frac{1}{gh}\sqrt{Z_1 Z_2}\right]. \tag{32}$$

Ich will nun mit M_1, N_1; M_2, N_2 die Werthe von B_1, C_1; B_2, C_2 bezeichnen, sobald man in der betreffenden Gleichung $a = 1$, $b = 0$ setzt, wie das bei der Multiplicatorgleichung und den anderen analogen Gleichungen der Fall ist. Aus den im vorigen Paragraphen gefundenen Werthen von B, C ergiebt sich dann:

$$\begin{aligned}
M_1 &= 2\,c^8 (c+16)^3 [4(3c+64) + (c+64)\sqrt{c+16}],\\
M_2 &= 2\,c^8 (c+16)^3 [4(3c+64) - (c+64)\sqrt{c+16}],\\
N_1 &= \frac{M_1^2}{4\,c^4(c+16)}[c + 17\cdot 32 + 8\cdot 15\sqrt{c+16}],\\
N_2 &= \frac{M_2^2}{4\,c^4(c+16)}[c + 17\cdot 32 - 8\cdot 15\sqrt{c+16}].
\end{aligned}$$

Sei jetzt, wie bei der Multiplicatorgleichung $c = -4^3\varkappa^2\varkappa'^2$, so kommt:

$$\begin{aligned}
M_1 &= 4^{35}\varkappa^{16}\varkappa'^{22}(1-2\varkappa^2)^6,\\
M_2 &= 4^{35}\varkappa^{22}\varkappa'^{16}(1-2\varkappa^2)^6,\\
N_1 &= 4^{58}\varkappa^{24}\varkappa'^{36}(1-2\varkappa^2)^{10}(16-16\varkappa^2+\varkappa^4),\\
N_2 &= 4^{58}\varkappa^{36}\varkappa'^{24}(1-2\varkappa^2)^{10}(\ 1+14\varkappa^2+\varkappa^4).
\end{aligned}$$

Setzt man also:

$$\frac{C_1^3}{B_1^5} = \frac{N_1^3}{M_1^5}, \quad \frac{C_2^3}{B_2^5} = \frac{N_2^3}{M_2^5},$$

so hat man zur Bestimmung der zweierlei Werthe von $\varkappa$, die wir $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ nennen wollen:

$$\frac{C_1^3}{B_1^5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{[1+14\varkappa'^2+\varkappa'^4]^3}{\varkappa^8\varkappa'^2}, \quad \frac{C_2^3}{B_2^5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{[1+14\varkappa^2+\varkappa^4]^3}{\varkappa^2\varkappa'^8}.$$

Es seien jetzt U_1, U_2 die Werthe von Z_1, Z_2, welche der Multiplicatorgleichung entsprechen, es sei ferner $z = \mu$, $z' = \mu'$, $z'' = \mu''$ (siehe Abschnitt I.), so geben die Gleichungen (28):

$$\begin{aligned}
\sqrt{U_1} &= -2\cdot 4^5\cdot\varkappa^2\varkappa'^4(1-2\varkappa^2)\left[\sqrt{\frac{\lambda'\mu}{\varkappa}} - \sqrt{\mu}\ \right],\\
\sqrt{U_2} &= -2\cdot 4^5\cdot\varkappa^4\varkappa'^2(1-2\varkappa^2)\left[\sqrt{\mu}\ - \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\varkappa}}\right],
\end{aligned}$$

wo in der ersten $\varkappa = \varkappa_1$ und die λ, μ entsprechend zu nehmen sind, in der zweiten $\varkappa = \varkappa_2$ zu setzen ist. Bemerkt man jetzt, dass:

$$\frac{Z_1}{B_1^{1/3}} = \frac{U_1}{M_1^{1/3}}, \quad \frac{Z_2}{B_2^{1/3}} = \frac{U_2}{M_2^{1/3}},$$

so kommt:

$$\sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt[6]{\frac{B_1 B_2}{M_1 M_2}} \sqrt{U_1 U_2}$$

und also vermöge (31), (32):

$$z = 5a - \frac{1}{2} \sqrt[6]{\Theta} \sqrt[3]{\frac{\varkappa_1' \varkappa_2}{2 \varkappa_1^2 \varkappa_2'^2}} \cdot \left[\frac{\mathrm{dn} \cdot 2\omega_1}{\mathrm{dn} \cdot 4\omega_1} - \frac{\mathrm{dn} \cdot 4\omega_1}{\mathrm{dn} \cdot 2\omega_1}\right] \cdot \left[\frac{\mathrm{cnc} \cdot 2\omega_2}{\mathrm{cnc} \cdot 4\omega_2} - \frac{\mathrm{cnc} \cdot 4\omega_2}{\mathrm{cnc} \cdot 2\omega_2}\right],$$

wo jede der Grössen ω_1, ω_2 die im ersten Abschnitte angegebenen Werthe hat und in die Formeln für K, K' statt $\varkappa$ eingesetzt werden muss $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

Selbstverständlich kann man diesem letzten Resultate verschiedenartige Formen geben.

Dritter Abschnitt.

Die Erniedrigung der Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades.*)

§ 1.

Bekanntlich ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Modulargleichungen diejenige, welche Galois in seinem berühmten Briefe an Chevalier angab, und die darin besteht, dass der Grad dieser Gleichungen für die Transformationen der Ordnungen

5, 7, 11

um eine Einheit herabgedrückt werden kann. Bewiesen wurde diese Angabe Galois' zuerst durch meinen verehrten Freund, Prof. Betti, in einer Abhandlung, die in den ersten Monaten des Jahres 1853 in den Annali di Matematica di Tortolini veröffentlicht wurde, und später wurde sie der Ausgangspunkt der bekannten Untersuchungen von Hrn. Hermite über die Gleichungen fünften Grades**). Hr. Hermite vervollständigte die Entdeckung von Galois und gab ihr eine noch grössere Wichtigkeit, indem er zeigte, wie man die Erniedrigung, deren Möglichkeit allein festgestellt war, wirklich erreichen kann.

---

*) In diesem Abschnitte sind die beiden Noten verwerthet, welche ich im Juni und September 1858 in den Annali di Tortolini unter dem Titel veröffentlichte: Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado.

**) Sur la resolution de l'équation du cinquième dégré. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1858.

Seien, wie vorher, $z, z_0, \cdots z_4$ die Wurzeln einer Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades, und sei demnach:

$$\sqrt{z} = a_0\sqrt{5}, \quad \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1 + \varepsilon^{4m} a_2 .$$

Da $\sqrt{5} = 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^4$, so erhält man aus diesen Relationen die folgenden beiden:

$$\sqrt{z_0} + \sqrt{z} = -2(\varepsilon^2+\varepsilon^3)a_0 + a_1 + a_2,$$
$$\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = 2a_0 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)(a_1+a_2),$$

und also:

$$(\sqrt{z_0}+\sqrt{z})(\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}) = (\varepsilon^2+\varepsilon^3)[-4a_0^2+2a_0(a_1+a_2)+(a_1+a_2)^2]$$

und ebenso:

$$(\sqrt{z_0}-\sqrt{z})(\sqrt{z_4}+\sqrt{z_1}) = (\varepsilon+\varepsilon^4)[-4a_0^2+2a_0(a_1+a_2)+(a_1+a_2)^2].$$

Da ferner:

$$\sqrt{z_4}-\sqrt{z_1} = (\varepsilon^4-\varepsilon)(a_1-a_2), \qquad \sqrt{z_2}-\sqrt{z_3} = (\varepsilon^2-\varepsilon^3)(a_1-a_2),$$

so erhält man:

$$(\sqrt{z_0}+\sqrt{z})(\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3})(\sqrt{z_4}-\sqrt{z_1}) = p(C_0+C_1+C_2+C_3),$$
$$(\sqrt{z_0}-\sqrt{z})(\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3})(\sqrt{z_4}+\sqrt{z_1}) = q(C_0+C_1+C_2+C_3),$$

wo:

$$p = (\varepsilon^2+\varepsilon^3)(\varepsilon^4-\varepsilon), \qquad q = (\varepsilon^2-\varepsilon^3)(\varepsilon^4+\varepsilon)$$

und die C_0, C_1, C_2, C_3 die Werthe (14) des vorangehenden Abschnittes besitzen. Nun ist $pq = -\sqrt{5}$; also kommt:

$$(z-z_0)(z_2-z_3)(z_4-z_1) = (C_0+C_1+C_2+C_3)^2\sqrt{5},$$

und setzt man jetzt:

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\,[(z-z_0)(z_2-z_3)(z_4-z_1)]^{1/2},$$

so ergiebt sich:

$$y_0 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 .$$

Aber wenn man in $C_0, C_1, \cdots$ statt a_1, a_2 einführt $\varepsilon^\nu a_1, \varepsilon^{4\nu} a_2$, so entstehen:

$$\varepsilon^\nu C_0, \quad \varepsilon^{2\nu} C_1, \quad \varepsilon^{3\nu} C_2, \quad \varepsilon^{4\nu} C_3,$$

während gleichzeitig ein beliebiges z_m in $z_{m+\nu}$ übergeht. Bezeichnet man also mit y_ν den Ausdruck:

$$y_\nu = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\left[(z-z_\nu)(z_{\nu+2}-z_{\nu+3})(z_{\nu+4}-z_{\nu+1})\right]^{1/2},$$

so ist:

(1) $$y_\nu = \varepsilon^\nu C_0 + \varepsilon^{2\nu} C_1 + \varepsilon^{3\nu} C_2 + \varepsilon^{4\nu} C_3 .$$

Die $y_0, y_1, \cdots y_4$ sind daher die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten

der Jacobi'schen Gleichung und der vierten Wurzel aus ihrer Discriminante sind. Bezeichnet man diese Gleichungen mit:

$$y^5 + p_1 y^4 + p_2 y^3 + p_3 y^2 + p_4 y + p_5 = 0,$$

so hat man ohne Weiteres folgende Relationen:

$p_1 = 0,$

$p_2 = -5(C_0 C_3 + C_1 C_2),$

$p_3 = 5(C_0^2 C_2 + C_1^2 C_0 + C_2^2 C_3 + C_3^2 C_1),$

$p_4 = -5(C_0^3 C_1 + C_1^3 C_3 + C_2^3 C_0 + C_3^3 C_2 + C_0 C_1 C_2 C_3 - C_0^2 C_3^2 - C_1^2 C_2^2),$

und hieraus mit Rücksicht auf die Gleichungen (16), (17) des zweiten Abschnittes:

$$p_2 = 10b, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = 5(9b^2 - 4ac).$$

Man hatte ferner:

$$\prod f'(z) = -4^6 \cdot 5^5 \cdot h^2,$$

und also:

$$\prod y = 8\sqrt{-h}, \text{ oder } p_5 = -8\sqrt{-h}.$$

Die Gleichung fünften Grades daher, deren Wurzeln $y_0, y_1, \cdots y_4$ sind, ist diese:

$$(2) \qquad y^5 + 10by^3 + 5(9b^2 - 4ac)y - 8\sqrt{-h} = 0,$$

wo h den in Gleichung (9) des zweiten Abschnittes angegebenen Werth besitzt.

Nehmen wir jetzt an, dass $z, z_0, \cdots$ die Wurzeln einer der Jacobi'schen Gleichungen seien, welche aus der Transformation der elliptischen Function entspringen und $b = 0$ haben, so wird die angegebene Gleichung:

$$y^5 - 20acy - 8c\sqrt{c + 16a^5} = 0,$$

und, wenn man $y = x\sqrt[4]{4ac}$, $\mu = \frac{c}{a^5}$ setzt:

$$x^5 - 5x - \sqrt{2\,\frac{\mu + 16}{\sqrt{\mu}}} = 0.$$

In diesen Gleichungen sind a, c und also μ Functionen des Moduls $\varkappa$ — sobald nämlich a als numerischer Coefficient betrachtet wird —; wenn also vermöge der sogenannten Jerrard'schen Transformation eine beliebige Gleichung fünften Grades auf die Form gebracht wird:

$$x^5 - 5x - 4M = 0,$$

so hat man zur Bestimmung des Moduls $\varkappa$ die Gleichung zweiten Grades:

$$\mu^2 + 32(1 - 2M^2)\mu + 256 = 0.$$

Für die Multiplicatorgleichung z. B. hat man $a = 1$, $\mu = c = -4^3 \varkappa^2 \varkappa'^2$ und also:

$$\sqrt{\mu + 16} = 4(1 - 2\varkappa^2)$$

und dadurch $\varkappa$ als Function von M.

Die Erniedrigung der Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades führt also zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades, sobald man letztere auf die Jerrard'sche Form transformirt voraussetzt.

§ 2.

Erinnert man, wie sich die a, b aus den a_0, a_1, a_2 zusammensetzen, so erhält man aus den Werthen von $C_0, C_1, \cdots$:

$$C_0 C_1 C_2 C_3 = (5a_0^2 - a)^2 (a - a_0^2)\left[2b - (5a_0^2 - a)^2 (a - a_0^2)\right],$$

und also für eine beliebige Wurzel z der Jacobi'schen Gleichung:

$$5^2 C_0 C_1 C_2 C_3 = (z - a)^2 (5a - z)\left[10b - (z-a)^2 (5a - z)\right].$$

Setzt man hier:

$$5^2 C_0 C_1 C_2 C_3 = w,$$

so erhält man nach einigen Reductionen:

$$(3) \qquad \frac{1}{4}(w - 12ac - 5b^2) = -c(z-a) - \frac{ad}{z-a},$$

wo $b = 5b^2 - 4ac$. Die Grösse w hat, den Wurzeln der Jacobi'schen Gleichung entsprechend, 6 Werthe, die man mit Rücksicht auf die Formeln des Abschnittes II.:

$$z - a = \frac{1}{\zeta - \alpha}, \qquad \alpha = \frac{c}{d}$$

in folgender Form schreiben kann:

$$\frac{1}{4d}(w - 12ac - 5b^2) = -(\alpha(z - a) + a(\zeta - \alpha)).$$

Von ihr ausgehend stellt man leicht die Gleichung sechsten Grades auf, der w genügt.

Aber aus den Gleichungen (1) ergiebt sich:

$$5C_0 = (\alpha^4 y), \quad 5C_1 = (\alpha^3 y), \quad 5C_2 = (\alpha^2 y), \quad 5C_3 = (\alpha y),$$

wo:

$$(\alpha y) = y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^4 y_4;$$

es ist also:

$$5^2 w = (\alpha y)(\alpha^2 y)(\alpha^3 y)(\alpha^4 y).$$

Bezeichnet man daher mit r, s die Ausdrücke:

$$r = y_0 y_1 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_4 + y_4 y_0,$$
$$s = y_0 y_2 + y_2 y_4 + y_4 y_1 + y_1 y_3 + y_3 y_0,$$

so kommt:

$$5w = 4 \cdot 5^2 \cdot b^2 + rs,$$

und setzt man jetzt:

$$\psi = y_0 y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 y_3 + y_2 y_3^2 y_4 + y_3 y_4^2 y_0 + y_4 y_0^2 y_1$$
$$+ y_0 y_2^2 y_4 + y_2 y_4^2 y_1 + y_4 y_1^2 y_3 + y_1 y_3^2 y_0 + y_3 y_0^2 y_2,$$

wo:

$$rs = 15(4ac - 9b^2) - \psi,$$

so erhält man vermöge (3) die Relation:

$$(4) \qquad \frac{1}{4 \cdot 5}\,\psi = -3b^2 + c(z-a) + \frac{ad}{z-a}.$$

Analog hat man für

$$\varphi = r - s$$

folgende Gleichung:

$$\frac{1}{4^2 \cdot 5}\,\varphi^2 = 8b^2 - 3ac + \frac{1}{4 \cdot 5}\,\psi = dz\xi,$$

und vermöge des Werthes von ξ:

$$(5) \qquad \frac{1}{2\sqrt{5}}\,\varphi = -z^3 + 7az^2 - 11a^2z + 5(a^3 - b).$$

Die Gleichungen sechsten Grades in ψ und in φ, deren Wurzeln Functionen der Wurzeln der Gleichung fünften Grades (2) sind, bilden für letztere Gleichung diejenigen Resolventen, welche für eine beliebige Gleichung fünften Grades von Malfatti, Ruffini und Hrn. Cayley berechnet worden sind. Allemal wenn in einer Gleichung fünften Grades die Coefficienten des zweiten und des vierten Gliedes fehlen, so bestehen, wie bei der Gleichung (2), die Relationen, welche soeben für die Functionen ψ, φ und z angegeben worden sind; die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades daher, in der die betreffenden beiden Terme fehlen, lassen sich, wie die Wurzeln der Gleichung (2), durch die Wurzeln einer Jacobi'schen Gleichung und also durch elliptische Functionen ausdrücken.

§ 3.

Man verdankt Hrn. Hermite die *directe* Zurückführung einer beliebigen Gleichung fünften Grades auf eine solche, bei der die Summe der ersten Potenzen und die Summe der dritten Potenzen der Wurzeln verschwinden. In einem von ihm an Hrn. Borchardt gerichteten und im 59ten Bande des Journals für Mathematik veröffentlichten Briefe [Sur l'invariant du 18ième ordre des formes du cinquième dégré etc. p. 304] hat derselbe eine Function der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades angegeben, welche zehn paarweise entgegengesetzt gleiche Werthe besitzt und daher Wurzel einer Gleichung fünften Grades ist, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten der gegebenen Gleichung fünften Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Discriminante sind. Er bemerkt ferner, dass in dieser Resolvente fünften Grades das zweite und das dritte Glied fehlen, während die Coefficien-

ten der übrigen Glieder rationale Functionen der *Invarianten* der gegebenen Gleichung und der Quadratwurzel aus ihrer Discriminante sind. Dieses Resultat, welches mit Rücksicht auf das am Ende des vorangehenden Paragraphen Gesagte und andere erst in einem folgenden Abschnitte zu entwickelnde Verhältnisse besonderes Interesse hat, will ich durch wirkliche Bestimmung der Coefficienten der reducirten Gleichung vervollständigen.

Es seien x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln der allgemeinen Gleichung:

$$f(x) = a_0 x^5 + 5\,a_1 x^4 + 10\,a_2 x^3 + 10\,a_3 x^2 + 5\,a_4 x + a_5 = 0,$$

und es mögen mit $X_0, X_1, X_2, \cdots$ folgende Ausdrücke bezeichnet sein:

$$X_0 = \left[(01)(04)(32) + (02)(03)(14)\right]\left[(01)(02)(43) + (03)(04)(12)\right]$$
$$\left[(01)(03)(42) + (02)(04)(31)\right] \text{ etc.},$$

wo $(rs) = x_r - x_s$ ist und die $X_1, X_2, \cdots$ aus X_0 entstehen, indem man die Indices der Wurzeln x um eine Einheit vermehrt. Benennt man dann mit $y_0, y_1, y_2, \ldots$ die Wurzeln der reducirten Gleichung und mit Δ das Product der Quadrate der Differenzen der Wurzeln x, so hat man für ein beliebiges y:

$$y_0 = a_0^{\,6}\,\frac{X_0\sqrt{\Delta}}{(01)\,(02)\,(03)\,(04)}$$

und die reducirte Gleichung erhält die Form:

$$y^5 + Ly^3 + M\Delta y + N\sqrt{\Delta^3} = 0,$$

wo L und M Invarianten der 12ten und der 16ten Ordnung sind und N die von der 18ten Ordnung.

Unter den verschiedenen Transformationen, deren der angegebene Werth von y_0 fähig ist, hebe ich folgende zwei hervor. Es sei $C(x)$ die cubische Covariante von $f(x)$, so hat man, abgesehen von einem Zahlenfactor:

$$X_\nu = C(x_\nu),$$

und also für eine Wurzel der reducirten Gleichung:

$$y_\nu = \frac{C(x_\nu)\sqrt{\Delta}}{f'(x_\nu)}.$$

Zweitens, wenn man setzt:

$$(01234) = (01)\,(12)\,(23)\,(34)\,(40)$$

und

$$(6)\quad \begin{cases} u = a_0^{\,2}(01234), & u_0 = a_0^{\,2}(03412), \quad u_1 = a_0^{\,2}(14023), \\ u_2 = a_0^{\,2}(20134), & u_3 = a_0^{\,2}(31240), \quad u_4 = a_0^{\,2}(42301), \end{cases}$$

sowie:

$$(7)\quad \begin{cases} v = a_0^{\,2}(02413), & v_0 = a_0^{\,2}(04231), \quad v_1 = a_0^{\,2}(10342), \\ v_2 = a_0^{\,2}(21403), & v_3 = a_0^{\,2}(32014), \quad v_4 = a_0^{\,2}(43120), \end{cases}$$

so hat man:

$$y_0 = u(u_1 u_2 - u_3 u_4) + v(v_1 v_3 - v_2 v_4),$$
$$y_1 = u(u_2 u_3 - u_4 u_0) + v(v_2 v_4 - v_3 v_0), \text{ etc.}$$

Zu diesem Resultate kommt man, wenn man bemerkt:

1) dass identisch folgende Relationen bestehen:

$$u u_0 u_1 = v_2 v_3 v_4 \text{ etc.},$$

2) dass ferner identisch ist:

$$u(u_1 u_3 - u_2 u_4) = v(v_3 v_4 - v_1 v_2) \text{ etc.}$$

Setzt man also:

$$l = 5^4 A, \quad i = 5^8 B, \quad j = 5^{12} C, \quad J = 5^{18} R,$$

wo A, B, C, R die Invarianten 4^{ten}, 8^{ten}, 12^{ten}, 18^{ten} Grades der Form f sind, wie sie Clebsch und Gordan in ihrem Aufsatze in den Annali di Matematica, Serie 2, Vol. 1, 1867, definirt haben, so wird Hermite's Reducirte die folgende:

$$y^5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4^3}{5^2}(3li + 16j)y^3 - \frac{4^5}{5^8}(lj - i^2)\delta^2 y - 12J\delta^3 = 0,$$

wo $\delta = a_0^2 \sqrt{\Delta}$ und also $5^3\delta^2 = l^2 - 128i$. Es ist deutlich, dass man die Wurzeln dieser Gleichung mit denen der Gleichung (2) zusammenfallen lassen kann, wenn man die a, b, c in der Weise bestimmt, dass:

$$b = -\frac{1}{6}\frac{4^3}{5^3}(3li + 16j),$$
$$9b^2 - 4ac = -\frac{4^3}{5^3}(lj - i^2)\delta^2,$$
$$\sqrt{-h} = \frac{4}{3}J\delta^3,$$

was immer möglich ist. Die Reducirte von Hermite kann daher, wie die Gleichung (2), nach Anleitung des § 6. des vorangehenden Abschnittes mit Hülfe elliptischer Functionen aufgelöst werden, und dieselbe Eigenschaft besitzen somit die allgemeinen Gleichungen fünften Grades.

Vierter Abschnitt.

Die Resolventen von Malfatti, von Ruffini und von Cayley*).

§ 1.

Wir haben im vorigen Abschnitte bewiesen, dass durch die Erniedrigung der Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades eine Glei-

*) In diesem Abschnitte reproducire ich zum Theil den Inhalt folgender Abhandlung: *Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado* (vorgelegt dem Istituto Lombardo di Scienze am 9. April 1863).

chung fünften Grades mit vier Gliedern entsteht, mit Hülfe deren man, sei es durch die Transformation von Jerrard oder durch die reducirte Gleichung von Hermite, die allgemeine Gleichung fünften Grades durch elliptische Functionen auflösen kann. In diesem Abschnitte wollen wir uns mit einigen Versuchen beschäftigen, die man zum Zwecke der Auflösung der Gleichungen fünften Grades nach Analogie mit denjenigen Processen, die bei Gleichungen niederen Grades von Erfolg waren, gemacht hat; ich meine das Mittel der *Resolventen* oder Hülfsgleichungen. Ich schicke einige Erläuterungen voraus über die Theorie der Substitutionen.

Man bezeichnet, wie bekannt, als *Substitution* diejenige Operation, vermöge deren man von einer Permutation mehrerer Grössen zu einer anderen übergeht. Ich will annehmen, dass die Anzahl der Grössen, mit denen man operirt, eine Primzahl n ist, und werde die Grössen selbst mit

$$x_0,\ x_1,\ \cdots\ x_{n-1}$$

bezeichnen. Da $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ die Zahl aller ihrer Permutationen ist, so wird allgemein N die Zahl der verschiedenartigen Substitutionen sein, sofern man mit zu ihnen die Substitution *Eins* zählt, welche jede Grösse an der Stelle belässt, die sie gerade einnimmt.

Es bezeichne jetzt $\psi(\nu)$ eine Function, welche die Eigenschaft besitzt, dass ihre Werthe für $\nu = 0,\ 1,\ \cdots\ n-1$ eben diese Zahlen in geänderter Reihenfolge reproduciren. Man kann dann eine auf die $x_0,\ x_1,\ \cdots\ x_{n-1}$ ausgeübte Substitution durch das Symbol:

$$\begin{pmatrix} x_\nu \\ x_{\psi(\nu)} \end{pmatrix},$$

oder kürzer durch:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ \psi(\nu) \end{pmatrix},$$

oder auch nur durch die Function $\psi(\nu)$ bezeichnen.

Die Werthe von $\psi(\nu)$ für $\nu = 0,\ 1,\ \cdots\ (n-1)$ mögen nun $\psi_0,\ \psi_1,\ \cdots\ \psi_{n-1}$ genannt werden; da sie in veränderter Reihenfolge dieselben Zahlen $0,\ 1,\ \cdots\ (n-1)$ angeben, so hat man für sie folgende Eigenschaften:

1) Wenn ψ_ν nicht $\equiv 0$ (mod. n), so ist $\psi_\nu^{n-1} \equiv 1$ (mod. n), und immer hat man, was auch ψ_ν sei: $\psi_\nu^n \equiv \psi_\nu$ (mod. n).

2) Bezeichnet man mit m eine nicht durch $(n-1)$ theilbare Zahl, so wird:

$$\psi_0^m + \psi_1^m + \cdots + \psi_{n-1}^m \equiv 0 \text{ (mod. } n).$$

Hieraus folgt, dass die N Substitutionen, welche bei einer Primzahl n möglich sind, alle in folgender Weise dargestellt werden können:

$$\psi(\nu) \equiv a_0 \nu^{n-2} + a_1 \nu^{n-3} + \cdots + a_{n-3}\nu + a_{n-2} \pmod{n},$$

wo die a_0, a_1, $\cdots$ ganze Zahlen sind, die zwischen 0 und n liegen. Die so definirten Functionen $\psi(\nu)$ lassen sich leicht in die Form setzen:

(1) $$\psi(\nu) \equiv \alpha\Theta(\nu+p) + \beta \pmod{n},$$

wo

$$\Theta(\nu) \equiv \nu^{n-2} + q_2\nu^{n-4} + q_3\nu^{n-5} + \cdots + q_{n-3}\nu \pmod{n}$$

und die Function $\Theta(\nu)$ die *reducirte* Form der Substitution $\psi(\nu)$ genannt werden soll.

Die α, β, p, q_2, $\cdots$ q_{n-3} sind wie die a_1, a_2, $\cdots$ ganze Zahlen; nur kann α nicht $\equiv 0 \pmod{n}$ sein. — Bei dieser Reduction ist vorausgesetzt, dass a_0 nicht $\equiv 0 \pmod{n}$ ist; sollte aber

$$a_0 \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_{s-1} \equiv 0 \pmod{n}$$

sein, so dass $\psi(\nu)$ die Gestalt hat:

$$\psi(\nu) \equiv a_s\nu^{n-s-2} + a_{s+1}\nu^{n-s-3} + \cdots + a_{n-2} \pmod{n},$$

so würde man setzen können:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(\nu) \equiv \alpha_s\Theta_s(\nu+p_s) + \beta_s, \\ \text{wo}\quad &\Theta_s(\nu) \equiv \nu^{n-s-2} + q_{2,s}\nu^{n-s-4} + \cdots + q_{n-s-3,s}\nu \end{aligned}\right\} \pmod{n}.$$

Bildet man das Quadrat der Functionen $\psi(\nu)$ und summirt die Werthe, welche $\nu = 0, 1, \cdots (n-1)$ entsprechen, so muss der Coefficient von $\nu^{n-1} \equiv 0 \pmod{n}$ sein; man hat daher:

$$2a_0a_{n-3} + 2a_1a_{n-4} + \cdots + 2a_{\frac{n-5}{2}}a_{\frac{n-1}{2}} + a^2_{\frac{n-3}{2}} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Sind also in der Function $\psi(\nu)$ die Coefficienten a_0, a_1, $\cdots$ $a_{\frac{n-5}{2}}$ gleich Null, so ist es $a_{\frac{n-3}{2}}$ ebenfalls; es giebt also keine Substitution, welche durch eine Function ψ vom Grade $\frac{n-1}{2}$ dargestellt werden könnte.

Bemerken wir jetzt, dass in dem Ausdrucke (1) α die Werthe $1, \cdots (n-1)$ und die β und p die Werthe $0, 1, \cdots (n-1)$ annehmen können, so folgt, dass jeder reducirten Function $\Theta(\nu)$ eine Zahl $n^2(n-1)$ von Substitutionen $\psi(\nu)$ entspricht, ausgenommen den Fall, in welchem die Function Θ linear und daher die Zahl der zugehörigen Substitutionen $n(n-1)$ ist. Bezeichnet man also mit M die Zahl der verschiedenartigen reducirten Functionen $\Theta(\nu)$, so hat man für die Gesammtzahl aller Substitutionen $\psi(\nu)$ folgende:

$$n(n-1) + (M-1)n^2(n-1) = N,$$

woraus:

$$M = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)-1}{n} + 1,$$

und also:

für $n=5$, $M=2$; für $n=7$, $M=18$; für $n=11$, $M=32990$ etc.

Beschränken wir uns auf den Fall $n=5$, und erinnern, dass der Grad des Polynom's Θ nicht grösser als $n-2$ sein kann, und dass keine Substitution besteht, der eine reducirte Form vom Grade $\frac{n-1}{2}$ entspricht, so sehen wir, dass die einzigen zulässigen reducirten Formen diese sind:

$$\Theta(\nu) \equiv \nu^3 + q_2\nu, \quad \Theta_2(\nu) \equiv \nu \pmod{5}.$$

Da aber ausserdem in $\sum_{0}^{4}{}_{\nu} \Theta^2(\nu) \equiv 0 \pmod{5}$ der Coefficient von ν^4 gleich $2q_2$ wird, so muss auch noch $q_2 \equiv 0 \pmod{5}$ und daher in diesem Falle $\Theta(\nu) \equiv \nu^3 \pmod{5}$ sein.

Die $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ Substitutionen eines Systems von 5 Buchstaben leiten sich also aus folgenden zwei Symbolen ab:

$$(1) \qquad \binom{\nu}{\alpha\nu+\beta}, \quad \binom{\nu}{\alpha(\nu+p)^3+\beta},$$

wo α die Werthe 1, 2, 3, 4 und die p, β die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 annehmen können. Das erste Symbol giebt Anlass zu 20 Substitutionen, das andere zu den übrigen 100.

Die Ausdrücke für die reducirten Formen wurden bei $n=5$ von Prof. Betti gefunden, bei $n=7$ von Hrn. Hermite.

Wenn eine Substitution die Eigenschaft hat, bei einer gewissen Anordnung der n Buchstaben dem ersten Buchstaben den m^{ten}, dem zweiten den $(m+1)^{\text{ten}}$ etc. entsprechen zu lassen $(m>1)$, so nennt man eine solche Substitution eine *cyclische*. Die n Substitutionen, welche man erhält, wenn man in (1) $p=0, 1, 2, \cdots (n-1)$ setzt, sind ebenso viele auf

$$\alpha\Theta(\nu)+\beta$$

ausgeübte cyclische Substitutionen, sofern man die Substitution Eins mit einrechnet. Betrachten wir eine ganze rationale Function der n Buchstaben $x_0, x_1, \cdots$ und wenden auf sie die cyclischen Substitutionen $\nu+1, \nu+2, \cdots \nu+n-1$ an. So mögen

$$f, f_1, f_2, \cdots f_{n-1}$$

die Werthe sein, welche die gegebene Function f successive annimmt. Offenbar hat eine beliebige symmetrische Function dieser n Functionen die Eigenschaft, ihren Werth nicht zu ändern, wenn man eine beliebige der cyclischen Substitutionen auf sie anwendet. Daher nennt man derartige Functionen *cyclische Functionen*. Die Zahl der ver-

schiedenen Werthe, deren eine cyclische Function fähig ist, kann nicht grösser als $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ sein.

Man nennt *Product* zweier Substitutionen die dritte Substitution, welche, auf eine gegebene Anordnung der Buchstaben angewandt, dasselbe Resultat giebt wie die nach einander ausgeführte Anwendung der beiden ersten. Bezeichnen S, T die beiden gegebenen Substitutionen, so sei ST ihr Product, d. h. diejenige Substitution, welche entsteht, wenn man zuerst die Substitution S und dann die Substitution T anwendet.

Sei für $n = 5$:

$$S \equiv \alpha v^3 + \beta, \quad T \equiv a v; \quad S_1 \equiv \alpha_1 v^3 + \beta_1, \quad T_1 \equiv a_1 v \pmod{5},$$

so hat man:

$$\left.\begin{aligned} TT_1 &\equiv a a_1 v, \\ ST_1 &\equiv \alpha a_1{}^3 v^3 + \beta, \\ TS_1 &\equiv a(\alpha_1 v^3 + \beta_1), \\ SS_1 &\equiv 3\alpha\alpha_1\beta_1{}^2 v^3 + 2\alpha\beta_1{}^3 + \beta, \end{aligned}\right\} \pmod{5},$$

ausgenommen den Fall, wo $\beta_1 \equiv 0$, und also:

$$SS_1 \equiv \alpha\alpha_1{}^3 v + \beta.$$

Ist jetzt

$$a,\ a_1\ Rq, \qquad \alpha,\ \alpha_1\ NRq,$$

so wird

$$a a_1,\ \alpha a_1{}^3\ Rq, \qquad \alpha a_1{}^3,\ a\alpha_1,\ 3\alpha\alpha_1\beta_1{}^2\ NRq,$$

und daher geben die Substitutionen:

$$a v, \qquad \alpha v^3 + \beta,$$

in denen $a\ Rq$, $\alpha\ NRq$, Producte, welche dieselbe Eigenschaft haben. Von solchen Substitutionen sagt man, dass sie *conjugirt* sind und dass sie eine *Gruppe* bilden. Die *Ordnung* einer Gruppe oder eines conjugirten Systems ist die Zahl der Substitutionen, welche dasselbe umfasst; in dem eben angeführten besonderen Falle ist die Ordnung offenbar:

$$5(2 + 10) = 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

Als *Index* der Gruppe bezeichnet man die Zahl, welche entsteht, wenn man die Gesammtzahl aller Substitutionen N durch die Ordnung der Gruppe dividirt. Dieser Index ist im vorliegenden Falle:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5} = 2$$

und die Function von 5 Buchstaben, welche der Gruppe entspricht, hat also 2 Werthe. So hat Hr. Kronecker gefunden, dass für $n = 7$ ein System conjugirter Substitutionen existirt, dessen Ordnung gleich $7(3 + 21) = 4 \cdot 6 \cdot 7$ ist; der Index dieses Systems ist also gleich 30,

das heisst: es giebt Functionen von 7 Buchstaben, welche 30 Werthe haben*).

Sei $n = 5$ und bez.

$$\begin{matrix} a\ Rq & a_1\ NRq \\ \alpha\ NRq & \alpha_1\ Rq \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} a\ NRq & a_1\ Rq \\ \alpha\ Rq & \alpha_1\ NRq, \end{matrix}$$

so ergiebt sich:

$$aa_1,\ \alpha\alpha_1^3\ NRq; \quad \alpha a_1^3,\ a\alpha_1,\ 3\alpha\alpha_1\beta_1^2\ Rq,$$

und ferner, wenn

$$a,\ a_1\ NRq; \quad \alpha,\ \alpha_1\ Rq,$$

in analoger Weise:

$$aa_1,\ \alpha\alpha_1^3\ Rq; \quad \alpha a_1^3,\ a\alpha_1,\ 3\alpha\alpha_1\beta_1^2\ NRq.$$

Wendet man also auf eine cyclische Function von fünf Buchstaben die Substitutionen (ν), (4ν), $(3\nu^3+\beta_1)$, $(2\nu^3+\beta_1)$ an und bezeichnet eben mit diesen Symbolen die entstehenden neuen Functionen; setzt man dann:

$$(2) \qquad u = (\nu) - (4\nu); \quad u_{\beta_1} = (3\nu^3+\beta_1) - (2\nu^3+\beta_1),$$

so werden sich die Functionen $u, u_0, u_1, \cdots u_4$ vermöge der Substitutionen:

$$a\nu, \quad \alpha\nu^3 + \beta,$$

wo $a\ Rq$, $\alpha\ NRq$, untereinander mit oder ohne Vorzeichenwechsel vertauschen; durch die Substitutionen aber, in denen $a\ NRq$, $\alpha\ Rq$, werden die sechs anderen Functionen entstehen:

$$(3) \qquad v = (2\nu) - (3\nu), \quad v_\beta = (4\nu^3+\beta) - (\nu^3+\beta).$$

Setzt man also:

$$(4) \qquad U = tu + t_0u_0 + t_1u_1 + t_2u_2 + t_3u_3 + t_4u_4,$$

wo die t, t_0, $\cdots$ unbestimmte Grössen sind, so folgt:

1) dass die Substitutionen

$$(\nu), \quad (3\nu^3+\beta)$$

zu sechs Functionen führen, nämlich zu U und den folgenden:

$$(5) \qquad \begin{cases} U_0 = tu_0 + t_0u - t_1u_1 + t_2u_3 + t_3u_2 - t_4u_4, \\ U_1 = tu_1 + t_0u - t_1u_2 + t_2u_4 + t_3u_3 - t_4u_0, \\ U_2 = tu_2 + t_0u - t_1u_3 + t_2u_0 + t_3u_4 - t_4u_1, \\ U_3 = tu_3 + t_0u - t_1u_4 + t_2u_1 + t_3u_0 - t_4u_2, \\ U_4 = tu_4 + t_0u - t_1u_0 + t_2u_2 + t_3u_1 - t_4u_3, \end{cases}$$

*) Monatsbericht der Akademie zu Berlin, April 1858. — Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Novembre 1863.

2) dass die Substitutionen

$$(4\nu), \quad (2\nu^3 + \beta)$$

zu denselben Functionen $U, U_0, \cdots$ mit umgekehrtem Vorzeichen führen,

3) dass die Substitutionen

$$(2\nu), \quad (\nu^3 + \beta); \quad (3\nu), \quad (4\nu^3 + \beta)$$

zu sechs Functionen $\pm V, \pm V_0, \cdots$ führen, welche aus den $v, v_0, v_1, \cdots$ zusammengesetzt sind, wie die $U, U_0, \cdots$ aus den $u, u_0, u_1, \cdots$.

Endlich folgt, dass eine symmetrische Function der sechs Ausdrücke $U^2, U_0^2, \cdots$ nicht mehr als zwei Werthe haben kann, und sich also durch die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln $x_0, x_1, \cdots$ sind, mit Hülfe von Quadratwurzeln ausdrücken lässt.

Wir werden im nächsten Abschnitte eine Anwendung dieser Resultate kennen lernen.

§ 2.

Indem wir nun die Gleichung fünften Grades betrachten:

$$y^5 + 10\alpha y^3 + 5\beta y + \gamma = 0, \tag{6}$$

und dem von Malfatti eingeschlagenen Wege folgen (siehe dessen Abhandlung: De aequationibus quadrato-cubicis disquisitio analytica, Atti dell'Accademia dei Fisiocritici di Siena vom Jahre 1771), berechnen wir diejenige Gleichung, welche von Malfatti selbst, von Ruffini und von Lagrange *Resolvente* genannt wurde, weil sie den Hülfsgleichungen entspricht, die bei den Gleichungen von niederem als dem fünften Grade die Auflösung vermitteln. Man bezeichne mit $y_0, y_1, \cdots$ die Wurzeln der eben angegebenen Gleichung und setze:

$$y_0 = m + p + q + n,$$
$$y_1 = \varepsilon m + \varepsilon^2 p + \varepsilon^3 q + \varepsilon^4 n \text{ etc.}$$

Führt man dann die Benennungen ein:

$$g = mn, \quad h = pq; \quad r = m^2 q + n^2 p, \quad s = mp^2 + nq^2,$$
$$t = m^3 p + n^3 q, \quad u = mq^3 + np^3,$$

so hat man folgende Beziehungen:

$$\text{(7)} \quad \begin{cases} g + h = -2\alpha, \quad r + s = 0, \quad t + u + 3gh = 4\alpha^2 - \beta, \\ 5(g-h)(r-s) - m^5 - p^5 - q^5 - n^5 = \gamma. \end{cases}$$

Setzt man weiter:

$$gh = v, \quad \zeta_1 = m^2 q, \quad \zeta_2 = n^2 p, \quad \eta_1 = mp^2, \quad \eta_2 = nq^2,$$

wodurch:

$$\zeta_1+\zeta_2=r,\quad \zeta_1\zeta_2=gv;\quad \eta_1+\eta_2=s,\quad \eta_1\eta_2=hv,$$

so wird:

$$g=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-v},$$
$$h=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-v},$$
$$\left.\begin{matrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[\ r\pm\sqrt{r^2-4gv}\right],$$
$$\left.\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[-r\pm\sqrt{r^2-4hv}\right],$$

d. h. die g, h sind Functionen von v und die ζ_1, ζ_2; η_1, η_2 sind Functionen von r und v.

Aber aus den Werthen von ζ, η folgt unmittelbar:

$$m=\sqrt[5]{\frac{\zeta_1^2\eta_1}{h^2}},\quad p=\sqrt[5]{\frac{\zeta_2\eta_1^2}{g^2}},\quad q=\sqrt[5]{\frac{\zeta_1\eta_2^2}{g^2}},\quad r=\sqrt[5]{\frac{\zeta_2^2\eta_2}{h^2}};$$

es hängt also die Auflösung der vorgelegten Gleichung fünften Grades von der Aufsuchung der Werthe der r und der v ab. Zeigen wir zunächst, dass auch die r Functionen der v sind.

In der That, aus den Werthen von t, u folgt:

$$ht+gu=rs=-r^2;\quad tu=hr^2+gs^2-4g^2h^2=-2\alpha r^2-4v^2,$$

und hieraus:

$$2ht=-r^2+\mu;\quad 2gu=-r^2-\mu,$$

wo:

$$\mu=\sqrt{r^4+8\alpha r^2v+16v^3}.$$

Die dritte der Relationen (7) führt daher zu einer ersten Gleichung zwischen r und v, nämlich:

$$\mu\lambda=v(4\alpha^2-\beta)-3v^2-\alpha r^2,$$

wo $\lambda=\sqrt{\alpha^2-v}$. Durch Wegschaffung des Wurzelzeichens folgt hieraus:

$$r^4+2\alpha(7v-8\alpha^2+\beta)r^2+v[25v^2-40\alpha^2v+6\beta v+(4\alpha^2-\beta)^2]=0.$$

Bemerkt man ferner, dass

$$m^5+n^5=\frac{r}{h}(g^2+t);\quad p^5+q^5=-\frac{r}{g}(h^2+u),$$

so findet man eine zweite Gleichung zwischen r und v:

$$\alpha r^3-(25v^2-40\alpha^2v+\beta v+16\alpha^4-2\alpha^2\beta)r-\gamma\lambda v=0.$$

Es lässt sich also r in Function von v und von den Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken, und eliminirt man r aus diesen bei-

den Gleichungen, so erhält man eine Gleichung zwischen v und diesen Coefficienten, welche die gesuchte Resolvente vorstellt. Diese letztere hat eine sehr merkwürdige Form. Setzt man nämlich:

$$w = 25v, \qquad \tau = v - 25\alpha^2,$$

so ist das Resultat der Elimination:

$$[\tau^3 + 5(3\alpha^2+\beta)\tau^2 + 5(15\alpha^4 - 2\alpha^2\beta + 3\beta^2)\tau \\ + 5(25\alpha^6 - 35\alpha^4\beta + 11\alpha^2\beta^2 - \beta^3 - \alpha\gamma^2)]^2 + D\tau = 0,$$

wo D die Discriminante von (6) ist, also:

$$D = I^2 - 128J,$$

unter I, J die Invarianten verstanden:

$$I = -[16\alpha\beta(3\alpha^2+\beta) + \gamma^2],$$
$$J = 2\beta^2(9\alpha^2-\beta)(\alpha^2-\beta)^2 + 12\alpha^3\beta\gamma^2 - \alpha\beta^2\gamma^2 - 27\alpha^5\gamma^2.$$

Setzt man endlich $\tau = -x^2$, so kommt:

$$(8) \quad 0 = x^6 - 5(3\alpha^2+\beta)x^4 + 5(15\alpha^4 - 2\alpha^2\beta + 3\beta^2)x^2 \\ + x\sqrt{D} - 5(25\alpha^6 - 35\alpha^4\beta + 11\alpha^2\beta^2 - \beta^3 - \alpha\gamma^2).$$

Dies ist die Resolvente von Malfatti, welcher Ruffini zwei schöne Abhandlungen widmete (Atti della Società Italiana delle Scienze, 1806) und die sich nicht von der durch Cayley berechneten Resolvente unterscheidet*). In der That, bezeichnet man mit f die allgemeine binäre Form fünfter Ordnung und setzt:

$$s = \frac{1}{2}(f,f)_4, \quad t = -(s,f)_2, \quad H = \frac{1}{2}(f,f)_2, \quad K = \frac{2}{5}s^2 - 2(s,H)_2,$$

so lässt sich die eben angegebene Gleichung folgendermassen schreiben, unter s, t, H, K die ersten Coefficienten der eingeführten Covarianten verstanden:

$$a_0^6x^6 - 5a_0^4sx^4 + 5a_0^2(3s^2-2K)x^2 + a_0^2x\sqrt{D} - 5(s^3 - 2sK - HI - 16t^2) = 0,$$

wo I, wie soeben, die Invariante vierten Grades bedeutet. Diese Gleichung zeigt, dass die Eliminationsmethode von Malfatti sich auch auf eine Gleichung fünften Grades, in der kein Term fehlt, anwenden lässt, was eben Cayley ausgeführt hat.

Erinnert man sich an die Functionen der Wurzeln $y_0, y_1, \cdots$ der Gleichung (6), welche im letzten Paragraphen des vorigen Abschnittes aufgestellt und mit r, s bezeichnet wurden, so hat man ohne Weiteres:

---

*) Philosophical Transactions Vol. 151.

$$x = \frac{1}{2\sqrt{5}}(r - s),$$

eine Relation, welche, wie ebendort gezeigt wurde, zu einer Umformung der Jacobi'schen Gleichung führt, die nicht ohne Interesse ist.

§ 3.

Sei z eine beliebige Wurzel der Jacobi'schen Gleichung, und unter a, b, c, $d = 5b^2 - 4ac$ mögen die gewöhnlich so bezeichneten Grössen verstanden sein. Ich setze dann:

$$X = -z^3 + 7az^2 - 11a^2z + 5(a^3 - 6).$$

Die Gleichung sechsten Grades für X hat die Eigenschaft, dass die Coefficienten des zweiten und des vierten Terms Null sind, sie hat also die Gestalt der im vorigen Paragraphen berechneten Resolvente. Die Gleichung für X ist folgende:

$$X^6 + 5\cdot 4(ac - 3b^2)X^4 + 5\cdot 4^2(15b^4 - 13ab^2c + 3a^2c^2)X^2$$
$$+ 4^3(c^3 - a^3d^2)X + 5\cdot 4^3[(b^2 - ac)^2(2b^2 - ac) - bh] = 0,$$

wo h den in Glch. (9) Abschn. II angegebenen Werth hat.

Diese Gleichung kann man mit der Malfatti'schen Resolvente zusammenfallen lassen. In der That, setzt man die Coefficienten der vierten und der zweiten Potenz einander gleich, so ergiebt sich ohne Weiteres:

$$\alpha = b, \quad \beta = 9b^2 - 4ac,$$

und da vermöge dieser Gleichungen:

$$4^3(b^2 - ac)^2(2b^2 - ac) = -25\alpha^6 + 35\alpha^4\beta - 11\alpha^2\beta^2 + \beta^3,$$

so hat man durch Vergleich des letzten Coefficienten:

$$\gamma^2 = -4^3\cdot h,$$

und die Gleichheit der Coefficienten der ersten Potenz ist durch diese Bestimmungen an sich erreicht. Die Werthe von α, β, γ sind, wie man sieht, identisch mit den Coefficienten der Gleichung fünften Grades, welche wir im vorigen Abschnitte durch Erniedrigung der Jacobi'schen Gleichung erhielten.

Da nun die Gleichung in X und also die Malfatti'sche Resolvente (8) durch elliptische Functionen aufgelöst werden kann, so folgt wieder, dass jede Gleichung fünften Grades von der viergliedrigen Form (6) und also eine beliebige Gleichung fünften Grades durch elliptische Functionen gelöst werden kann. Wir haben dieses Resultat hier nur durch Transformation der Jacobi'schen Gleichung erreicht, ich werde jetzt zeigen, dass die Jacobi'sche Gleichung selbst Resolvente einer allgemeinen Gleichung fünften Grades ist.

Vorab finde noch eine Bemerkung ihre Stelle über diejenige Function der Gleichung fünften Grades (6), welche wir oben mit $r - s$ bezeichnet haben. Erinnert man sich der Auseinandersetzungen des § 1. über die Substitutionen von 5 Buchstaben $y_0, y_1, \cdots y_4$, so sieht man leicht, dass die in Rede stehende Function cyclisch ist und bei den Substitutionen $\binom{\nu}{\alpha\nu}$ unverändert bleibt, sobald α quadratischer Rest von 5 ist, während sie nur ihr Vorzeichen ändert, wenn α quadratischer Nichtrest ist. Die symmetrischen Functionen der sechs Ausdrücke, welche man durch die Substitutionen:

$$\binom{\nu}{\nu}, \quad \binom{\nu}{(2\nu)^3 + \beta}, \qquad (\beta \equiv 0, 1, 2, 3, 4),$$

erhält, sind daher zweiwerthige Functionen der Wurzeln $y_0, y_1, \cdots y_4$ und also ausdrückbar durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung und die Quadratwurzel aus ihrer Discriminante.

Fünfter Abschnitt.

Ueber die Kronecker'sche Resolvente*).

§ 1.

Man verdankt meinem berühmten Freunde, Prof. Kronecker, den glücklichen Gedanken, die Auflösung der Gleichungen fünften Grades *unmittelbar* von der Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades abhängig zu machen. In einem an Herrn Hermite gerichteten Briefe vom 6. Juni 1858, der in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences veröffentlicht ist, gab er freilich nicht explicite den Zusammenhang an, der zwischen der von ihm gefundenen Art der Auflösung und den Jacobi'schen Gleichungen besteht; aber die Form der Resolvente, welche er gab, und die Ausdrücke für ihre Wurzeln konnten darauf leiten. Damals selbst seit einiger Zeit mit Untersuchungen über die Jacobi'schen Gleichungen beschäftigt, konnte ich daher im November desselben Jahres dem Istituto Lombardo die Arbeit vorlegen, auf die ich hier zurückkomme, und in der ich die Methode zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades, welche ich die Kronecker'sche nenne (im Gegensatze zur Hermite'schen, die in der Erniedrigung der Modulargleichung besteht) in einer etwas allgemeineren Form, als die im genannten Briefe gegebene ist, auseinandersetzte. Ich muss übrigens hinzufügen, dass Herr Kronecker später, im Juni 1861, eine äusserst

*) In diesem Abschnitte reproducire ich die Note: Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni del quinto grado; Atti del Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, November 1858.

interessante Note über denselben Gegenstand veröffentlicht hat, aus der zweifellos die Allgemeinheit seiner Untersuchungen hervorgeht*).

Erinnert man die Auseinandersetzungen des ersten Paragraphen des vorigen Abschnittes, die sich auf die cyclischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades bezogen, welche wir mit $U, U_0, \cdots U_4$ bezeichneten, so ist deutlich, dass eine symmetrische Function der sechs Ausdrücke:

$$z = U^2, \quad z_0 = U_0^2, \cdots z_4 = U_4^2,$$

eine zweiwerthige Function der Wurzeln der Gleichung fünften Grades sein wird und also durch die Coefficienten der Gleichung fünften Grades und die Quadratwurzel aus ihrer Discriminante rational ausgedrückt werden kann, dass ferner diese Eigenschaft ungeändert bleibt, welche Werthe auch die $t, t_0, \cdots$ haben mögen. Nehmen wir jetzt also an, dass die $U, U_0, \cdots$ das eine oder andere Tripel von Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
&U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = U\sqrt{5},\\
&U_0 + \varepsilon^2 U_1 + \varepsilon^4 U_2 + \varepsilon U_3 + \varepsilon^3 U_4 = 0,\\
&U_0 + \varepsilon^3 U_1 + \varepsilon U_2 + \varepsilon^4 U_3 + \varepsilon^2 U_4 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = -U\sqrt{5},\\
&U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \varepsilon^4 U_4 = 0,\\
&U_0 + \varepsilon^4 U_1 + \varepsilon^3 U_2 + \varepsilon^2 U_3 + \varepsilon U_4 = 0.
\end{aligned}$$

Substituirt man in diese Gleichungen die Werthe (4) (5) von $U, U_0, \cdots$, wie sie im vorigen Abschnitte gegeben worden sind, so findet man sofort, dass in beiden Fällen sein muss:

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4$$

und überdiess im ersteren Falle $t = t_0\sqrt{5}$, im anderen $t = -t_0\sqrt{5}$. Die sechs Functionen (1) also, in denen die $U, U_0, \cdots$ folgende Werthe haben:

$$(2)\qquad \begin{aligned}
U &= \varkappa\,(u\sqrt{5} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4),\\
U_0 &= \varkappa\,(u + u_0\sqrt{5} - u_1 + u_2 + u_3 - u_4),\\
U_1 &= \varkappa\,(u - u_0 + u_1\sqrt{5} - u_2 + u_3 + u_4),\\
U_2 &= \varkappa\,(u + u_0 - u_1 + u_2\sqrt{5} - u_3 + u_4),\\
U_3 &= \varkappa\,(u + u_0 + u_1 - u_2 + u_3\sqrt{5} - u_4),\\
U_4 &= \varkappa\,(u - u_0 + u_1 + u_2 - u_3 + u_4\sqrt{5}),
\end{aligned}$$

*) Monatsbericht der Berliner Akademie, 27. Juni 1861.

(wo $\varkappa$ eine beliebige Grösse bedeutet), sind Wurzeln einer Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades, in welcher die a, b, c zweiwerthige Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung fünften Grades und also rationale Functionen ihrer Coefficienten und der Quadratwurzel aus ihrer Discriminante sind. Die Gleichung in z ist daher eine Resolvente der Gleichungen fünften Grades, insofern, wie schon Herr Kronecker bemerkt hat, die Kenntniss *aller* Werthe einer cyclischen Function die Kenntniss der fünf Wurzeln auf rationalem Wege nach sich zieht.

Betrachten wir jetzt zwei verschiedene Functionen U, die mit P, Q bezeichnet sein sollen, und setzen:

$$\sqrt{z} = P + pQ,$$

wo p eine unbestimmte Grösse ist, so können wir p so bestimmen, dass die Bedingung $a = 0$ erfüllt ist und sich also die Jacobi'sche Gleichung auf die Form reducirt:

$$z^6 + 10bz^3 - 4cz + 5b^2 = 0,$$

die man durch elliptische Functionen auflöst, wie im zweiten Abschnitte bewiesen wurde. Oder auch, wie in § 6. desselben Abschnittes bewiesen ist, man kann aus den Werthen der Coefficienten a, b, c der Jacobi'schen Gleichung, deren Wurzeln die (1) sind, die Coefficienten B, C der Jacobi'schen Gleichung in Z ableiten, für welche $A = 0$. In dem einen und dem anderen Falle ist die Jacobi'sche Gleichung eine Resolvente der allgemeinen Gleichung fünften Grades.

§ 2.

Es seien $x_0, x_1, \cdots x_4$ die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades, und es werde angenommen, dass die cyclischen Functionen derselben, welche wir mit $u, u_0, \cdots u_4$ bezeichneten, diejenigen seien, die in den Formeln (6) des dritten Abschnittes genannt sind, Functionen, die übrigens dieselben Eigenschaften besitzen werden, welche wir für die $u, u_0, \cdots$ im § 1. des vorangehenden Abschnittes abgeleitet haben. Da die Functionen u, v ((6), (7) des dritten Abschnittes) den folgenden Relationen unterworfen sind:

$$\sum u = 2(u+v), \qquad \sum v = 2u,$$

und den weiteren, die sich aus diesen durch die Substitutionen $\binom{v}{3v^3+\beta}$ ergeben, so findet man, unter ϱ, σ die Ausdrücke verstanden:

$$\varrho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \sigma = \frac{2\varkappa}{\varrho},$$

die Wurzeln der entsprechenden Jacobi'schen Gleichung vermöge der (1), (2) in folgender Form:

$$\sqrt{z} = \sigma(u+\varrho v), \quad \sqrt{z_0} = \sigma(u_0+\varrho v_0), \cdots \sqrt{z_4} = \sigma(u_4+\varrho v_4).$$

Die Werthe der a, b, c lassen sich in diesem Falle leicht ausdrücken in Function der drei Invarianten l, i, j vom vierten, achten und zwölften Grad, welche wir schon im § 3. des dritten Abschnittes betrachteten. Setzt man nämlich $\sigma = \sqrt{5+\sqrt{5}}$, so erhält man:

$$a = l - 3\delta\sqrt{5},$$

$$b = \frac{2\cdot 4^3}{3\cdot 5}\left[3i(l+5\delta\sqrt{5}) - 4^3 j\right],$$

$$c = -\frac{2}{3}\cdot 4^6 \cdot j\,(l+5\delta\sqrt{5})^2,$$

wo δ, wie im citirten Paragraphen, die Discriminante ist und man also hat:

$$5^3\delta^2 = l^2 - 128 i.$$

§ 3.

In diesem Paragraphen werde ich kurz zeigen, wie aus den besonderen Eigenschaften der cyclischen Functionen von fünf Buchstaben, die wir u, v nannten ((6), (7) in Abschn. III), der schon im zweiten Abschnitte für die Jacobi'schen Gleichungen in Z hervorgehobene Umstand hervorgeht, zwei Parameter zu enthalten*). Bemerken wir zu dem Zwecke, dass aus der unter (2) angegebenen Form der $U, U_0, \cdots$ folgende Darstellung für die Wurzeln einer Jacobi'schen Gleichung hervorgeht. Unter $\varphi(x_0, x_1, \cdots x_4)$ verstehe man eine cyclische Function der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades, welche bei der Substitution $\binom{v}{4v}$ nur ihr Zeichen wechselt. Dann setze man:

$$\sqrt{Z} = \frac{1}{2}\left[\sum \varphi + 2\varrho\varphi\right], \tag{3}$$

wo das Zeichen $\sum$ die Summe der Functionen $\varphi, \varphi_0, \cdots \varphi_4$ bedeutet, welche aus φ vermöge der Substitutionen $\binom{v}{3v^3+\beta}$ entstehen ($\beta = 0, 1, 2, 3, 4$). Der Ausdruck Z und die fünf anderen, die aus ihm durch eben diese Substitution entstehen, sind dann die Wurzeln einer Jacobi'schen Gleichung.

Diess vorausgesetzt bemerken wir:

1) dass die geraden Potenzsummen der Functionen u, v sich als

---

*) Siehe meine Note: Sur une classe de résolventes de l'équation du cinquième dégré in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 1866.

rationale Functionen der Coefficienten der Gleichung fünften Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Discriminante darstellen. Man hat z. B.:

$$\sum u^2 = l - 3\delta, \qquad \sum v^2 = l + 3\delta,$$

$$\sum u^4 = \frac{1}{2}(l^2 - 10l\delta + 13\delta^2), \quad \sum v^4 = \frac{1}{2}(l^2 + 10l\delta + 13\delta^2) \text{ etc.}$$

2) dass die ungeraden Potenzsummen der Functionen u, v sich als rationale Functionen der Coefficienten der Gleichung fünften Grades, der Quadratwurzel aus der Discriminante, der u, v selbst und ihrer ungeraden Potenzen ausdrücken. So hat man:

$$\sum u^3 = -u^3 - v^3 + \frac{3}{2}(l-3\delta)u + \frac{3}{2}(l-\delta)v,$$

$$\sum v^3 = -u^3 + 3v^3 + \frac{3}{2}(l+\delta)u - \frac{3}{2}(l+3\delta)v,$$

$$\sum u^5 = 2u^5 + 2v^5 - \frac{5}{2}(l-3\delta)u^3 - \frac{5}{2}(l+\delta)v^3 + \frac{5}{4}(l-3\delta)^2 u + \frac{5}{4}(l-3\delta)(l-\delta)v,$$

$$\sum v^5 = 2u^5 - \frac{5}{2}(l-\delta)u^3 + \frac{5}{2}(l+3\delta)v^3 + \frac{5}{4}(l+3\delta)(l+\delta)u - \frac{5}{4}(l+3\delta)^2 v,$$

und analog die weiteren Formeln, die aus diesen durch die Substitution $(3v^3+\beta)$ hervorgehen.

3) dass die siebenten Potenzen von u und von v und daher die ungeraden Potenzen höheren Grades sich in Function der Coefficienten, der Quadratwurzel aus der Discriminante, der u, v und ihrer dritten und fünften Potenzen ausdrücken. Man hat nämlich folgende Formel:

$$u^7 = (l-3\delta)u^5 - \frac{1}{4}[(l-\delta)^2 + 4\delta^2]u^3 + \varkappa u + \frac{1}{4}[(l+\delta)^2 + 4\delta^2]\delta v - (l+3\delta)\delta v^3 + \delta v^5$$

und ähnlich für v^7, wenn man nur δ in $-\delta$ verwandelt und u mit v vertauscht. Dabei ist:

$$5^2(\varkappa - 4l\delta^2) = \frac{4^3}{3}(3li + 16j).$$

Setzt man also:

$$\varphi = au^5 + bv^5 + cu^3 + dv^3 + eu + fv,$$

so kann man den in den Relationen (3) ausgesprochenen Bedingungen genügen durch eine schickliche Wahl der unbestimmten Coefficienten a, b, c, d, e, f. Nun führt eine leichte Rechnung zu dem Resultate, dass die allgemeine Form von $\sqrt{Z}$ folgende ist:

$$\sqrt{Z}=p(u+\varrho v)+q[u^3-(2\varrho+3)v^3-\tfrac{3}{2}(\varrho+2)(l+\delta\sqrt{5})u]$$

$$+r[(\varrho+1)u^5+v^5-\tfrac{5}{2}(\varrho+2)(l-\delta\sqrt{5})v^3-\tfrac{5}{4}(2\varrho+3)(l-3\delta)(l+\delta\sqrt{5})u],$$

die nun in der That zwei willkürliche Grössen $p:q:r$ enthält. Die Eigenschaften dieser Functionen u, v führen also auf einem neuen Wege zu einer der wichtigsten Eigenthümlichkeiten der Wurzeln der Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades.

Mailand, im October 1877.

Ueber gewisse Determinanten.

Von

A. Voss in Darmstadt.

In einer Arbeit über die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen (diese Annalen Bd. XII) habe ich zum Schluss einige Sätze erwähnt, welche sich auf das Verschwinden gewisser Determinanten beziehen. Dieselben lassen sich von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus betrachten, dessen Darlegung den Gegenstand der folgenden Note bildet.

Die Determinanten, welche hier betrachtet werden sollen, entstehen, wenn man die nicht verschwindende n-reihige Determinante $\sum (a_{11} a_{22} \cdots a_{nn})$ mit beliebigen Grössenreihen φ_{ik}, Φ_{ik}, $(i = 1 \cdots n, k = 0, 1 \cdots r)$ $r+1$-fach vertical und horizontal rändert. Jede solche Determinante kann durch geeignete Multiplication mit der Adjungirten der a_{ik} in eine andere verwandelt werden, welche an Stelle der a_{ii} überall die Einheit, an Stelle der a_{ik} Nullen enthält, wobei die Φ_{ik} durch lineare Combinationen derselben ersetzt werden. Wir betrachten daher der Einfachheit halber die Determinante:

$$(1) \qquad D_{r+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot\cdot & 0 & \varphi_{10} & \cdot & \varphi_{1r} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot\cdot & 1 & \varphi_{n0} & \cdot & \varphi_{nr} \\ \Phi_{10} & \cdot\cdot & \Phi_{n0} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Phi_{1r} & \cdot\cdot & \Phi_{nr} & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix},$$

welche, abgesehen von dem Factor ± 1, auch in der Form der $r+1$-reihigen Determinante:

$$(2) \qquad D_{r+1} \equiv \begin{vmatrix} A_{00} & \cdots & A_{0r} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ A_{r0} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix}$$

geschrieben werden kann, wenn man setzt:

$$\mathsf{A}_{ik} = \sum_{s=1}^{s=n} \Phi_{sk}\varphi_{si}.$$

Wir wollen die φ_{ik}, Φ_{ik} als k^{te} Differentialquotienten von Functionen φ_i, Φ_i einer Variabeln λ voraussetzen. Sind die φ_i, Φ_i rationale ganze Functionen von beziehungsweise gleichen Graden n, ν, so gilt der Satz:

Die Determinante D ist eine Invariante in Bezug auf lineare Substitutionen von λ.

Um dies zu beweisen, mache man zunächst die φ, Φ homogen in λ_1, λ_2. Die Determinante enthält dann nach einer sehr einfachen Reduction nur partielle Differentialquotienten nach λ_1, λ_2 von der r^{ten} Ordnung, und die erste Horizontalreihe von (1) wird z. B.:

$$1 \; 0 \cdots 0 \; \frac{\partial^r \varphi_1}{\partial \lambda_1^{\,r}} \; \frac{\partial^r \varphi_1}{\partial \lambda_1^{\,r-1} \partial \lambda_2} \cdots \frac{\partial^r \varphi_1}{\partial \lambda_2^{\,r}}.$$

Geht nun durch die Substitution:

$$\lambda_1 = \alpha_{11}\mu_1 + \alpha_{12}\mu,$$
$$\lambda_2 = \alpha_{21}\mu_1 + \alpha_{22}\mu$$

mit der Determinante:

$$d = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})$$

$\varphi_i(\lambda_1\, \lambda_2)$ über in $\varphi_i'(\mu_1\, \mu_2)$, und bezeichnet man den $k_1 + k_2 = r^{\text{ten}}$ partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}(\varphi_i')}{\partial \mu_1^{\,k_1} \partial \mu_2^{\,k_2}}$$

durch:

$$\varphi'_{i_{k_1,k_2}},$$

so ist:

$$\text{(4)} \qquad \varphi'_{i_{k_1,k_2}} = \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\alpha_{11} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\alpha_{21}\right]^{k_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\alpha_{12} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\alpha_{22}\right]^{k_2} \varphi_i$$
$$= \sum \binom{k_1}{r_1}\binom{k_2}{r_2} \alpha_{11}^{k_1-r_1}\alpha_{21}^{r_1}\alpha_{12}^{k_2-r_2}\alpha_{22}^{r_2}\varphi_{i_{(r_1+r_2)\, r-(r_1+r_2)}},$$

$$\begin{matrix} r_1 = 0\;1 \cdots k_1 \\ r_2 = 0\;1 \cdots k_2 \end{matrix}, \quad k_1 + k_2 = r.$$

Setzt man $r_1 + r_2 = s$ und den Coefficienten von $\varphi_{i_{s,\,r-s}}$ in (4) gleich:

$$\text{(5)} \qquad \mathsf{A}^{k_1,\,k_2}_{s,\,r-s},$$

so ist die $r+1$-reihige Determinante L der Coefficienten (5) gleich*):

$$d^{\frac{r}{2}(r+1)}.$$

Multiplicirt man D mit L zweimal in geeigneter Weise (indem man nämlich L nach links hin mit n Diagonalgliedern s versieht und die übrigen Stellen durch Nullen ersetzt), so entsteht die Identität:

$$D'_{r+1} = D_{r+1} d^{r(r+1)}. \tag{6}$$

Aus dem Theorem (6) *geht die Invarianteneigenschaft der in der genannten Arbeit betrachteten Ausdrücke unmittelbar hervor*, wenn man die $\Phi_i = \varphi_i$ setzt. Besteht ausserdem die Identität $\sum \varphi_i^2 = 0$, *so ist die zweireihige Determinante:*

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}\right)^2 & \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} \\ \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} & \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2}\right)^2 \end{vmatrix},$$

wie man leicht findet, *identisch Null*, während:

$$D_3 = -\left[\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}\right)^2\right]^3 \tag{7}$$

ist. *Demnach besitzen in diesem Falle auch die Ausdrücke:*

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}\right)^2, \quad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2}, \quad \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2}\right)^2$$

die Invarianteneigenschaft, wie aus der Gleichung:

$$d^2 \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \mu}\right)^2$$

hervorgeht.

Wir wollen jetzt wieder ein allgemeineres Functionssystem φ, Φ voraussetzen. Wenn D_{r+1} identisch Null ist, so lassen sich Zahlen:

$$k_0\ k_1 \cdots k_r,$$
$$\varkappa_0\ \varkappa_1 \cdots \varkappa_r$$

finden, so dass:

$$\left\{\begin{array}{l} k_0 \sum \varphi \Phi + k_1 \sum \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \cdots + k_r \sum \varphi \frac{\partial^r \Phi}{\partial \lambda^r} = 0, \\ \vdots \\ k_0 \sum \frac{\partial^r \varphi}{\partial \lambda^r} \Phi + \cdots\cdots\cdots + k_r \sum \frac{\partial^r \varphi}{\partial \lambda^r} \frac{\partial^r \Phi}{\partial \lambda^r} = 0, \end{array}\right. \tag{8}$$

*) Es ist dies dieselbe Determinante, welche Herr Sylvester benutzt hat, um die Invarianteneigenschaft des von ihm als *Catalecticante* bezeichneten Ausdrucks zu erweisen.

$$(8)\quad \begin{cases} \varkappa_0 \sum \varphi\Phi + \varkappa_1 \sum \Phi \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \cdots + \varkappa_r \sum \Phi \dfrac{\partial^r\varphi}{\partial\lambda^r} = 0\,, \\ \vdots \\ \varkappa_0 \sum \dfrac{\partial^r\Phi}{\partial\lambda^r}\varphi + \cdots\cdots\cdots\cdots + \varkappa_r \sum \dfrac{\partial^r\varphi}{\partial\lambda^r}\dfrac{\partial^r\Phi}{\partial\lambda^r} = 0\,. \end{cases}$$

Setzt man:

$$(9)\quad \begin{cases} z_i = \sum k_s \dfrac{\partial^s\Phi_i}{\partial\lambda^s}\,, \\ \zeta_i = \sum \varkappa_s \dfrac{\partial^s\varphi_i}{\partial\lambda^s}\,, \end{cases} \quad s = 0, 1, \cdots r,$$

so ist nach (8):

$$(10)\quad \begin{cases} \sum z\varphi = 0, \quad \sum z \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = 0, \cdots \sum z \dfrac{\partial^r\varphi}{\partial\lambda^r} = 0\,, \\ \sum \zeta\Phi = 0, \quad \sum \zeta \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = 0, \cdots \sum \zeta \dfrac{\partial^r\Phi}{\partial\lambda^r} = 0\,, \end{cases}$$

$$(11)\quad \sum z\zeta = 0\,.$$

Differentiirt man die Gleichungen (8) und multiplicirt dann bezüglich mit den $k_0 \cdots k_r$, $\varkappa_0 \cdots \varkappa_r$, so entsteht:

$$(12)\quad k_r \sum \zeta \frac{\partial^{r+1}\Phi}{\partial\lambda^{r+1}} + \varkappa_r \sum z \frac{\partial^{r+1}\varphi}{\partial\lambda^{r+1}} = 0\,,$$

in welcher Gleichung man auch $\varkappa_r = k_r$ voraussetzen kann.

Setzt man wieder $\varphi_i = \Phi_i$ voraus, so hat man:

$$(9a)\quad z_i = \sum k_s \frac{\partial^s\varphi_i}{\partial\lambda^s}\,,$$

$$(10a)\quad \sum z\varphi = 0, \quad \sum z \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = 0, \cdots \sum z \frac{\partial^r\varphi}{\partial\lambda^r} = 0\,,$$

$$(11a)\quad \sum z^2 = 0,$$

und die Gleichung (12) liefert:

$$(13)\quad \sum z \frac{\partial^{r+1}\varphi}{\partial\lambda^{r+1}} = 0\,.$$

Die fortgesetzte Differentiation der Gleichungen (8) liefert kein der Gleichung (13) analoges Resultat, sondern nur die Identität:

$$(k_r - k_r) \sum z \frac{\partial^{r+2}\varphi}{\partial\lambda^{r+2}} = 0\,.$$

Es sei nun:

I. $r = n - 1$. In diesem Falle ist die Determinante D_n das Quadrat von:

(14) $$\sum \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \cdots \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial \lambda^{n-1}} \right).$$

Das System der z, welches die n Gleichungen (10a) befriedigt, wird auch die Gleichung (13) befriedigen. Differentiirt man die Gleichungen (9a), so ergiebt sich:

$$\sum dz\varphi = 0, \quad \sum dz \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0, \cdots \sum dz \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial \lambda^{n-1}} = 0,$$

woraus:

$$dz_i = hz_i.$$

Das heisst *die z_i sind constanten z_i^0 proportional,* und man hat in diesem Falle die Identität:

(15) $$\sum z_i^0 \varphi_i = 0,$$

die z_i^0 befriedigen aber nicht die Gleichung:

$$\sum z_i^{0^2} = 0.$$

II. Es sei $r = n - 2$. Aus den Gleichungen (10a) und (13) ergeben sich die folgenden:

$$\sum z\varphi = 0, \cdots \sum z \frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial \lambda^{n-2}} = 0, \quad \sum z \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial \lambda^{n-1}} = 0,$$

$$\sum z^2 = 0.$$

Die dz befriedigen wieder die Gleichungen:

$$\sum dz\, \varphi = 0, \cdots \sum dz \frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial \lambda^{n-2}} = 0$$

und sind durch dieselben proportional mit den z_i bestimmt. *Demnach besteht wieder die Gleichung* (15), *aber so, dass ausserdem:*

(16) $$\sum z_i^{0^2} = 0.$$

Und infolge der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{M} z_i^0 &= \sum k_s \frac{\partial^s \varphi}{\partial \lambda^s}, \\ \frac{\partial \mathsf{M}}{\partial \lambda} z_i^0 &= \sum \frac{dk_s}{\partial \lambda} \frac{\partial^s \varphi}{\partial \lambda^s} + \sum k_s \frac{\partial^{s+1} \varphi}{\partial \lambda^{s+1}}, \end{aligned}\right\} \quad s = 0, 1, \cdots n-2,$$

verschwindet die Determinante (14) *ebenfalls identisch.*

III. Es sei endlich $r = n - 3$. Die $n - 1$ Gleichungen:

$$\sum z\varphi = 0, \cdots \sum z\frac{\partial^{n-3}\varphi}{\partial\lambda^{n-3}} = 0, \quad \sum z^2 = 0$$

haben jetzt die einzige Lösung:

$$z_i = \sum k_s \frac{\partial^s\varphi}{\partial\lambda^s},$$

welche ausserdem nach (13) die Gleichung:

$$\sum z\frac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial\lambda^{n-2}} = 0$$

befriedigt.

Betrachtet man daher das System der z, welches zu unendlich benachbarten Werthen:

$$\lambda + d\lambda, \quad \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}d\lambda, \cdots$$

gehört, welches durch ζ bezeichnet werden möge, so muss dasselbe den Gleichungen:

$$\sum \zeta^2 = 0,$$

$$0 = \sum\zeta\left(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}d\lambda\right), \cdots 0 = \sum\zeta\left(\frac{\partial^{n-3}\varphi}{\partial\lambda^{n-3}} + \frac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial\lambda^{n-2}}d\lambda\right)$$

genügen. Dies ist aber wieder das System der z selbst. Daher sind auch hier noch die ζ den z proportional, also die letzten Constanten gleich anzusehen, und man hat:

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{N} z_i^0 &= \sum k_s \frac{\partial^s\varphi}{\partial\lambda^s}, \\ \frac{\partial\mathsf{N}}{\partial\lambda} z_i^0 &= \sum k_s \frac{\partial^{s+1}\varphi}{\partial\lambda^{s+1}} + \frac{\partial k_s}{\partial\lambda}\,\frac{\partial^s\varphi}{\partial\lambda^s}, \end{aligned}\right\} \quad s = 0, 1, \cdots n-3,$$

aus welchen Gleichungen das identische Verschwinden der Determinante:

$$\sum\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\cdots\frac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial\lambda^{n-2}}\varrho\right),$$

d. h. *das Verschwinden aller ersten Unterdeterminanten der Determinante* (14) hervorgeht.

Die $n - 2$ Gleichungen:

$$\sum y\varphi = 0, \cdots \sum y\frac{\partial^{n-3}\varphi}{\partial\lambda^{n-3}} = 0$$

besitzen aber nicht nur die singuläre Lösung z, sondern ausserdem noch eine einfach unendliche Zahl anderer y, welche nicht die Bedingung

$$\sum y^2 = 0$$

erfüllen. Jede derselben aber befriedigt die Gleichung:

$$\sum yz = 0.$$

In Folge dessen verschwindet die Determinante:

$$\sum \left(dy,\, y,\, \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \cdots \frac{\partial^{n-3} \varphi}{\partial \lambda^3} \right).$$

Aber das Quadrat derselben ist gleich:

$$\left\{ \sum \left[\frac{dy}{\partial \lambda} \frac{\partial^{n-3} \varphi}{\partial \lambda^{n-3}} \right] \right\}^2 D_{n-4},$$

woraus, wenn D_{n-4} nicht verschwindet:

$$\sum dy \frac{\partial^{n-3} \varphi}{\partial \lambda^{n-3}} = 0.$$

Die dy_i befriedigen also wieder dasselbe System von Gleichungen, wie die y selbst. *Demnach ist das lineare System der y als ein constantes zu betrachten, es existiren zwei lineare Identitäten mit constanten Coefficienten:*

$$\sum z_i^0 \varphi_i = 0,$$
$$\sum y_i^0 \varphi_i = 0,$$

welche den Gleichungen:

$$\sum z_0^2 = 0, \quad \sum z_0 y_0 = 0$$

genügen.

Für sechs homogene Variabele sind in der genannten Arbeit diese Eigenschaften der Determinanten D geometrisch interpretirt und im Anschluss an jene Auffassung bewiesen worden, doch schien es, da sie unabhängig von der dort vorausgesetzten Identität $\sum \varphi_i^2 = 0$ gelten, nicht überflüssig, sie hier unter allgemeinerer Form darzustellen.

Darmstadt, im Juli 1877.

Ueber vier Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung.

Von

A. Voss in Darmstadt.

Da durch je sechs Punkte im Raume sich im Allgemeinen eine bestimmte Raumcurve dritter Ordnung, R_3, legen lässt, so wird es ∞^3 solcher Curven geben, welche drei gegebene Gerade berühren. Diese ∞^3 Schaar würde, so scheint es, zu einem System von ∞^4 Tangenten Veranlassung geben, woraus zu schliessen wäre, dass im Allgemeinen eine endliche von Null verschiedene Zahl von R_3 existirt, welche vier gegebene Gerade zu Tangenten haben. Auch ist ja die Bedingung, vier gegebene Gerade zu berühren, genau so viel einfachen Bedingungen äquivalent, als man überhaupt einer R_3 auferlegen kann.

In der That aber ist jenes System von Tangenten nur ein dreifach unendliches; d. h.: je ∞^1 Curven haben die nämliche Gerade zur Tangente.

Man erweist dies leicht durch Betrachtungen, welche der *Geometrie der linearen Complexe* angehören. Mit jedem linearen Complexe, C_1, ist eine *reciproke Umformung des Raumes verbunden*, welche darin besteht, *dass einer Geraden ihre conjugirte Polare in Bezug auf den C_1 zugeordnet wird*; die Geraden des letzteren selbst gehen dabei in sich über. Formt man daher ein Liniengebilde in Bezug auf eine Reihe linearer Complexe um, so erhält man eine Schaar von Gebilden, welche dem ersten theils reciprok theils collinear entsprechen. — Man betrachte nun irgend vier Tangenten einer R_3. Dieselben gehören einem Büschel linearer Complexe an. Formt man in Bezug auf dasselbe das Tangentensystem der R_3 um, so ergiebt sich eine *einfach unendliche Schaar* von R_3, welche die nämlichen vier Tangenten haben*).

*) Die „Gruppe" der Geraden, welche überhaupt durch Umformung in Bezug auf das Büschel $\alpha_x + \lambda \beta_x = 0$ aus einer Geraden y hervorgehen können, besteht aus den Erzeugenden eines Hyperboloides, die mit α, β, y zu derselben Schaar gehören.

Hieraus folgt: *Existirt überhaupt eine R_3, welche vier gegebene Gerade zu Tangenten hat, so giebt es einfach unendlich viele.*

Diese Schaar von Raumcurven bildet die Gesammtheit der Haupttangentencurven einer windschiefen Fläche sechster Ordnung mit zwei dreifachen Geraden und vier Rückkehrgeneratricen.

Denn jede Gerade, welche die beiden gemeinsamen Treffgeraden des Tangentenquadrupels und die R_3 trifft, muss bei sämmtlichen Umformungen des Raumes in sich selbst übergehen. Die Gesammtheit derselben bildet aber eine Fläche der genannten Art. Und auf dieser ist die R_3 nebst allen aus ihr durch Umformung hervorgehenden eine Haupttangentencurve, da sie Curve eines C_1 ist, dem die Fläche angehört*).

Je vier Tangenten einer R_3 sind also ihrer Lage nach nicht von einander unabhängig. Man betrachte nun irgend eine der R_3, welche drei Gerade zu Tangenten haben. Jede Erzeugende der nämlichen Schaar des Hyperboloides dieser Geraden trifft vier Tangenten der Curve. Formt man dieselbe um in Bezug auf das zweifach unendliche System der linearen Complexe, welche mit den drei Geraden in Involution liegen, so geht das Hyperboloid in sich selbst über; aus den vier Tangenten der Curve aber, welche eine Erzeugende d treffen, wird je eine zweifach unendliche (vierfache) Schaar von Geraden, welche Tangenten transformirter Curven sind und ebenfalls d treffen**). Dieselben ordnen sich in lineare Büschel, welche zu je vier von einem Punkte der d ausstrahlen. Es ist hieraus zu schliessen, *dass die Gesammtheit der Geraden, welche mit drei gegebenen ein Tangentenquadrupel von R_3 bilden, einen Complex vierten Grades ausmacht.*

Um dies aber noch genauer nachzuweisen, kann man sich mit Vortheil der liniengeometrischen Darstellung des Tangentensystems der R_3 bedienen***).

Die Gleichungen:

$$\varrho x_i = a_i + 4b_i\mu + 6c_i\lambda^2 + 4d_i\lambda^3 + e_i\lambda^4,$$

in welchen unter Anwendung der Bezeichnung:

---

*) Nach den Formeln, welche ich in einer Arbeit über windschiefe Flächen (diese Annalen Bd. VII) gegeben habe, sind die Haupttangentencurven von windschiefen Flächen sechster Ordnung der genannten Art ebenfalls von der sechsten Ordnung, jede derselben hat aber im vorliegenden Falle die Eigenschaft, in zwei R_3 zu zerfallen.

**) In dieser zweifach unendlichen linearen Schaar von C_1 befindet sich die einfach unendliche Schaar der Erzeugenden anderer Art, welche letzteren also als transformirte Raumcurven erscheinen. Denn jede Gerade des Raumes formt sich in Bezug auf einen speciellen C_1 um in dessen Axe.

***) Vgl. zur Theorie der windschiefen Flächen Math. Ann. VII. p. 115 ff.

$$\sum a_i b_i = (ab),$$

$$(aa)=(bb)=(dd)=(ee)=(ab)=(ad)=(ac)=(bc)=(be)=(dc)=(de)=(ce)=0,$$

$$(ae)=6(cc)=-4(bd)$$

zu nehmen ist, definiren die Liniencoordinaten x_i jener Tangenten. Aus ihnen folgt für irgend zwei derselben x und y, mit den Parametern λ, μ:

(2) $$\varrho\sigma(xy) = (ae)(\lambda-\mu)^4.$$

Aus (2) ergiebt sich sofort, dass je vier Tangenten a, b, c, x der folgenden Beziehung genügen müssen:

(3) $$\sqrt[4]{(ab)(cx)} + \sqrt[4]{(ac)(bx)} + \sqrt[4]{(bc)(ax)} = 0.$$

Demnach bilden die Geraden x, welche mit den gegebenen a, b, c Tangentenquadrupel einer R_3 ausmachen, einen *Complex vierter Ordnung, dessen Gleichung in* (3) *gegeben ist.*

Andererseits kann man unter Voraussetzung einer Gleichung von der Form (3) *die ganze Schaar der R_3 bestimmen, welche die entsprechenden vier Geraden berühren.* Sei nämlich:

$$\sqrt[4]{(xy)(ae)} + \sqrt[4]{(ax)(ey)} + \sqrt[4]{(ay)(ex)} = 0,$$

so handelt es sich darum, in der rechten Seite von (1) die Coefficienten b_i, c_i, d_i so zu bestimmen, dass die obigen Relationen zwischen ihnen und den a_i, e_i bestehen und den Parametern λ_0, λ_1 etwa die Tangenten x_i, y_i entsprechen. Dazu nehme man:

$$\lambda_0 = \sqrt[4]{\frac{(ax)}{(ex)}}, \quad \lambda_1 = -\sqrt[4]{\frac{(ay)}{(ey)}},$$

so dass:

$$\frac{(xy)(ae)}{(ex)(ey)} = (\lambda_0-\lambda_1)^4,$$

und bestimme die c_i bis auf einen willkürlichen Parameter aus den Gleichungen:

$$(ac)=0,\ (ec)=0,\ (cx)-\lambda_0^2(ex)=0,\ (cy)-\lambda_1^2(ey)=0,\ 6(cc)=(ae).$$

Da von diesen Gleichungen eine quadratisch ist, so erhält man zwei Systeme von Werthen c_i, welche sich in Bezug auf das Büschel linearer Complexe conjugirt verhalten, denen die Geraden a, e, x, y angehören.

Endlich findet man die b_i, d_i aus den Gleichungen:

$$4b_i\lambda_0\lambda_1(\lambda_1^2-\lambda_0^2) = \lambda_1^3 u_i - \lambda_0^3 v_i - 6\lambda_0^2\lambda_1^2(\lambda_1-\lambda_0)c_i,$$
$$4d_i\lambda_0\lambda_1(\lambda_0^2-\lambda_1^2) = \lambda_1 u_i - \lambda_0 v_i - 6\lambda_0\lambda_1(\lambda_0-\lambda_1)c_i,$$

wobei:

$$u_i = \frac{x_i(ae) - (ax)e_i}{(ex)} - a_i,$$

$$v_i = \frac{y_i(ae) - (ay)e_i}{(ey)} - a_i.$$

Eine eigentliche Discussion des Complexes (3) würde bei dessen sehr speciellem Charakter hier zu weit führen. Es sollen im Folgenden daher nur diejenigen Eigenschaften derselben hervorgehoben werden, welche in Bezug auf die Gruppirung der R_3-Schaaren von Interesse sind.

Setzt man:

$$(bc)(ax) = X, \quad (ac)(bx) = Y, \quad (ab)(cx) = Z,$$
$$X + Y + Z = u, \qquad XY + YZ + ZX = v,$$

so ist die Gleichung des Complexes in rationaler Form:

$$(4) \qquad (4v - u^2)^2 - 128\, XYZu = f = 0.$$

Die Geraden a, b, c bestimmen ein Hyperboloid H; alle Erzeugenden erster Art derselben schneiden die a, b, c *und sind singuläre Gerade des Complexes; der Complexkegel jedes Punktes derselben besteht aus vier ebenen Büscheln.* Ferner sind auch a, b, c selbst Gerade des Complexes. Daraus folgt, dass alle Tangentenbüschel von H längs jener Geraden a, b, c dem Complexe angehören. *Ausser jenen Geraden sind aber noch zwei andere Erzeugende zweiter Art, und mit ihnen alle Tangentenbüschel von H längs derselben, Gerade desselben.* Jene Erzeugenden zweiter Art sind nämlich in der Form:

$$(5) \qquad z_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i$$

enthalten, wo:

$$(6) \qquad (ab)\lambda\mu + (ac)\lambda\nu + (bc)\mu\nu = 0.$$

Soll eine der Geraden (5) der Gleichung (3) genügen, so muss noch die Gleichung:

$$(7) \qquad \sqrt{(ab)\lambda\mu} + \sqrt{(ac)\lambda\nu} + \sqrt{(bc)\mu\nu} = 0$$

bestehen. Aus (6), (7) ergeben sich zwei Werthsysteme der λ, μ, ν; mithin *zwei* Erzeugende zweiter Art h_1, h_2. Diese letzteren mögen als „Hesse'sches Paar" zu den Erzeugenden a, b, c bezeichnet werden; *sie schneiden in der That auf jeder Erzeugenden erster Art zwei Punkte* H_1, H_2 *aus, welche die Hesse'sche Covariante zu den entsprechenden Punkten A, B, C bilden,* die durch a, b, c bestimmt sind.

Ermittelt man nämlich aus (5), (6), (7) die Coordinaten h_1, h_2, so wird der lineare Complex:

$$(h_1 x) + \sigma (h_2 x) = 0$$

die Geraden a, b, c enthalten, wenn σ der cubischen Gleichung:

$$\sigma^3 + 1 = 0$$

genügt, woraus leicht hervorgeht, dass die Geraden h_1, h_2 das Hesse'sche Paar des Tripels a, b, c bilden*).

Es ist schon (siehe Anm.) bemerkt worden, wesshalb in dem Complex vierten Grades auch die Erzeugenden erster Art als Gerade auftreten müssen. Auch die beiden Hesse'schen Erzeugenden (zweiter Art) können nicht Tangenten von wirklichen Raumcurven sein**), sie haben aber die Eigenschaft, dass alle Tangentenbüschel von H längs derselben Tangenten von R_3 sein können. Die besondere Rolle, welche sie spielen, wird durch den folgenden Satz noch näher erläutert:

Alle R_3, welche drei gegebene Gerade berühren, haben die Eigenschaft, dass zwei ihrer Tangenten das Hyperboloid jener Geraden in Punkten der beiden Hesse'schen Erzeugenden der letzteren berühren. Der wesentliche Inhalt dieses Satzes ist schon dann erwiesen, wenn man zeigt, dass von den Tangenten einer R_3, die drei Erzeugende eines Hyperboloids berührt, nur noch zwei das letztere berühren können, da alle anderen R_3 aus jener durch Umformung abgeleitet werden. Verlangt man aber, dass die Gerade:

$$z_i = a_i + 4b_i\lambda + 6c_i\lambda^2 + 4d_i\lambda^3 + e_i\lambda^4,$$

zugleich Tangente des Hyperboloides der drei Geraden a_i, e_i, x_i (diese letztere den Werthen der z_i für $\lambda = \lambda_0$ entsprechend) sei, so erhält man die Bedingung:

$$\lambda^2 - \lambda\lambda_0 + \lambda_0^2 = 0.$$

Damit die Erzeugende:

$$\varrho_1(ex)a_i + \varrho_2(ax)e_i + \varrho_3(ea)x_i, \quad (\varrho_1\varrho_2 + \varrho_2\varrho_3 + \varrho_3\varrho_1 = 0),$$

von einer dieser Tangenten geschnitten werde, ist zu setzen,

$$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 = 2 : -1 \pm i\sqrt{3} : -[1 \pm i\sqrt{3}],$$

was in der That auf das Hesse'sche Paar führt.

Man bemerke ferner, dass für $X = 0$ die Gleichung (4) sich auf $(Y - Z)^4 = 0$ reducirt. Das heisst: Legt man durch einen beliebigen Punkt P und eine der Geraden a, b, c, etwa a, eine Ebene E, so wird der Complexkegel von P die Ebene E *unduliren* längs derjenigen Geraden, welche den Schnitt der Polare von P in Bezug auf das

---

*) Setzt man:

$$\begin{aligned}(ab)c_i + (cb)a_i + (ac)b_i &= p_i,\\ (bc)a_i - (ba)c_i &= u_i,\\ (ba)c_i - (ac)b_i &= v_i,\\ (ac)b_i - (bc)a_i &= w_i,\end{aligned}$$

so ist:

$$h_i = p_i - 3(ab)c_i \pm i\sqrt{3}\,u_i.$$

**) In der That führt auch die obige analytische Bestimmung der R_3-Schaar auf einen Widerspruch für die Quadrupel a, b, c, h_1 oder a, b, c, h_2.

Hyperboloid mit der Geraden a in Verbindung mit P setzt. Endlich ist jede Gerade einer der drei Congruenzen:

$$X = Z, \quad Y + 4X = 0,$$
$$Z = Y, \quad X + 4Z = 0,$$
$$Y = X, \quad Z + 4Y = 0$$

eine *Doppelgerade* jedes Complexkegels, dem sie angehört; jede Gerade einer der drei folgenden Congruenzen:

$$X = Z, \quad Y - 16X = 0,$$
$$Z = Y, \quad X - 16Z = 0,$$
$$Y = X, \quad Z - 16Y = 0$$

einfache Kante derselben. Demnach existiren drei Paare von Erzeugenden α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 der zweiten Schaar von der Art, dass für jeden Punkt P die Geraden, welche von P ausgehend das Paar α, oder β, oder γ treffen, Doppelkanten des Complexkegels von P sind, und drei andere Paare A_1, A_2; B_1, B_2; Γ_1, Γ_2 der nämlichen Schaar, deren drei Treffgeraden einfache Strahlen desselben bilden*).

Auf diese Bemerkungen gestützt, erhält man leicht die *Schnittcurve vierter Ordnung des Complexkegels eines beliebigen Punktes* P *mit der Polarebene des letzteren in Bezug auf das Hyperboloid* H:

Jene Polarebene nämlich schneidet H in dem Kegelschnitte K, als dessen Tangenten sich alle Erzeugenden von H aus auf jene Ebene projiciren. Die Projectionen von a, b, c berühren K in drei Undulationspunkten A, B, C jener Curve, welche in ihnen zugleich K berührt. Die Verbindungslinien von A, B, C mit den Ecken des Projectionsdreieckes der a, b, c schneiden sich in einem Punkte O, *dessen Polare in Bezug auf* K *dem Hyperboloid* H *in zwei Punkten* H_1, H_2 *begegnet, welche das Hesse'sche Paar bestimmen***).

---

*) Unter Anwendung der obigen Bezeichnungen ist:

$$\alpha_i = 2p_i - (ac)\, b_i \pm \sqrt{8}\, u_i,$$
$$\beta_i = 2p_i - (bc)\, a_i \pm \sqrt{8}\, v_i,$$
$$\gamma_i = 2p_i - (ab)\, c_i \pm \sqrt{8}\, w_i,$$
$$A_i = -8p_i + 9(ac) b_i \pm 4\sqrt{3}\, u_i,$$
$$B_i = -8p_i + 9(bc) a_i \pm 4\sqrt{3}\, v_i,$$
$$C_i = -8p_i + 9(ab) c_i \pm 4\sqrt{3}\, w_i.$$

**) Bezeichnet man den Punkt O als Centrum des Tangententripels der Projectionen der a, b, c, so hat man den folgenden Satz:

Jede Tangente eines Kegelschnittes schneidet drei feste Tangenten desselben in Punkten, deren Hesse'sches Paar durch die beiden Punkte gebildet wird, in denen sie von den beiden vom Centrum des Tangententripels auslaufenden Tan-

Hiermit sind schon 14 Punkte der Curve vierter Ordnung bekannt, welche jedenfalls völlig bestimmt ist, wenn man noch die drei doppelten und drei einfachen Punkte hinzunimmt, welche sich ergeben durch die Schnittpunkte der Tangenten von K in den Punkten, in denen derselbe von den Paaren α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2; A_1, A_2; B_1, B_2; Γ_1, Γ_2 getroffen wird. *Die Gleichung jener Curve in der Polarebene* ist übrigens, wenn man mit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die der Projectionen der a, b, c bezeichnet:

$$[a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 - 2a_1a_2x_1x_2 + 2a_1a_3x_1x_3 - 2a_2a_3x_2x_3]^2$$
$$= 128 a_1a_2a_3x_1x_2x_3[a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3],$$

unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen:

$$a_1x_1 - a_2x_2 = 0, \quad a_2x_2 - a_3x_3 = 0, \quad a_3x_3 - a_1x_1 = 0,$$

die Verbindungsgeraden der Punkte A, B, C mit den Ecken des Projections(coordinaten)dreiecks darstellen.

Die reciproke Construction liefert die Complexcurve in einer beliebigen Ebene. Der Complex ist hiernach völlig construirt und kann zur Lösung einer ganzen Reihe von Fragen dienen, welche sich auf die Bestimmung von Raumcurven dritter Ordnung durch elementare Bedingungen im Sinne des Herrn Schubert beziehen*). Es sei hier nur noch bemerkt, was nach dem Vorigen selbstverständlich ist, dass im Anschluss an die Auffassungsweise des Herrn Lie *jener Complex zu Charakteristiken jene ∞^3 Raumcurven dritter Ordnung hat, und dass seine ∞^2 Integralflächen jene Flächen sechster Ordnung sind, von denen oben gesprochen wurde.*

Der covariante Complex $\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0$, welcher mit $f = 0$ die singulären Geraden ausschneidet, kann mit Hilfe von $f=0$ in die Form:

$$\Omega = [9u^3 + 12uv + 24XYZ]\,XYZ$$

gebracht werden. Und da:

$$\frac{16u\Omega}{XYZ} - f = (7u^2 + 4v)^2,$$

so sind *die einzigen singulären Geraden, welche von einem beliebigen Punkte P ausgehen, die drei Doppel- und die drei Undulationskanten des betreffenden Complexkegels.*

Darmstadt im Juli 1877.

---

genten getroffen wird. Und ebenso bilden die drei Berührungspunkte eines Tangententripels ein cyclisch-projectivisches System mit den Durchschnittspunkten der Polare des Centrums des Tripels mit dem Kegelschnitte.

*) Als ich vor längerer Zeit Herrn Schubert gegenüber die Resultate der vorstehenden Betrachtungen erwähnte, theilte mir derselbe mit, dass er sich bereits im Besitze aller Zahlenrelationen der fraglichen Art befinde.

Ueber die Hesse'sche Curve.

Von A. Brill in München.

1.

Verhalten der Hesse'schen Curve in einem vielfachen Punkt der Grundcurve.

Wenn man die Gleichung einer algebraischen Curve in Cartesischen Coordinaten x, y nach der Dimension ihrer Glieder anordnet:

$$f(xy) = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + \cdots = 0,$$

wo $f^{(\varkappa)}$ die Summe der Glieder $\varkappa$-ter Dimension bedeutet, so ist jede Covariante von f als Summe von simultanen Formen der binären Bildungen $f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots$ darstellbar. Denkt man sich dieselben ebenfalls nach dem Grad geordnet, so gewährt die symbolische Rechnung das Mittel, um die einzelnen Glieder, von der nullten Dimension anfangend, aufzustellen und ihr Bildungsgesetz anzugeben. Aber auch ohne diese Rechnung wirklich durchzuführen, kann man die Covarianten bestimmen, aus denen sich jene Glieder zusammensetzen, und hierin liegt eine bequeme Handhabe zur Beurtheilung des Verhaltens der Hesse'schen Curve in der Umgebung eines singulären Punktes von f.

Führt man nämlich statt der Variabeln x, y homogene Variable $x_1 x_2 x_3$ ein und schreibt:

$$f(x_1 x_2 x_3) = f^{(0)} \cdot x_3^n + f^{(1)} \cdot x_3^{n-1} + f^{(2)} \cdot x_3^{n-2} + \cdots = \Sigma f^{(\varkappa)} x_3^{n-\varkappa},$$

(wo die Summe Σ sich von $\varkappa = 0$ bis $\varkappa = n$ erstreckt), setzt man ferner:

$$\frac{\partial f^{(\varkappa)}}{\partial x_r} = f_r^{(\varkappa)}; \quad \frac{\partial^2 f^{(\varkappa)}}{\partial x_r \, \partial x_s} = f_{rs}^{(\varkappa)},$$

so lässt sich die Hesse'sche Determinante, wenn wieder $x_3 = 1$ angenommen wird, in der Form anschreiben:

$$H = \begin{vmatrix} \Sigma f_{11}^{(\varkappa)} & \Sigma f_{12}^{(\varkappa)} & \Sigma(n-\varkappa) f_1^{(\varkappa)} \\ \Sigma f_{12}^{(\varkappa)} & \Sigma f_{22}^{(\varkappa)} & \Sigma(n-\varkappa) f_2^{(\varkappa)} \\ \Sigma(n-\varkappa) f_1^{(\varkappa)} & \Sigma(n-\varkappa) f_2^{(\varkappa)} & \Sigma(n-\varkappa)(n-\varkappa-1) f^{(\varkappa)} \end{vmatrix}.$$

Ich behaupte nun, dass sich — abgesehen von den Gliedern, welche f_0 und f_1 enthalten — die Determinante H aus Gliedern von der Form:

$$f^{(\varkappa)}_{11}\cdot f^{(\lambda)}_{22} + f^{(\varkappa)}_{22}\cdot f^{(\lambda)}_{11} - 2f^{(\varkappa)}_{12}\, f^{(\lambda)}_{12},$$

je multiplicirt mit einer Function $f^{(\mu)}$, linear mit ganzzahligen Coefficienten zusammensetzt. Dieser Differential-Ausdruck lässt sich kürzer als „zweite Ueberschiebung" der Form $f^{(\varkappa)}$ über die Form $f^{(\lambda)}$ bezeichnen und lautet, bis auf einen Zahlenfactor, in der üblichen symbolischen Darstellung folgendermassen:

$$(kl)^2\, k^{\varkappa-2}\, l^{\lambda-2},$$

wo:

$$f^{(\varkappa)} = k_x^{\varkappa} = (k_1x_1+k_2x_2)^{\varkappa}$$

ist,

$$f^{(\lambda)} = l_x^{(\lambda)},$$

und

$$(kl) = k_1 l_2 - l_1 k_2.$$

H zerfällt in zwei Theile, von deren einem:

$$\Sigma(n-\varkappa)(n-\varkappa-1)\, f^{(\varkappa)}\,.\begin{vmatrix} \Sigma f^{(\varkappa)}_{11} & \Sigma f^{(\varkappa)}_{12} \\ \Sigma f^{(\varkappa)}_{12} & \Sigma f^{(\varkappa)}_{22} \end{vmatrix},$$

die aufgestellte Behauptung unmittelbar gilt. Denn die Determinante hat den Werth:

$$\sum_{\varkappa}\begin{vmatrix} f^{(\varkappa)}_{11} & f^{(\varkappa)}_{12} \\ f^{(\varkappa)}_{21} & f^{(\varkappa)}_{22} \end{vmatrix} + \sum_{\varkappa}\sum_{\lambda}\left\{\begin{vmatrix} f^{(\varkappa)}_{11} & f^{(\lambda)}_{12} \\ f^{(\varkappa)}_{12} & f^{(\lambda)}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^{(\lambda)}_{11} & f^{(\varkappa)}_{12} \\ f^{(\lambda)}_{12} & f^{(\varkappa)}_{22} \end{vmatrix}\right\}$$

(wo in der Doppelsumme $\varkappa$ von λ verschieden ist).

Ebenso erkennt man in dem anderen Theil eine dreifache Summe von Ausdrücken von der Form:

$$\frac{1}{\varkappa^2(\varkappa-1)}\begin{vmatrix} f^{(\varkappa)}_{11} & f^{(\varkappa)}_{12} & f^{(\lambda)}_{1} \\ f^{(\varkappa)}_{12} & f^{(\varkappa)}_{22} & f^{(\lambda)}_{2} \\ f^{(\mu)}_{1} & f^{(\mu)}_{2} & 0 \end{vmatrix} = -(kl)(km)\, k_x^{\varkappa-2}\, l_x^{\lambda-1}\, m_x^{\mu-1}.$$

In dieser Summe treten diejenigen Glieder, für die λ von μ verschieden ist, doppelt auf. Nach einer bekannten Identität ist aber:

$$2(kl)(km)\, l_x\, m_x = l_x^2\,(km)^2 + k_x^2\,(lm)^2 + m_x^2\,(kl)^2,$$

und demnach ist die vorstehende Determinante immer als Summe von Ausdrücken von der Form:

$$(kl)^2\, k_x^{\varkappa-2}\, l_x^{\lambda-2}\, m_x^{\mu}$$

darstellbar, wenn nicht $\varkappa$ oder λ gleich Null oder Eins ist, d. h. wenn nicht eine der eingehenden Functionen $f^{(0)}$ oder $f^{(1)}$ ist. Dasselbe gilt demnach auch von H, und damit ist die Behauptung erwiesen.

Die Glieder, aus denen sich H zusammensetzt, besitzen also die Eigenschaft, in symbolischer Form:

1) zwei Klammerfactoren (wie (kl)), 2) drei Symbole (wie k) zu enthalten. Es ist hiernach leicht, das System der Formen, aus denen sich die Glieder der 0., 1., 2. $\cdots$ Dimension zusammensetzen, aufzustellen.

Sei in symbolischer Darstellung:

$$f^{(1)} = a_x = a'_x;\quad f^{(2)} = b_x^2 = b_x'^2 = b_x''^2;\quad f^{(3)} = c_x^3 = c_x'^3 = \cdots;$$
$$f^{(4)} = d_x^4;\qquad f^{(5)} = e_x^5;\ \cdots,$$

so sind die Glieder, welche $f^{(0)}$ und $f^{(1)}$ noch enthalten, nach dem Grad in den x geordnet, die folgenden:

$$\begin{array}{lllll}
(ba)(ba') & (ba)(bb')b'_x & (ba)(bc)c_x^2 & (ba)(bd)d_x^3 & \cdots \\
 & (ca)(ca')c_x & (ca)(cb)c_x b_x & (ca)(cc')c_x'^2 c_x & \cdots \\
 & & (da)(da')d_x^2 & (da)(db)d_x^2 b_x & \cdots \\
 & & & (ea)(ea')e_x^3 & \cdots \\
 & & & & \cdots \\
(bb')^2\cdot f^{(0)} & (bc)^2 c_x\cdot f^{(0)} & (bd)^2 d_x^2\cdot f^{(0)} & (be)^2 e_x^3\cdot f^{(0)} & \cdots \\
 & & (cc')^2 c_x c'_x\cdot f^{(0)} & (cd)^2 c_x d_x^2\cdot f^{(0)} & \cdots \\
 & & & & \cdots \\
 & (bb')^2\cdot a_x & (bc)^2 c_x\cdot a_x & (bd)^2 d_x^2\cdot a_x & \cdots \\
 & & & (cc')^2 c_x c'_x\cdot a_x & \cdots
\end{array}$$

Die übrigen Glieder bestehen nach unserem Satz aus zweiten Ueberschiebungen und sind die folgenden:

$$\begin{array}{llllll}
(bb')^2 b_x''^2 & (bb')^2\cdot c_x^3 & (bb')^2\cdot d_x^4 & (bb')^2\cdot e_x^5 & (bb')^2\cdot f_x^6 & \cdots \\
 & (bc)^2 c_x\cdot b_x^2 & (bc)^2 c_x\cdot c_x'^3 & (bc)^2 c_x\cdot d_x^4 & (bc)^2 c_x\cdot e_x^5 & \cdots \\
 & & \underline{(bd)^2 d_x^2\cdot b_x'^2} & (bd)^2 d_x^2\cdot c_x^3 & (bd)^2 d_x^2\cdot d_x^4 & \\
 & & (cc')^2 c_x c'_x\cdot b_x^2 & \underline{(be)^2 e_x^3\cdot b_x^2} & (be)^2 e_x^3\cdot c_x^3 & \\
 & & & (cc')^2 c_x c'_x\cdot c_x''^3 & \underline{(bf)^2 f_x^4\cdot b_x^2} & \\
 & & & (cd)^2 c_x d_x^2\cdot b_x^2 & (cc')^2 c_x c'_x\cdot d_x^4 & \cdots \\
 & & & & (cd)^2 c_x d_x^2\cdot c_x^3 & \cdots \\
 & & & & \underline{(ce)^2 c_x e_x^3\cdot b_x^2} & \\
 & & & & (dd')^2 d_x^2 d_x'^2\cdot b_x^2 & \cdots
\end{array}$$

Man schliesst aus dieser Tabelle auf das Verhalten der Hesse'schen Curve in der Umgebung eines Schnittpunktes mit der Grundcurve. Ist $f^{(0)} = 0$, geht also die Curve f durch den Eckpunkt $x_1 = x_2 = 0$ des Coordinatendreiecks, so geht die Hesse'sche Curve ebenfalls hindurch, wenn $(ba)(ba') = 0$ ist, d. h. wenn a_x Factor von $b_x{}^2$ ist, oder wenn die conische Polare des Punktes $x_1 = x_2 = 0$ in zwei Gerade zerfällt.

Ist $f^{(0)} = f^{(1)} = 0$, hat also f im Punkt $x_1 = x_2 = 0$ einen Doppelpunkt, so besitzt die Hesse'sche Curve daselbst einen eben solchen mit denselben Tangenten, denn das Glied niedrigster Ordnung von H wird*):

$$(bb')^2 \cdot b_x''^2.$$

Und allgemein, sind die Glieder 0^{ter} bis $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von f:

$$f^{(0)} = f^{(1)} = f^{(2)} = \cdots = f^{(\varkappa-1)} = 0,$$

so werden die Glieder 0^{ter} bis $(3\varkappa-4)^{\text{ter}}$ Dimension von H:

$$H^{(0)} = H^{(1)} = \cdots = H^{(3\varkappa-4)} = 0,$$

und das erste nicht verschwindende Glied reducirt sich auf:

$$H^{(3\varkappa-3)} = (kk')^2 k_x^{\varkappa-2} k_x'^{\varkappa-2} \cdot k_x''^{\varkappa},$$

wo $k_x^{(\varkappa)}$ die symbolische Form für $f^{(\varkappa)}$ ist. Man hat also den Satz:

*Die Hesse'sche Curve einer Curve f hat in einem $\varkappa$-fachen Punkt der Grundcurve**) einen $(3\varkappa-4)$fachen Punkt, von welchem $\varkappa$ Tangenten mit denen von f zusammenfallen, während die $2\varkappa-4$ übrigen sich durch die Hesse'sche Determinante der jene $\varkappa$ Tangenten bestimmenden binären Form darstellen lassen.*

2.

Ersetzbarkeit einer Curve durch die Hesse'sche Curve in einem Doppelpunkt der Grundcurve.

Die Auffassung der ternären Form als Summe von binären eignet sich, wie Nöther (Math. Ann. VI, 352) gezeigt hat, auch zur Untersuchung der Eigenschaften einer Curve $\psi = 0$, vermöge deren ψ auf die Form $\alpha\varphi + \beta f$ (wo φ und f gegebene, α und β noch unbestimmte ternäre Formen sind) gebracht werden kann.

Man betrachtet das Verhalten von ψ in der Nähe der einzelnen Schnittpunkte von φ mit f, wobei es genügt, nachdem man den Anfangspunkt des Coordinatensystems in einen solchen Punkt verlegt

---

*) Dieses Glied verschwindet für $(bb')^2 = 0$, d. h. wenn die Tangenten des Doppelpunkts zusammenfallen. Dann erhält H einen dreifachen Punkt, dessen Tangenten sich aus $(bc)^2 c_x \cdot b_x'^2 = 0$ berechnen (*Rückkehrpunkt*), wenn nicht die Covariante $(bc)^2 c_x$ identisch verschwindet, wobei denn zwei von den drei durch $c_x^3 = 0$ bestimmten Wurzeln mit den beiden gleichen von $b_x^2 = 0$ übereinstimmen. Die Hesse'sche Curve hat alsdann einen vierfachen Punkt, von dem wieder zwei Zweige mit denen von f übereinstimmen. Setzt man $b_x^2 = x_1^2$, so erkennt man aus der Entwicklung, dass diesem Fall ein *Selbstberührungspunkt* entspricht.

**) Die Tangenten dieses $\varkappa$-fachen Punktes können alle bis auf eine zusammenfallen; mit je m zusammenfallenden Tangenten von f vereinigen sich $2m-2$ Tangenten der Hesse'schen Curve. Fallen alle zusammen, so erhält die Letztere einen $(3\varkappa-3)$-fachen Punkt.

hat, die Eigenschaften der Anfangsglieder der Entwicklung von $\alpha\varphi+\beta f$ nach aufsteigenden Dimensionen von x_1 und x_2:

$$\psi^{(0)}+\psi^{(1)}+\cdots\equiv(\alpha^{(0)}+\alpha^{(1)}+\cdots)(\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\cdots)$$
$$+(\beta^{(0)}+\beta^{(1)}+\cdots)(f^{(0)}+f^{(1)}+\cdots)$$

zu untersuchen. Diese Identität ändert bei linearer Transformation der Variabeln ihre Form nicht, demnach sind die gesuchten Beziehungen zwischen f, φ, ψ projectivischer Natur und werden sich insbesondere *bei der binären Auffassung als Gleichungen zwischen simultanen Invarianten der binären Formen* $\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\ldots f^{(1)}f^{(2)}\ldots\psi^{(1)}\psi^{(2)}\ldots$ *darstellen.*

Kehrt man die Fragestellung um und verlangt die Eigenschaften einer Function φ zu kennen, welche, wenn f und ψ gegeben sind, obiger Identität genügt, so ergiebt sich das Bedürfniss einer neuen Ausdrucksweise; wir wollen dann sagen, dass „die Schnittpunkte der Curve $\varphi=0$ mit f durch einen Theil der von $\psi=0$ mit f *ersetzt* oder *vertreten* werden können.“ Dies möge auch auf die in einem einzelnen Punkt von f vereinigten Schnittpunkte übertragen werden, wenn in der Nähe desselben die obige Gleichung erfüllt ist.

Die Curve $\varphi=0$ kann selbstverständlich f nur in solchen Punkten treffen, in denen $\psi=0$ schneidet, also, wenn die Hesse'sche Determinante Factor von ψ ist, soweit dieser Factor in Frage kommt, nur in Wendepunkten und singulären Punkten von f, und zwar in den ersteren einfach. Das Verhalten von φ in den Letzteren ist dagegen noch nicht völlig bestimmt, was hier für den Fall, dass der singuläre Punkt ein Doppelpunkt ist, noch näher untersucht werden möge.

Haben in $x_1=x_2=0$ zugleich f und ψ einen Doppelpunkt mit denselben Tangenten, ist also $f^{(0)}=f^{(1)}=\psi^{(0)}=\psi^{(1)}=0$, und $f^{(2)}\equiv\psi^{(2)}$, so ist $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, $\cdots$ dadurch zunächst nicht weiter bestimmt. Ebensowenig ist dies mit $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\cdots$, der Fall, wenn man $\varphi^{(0)}=0$ annimmt, oder mit $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$, wenn $\varphi^{(0)}=\varphi^{(1)}=0$ gesetzt wird.

Denn im letzteren Fall hat man:

$$\psi^{(2)}=\alpha^{(0)}\varphi^{(2)}+\beta^{(0)}f^{(2)};\quad \psi^{(3)}=\alpha^{(0)}\varphi^{(3)}+\beta^{(0)}f^{(3)}+\alpha^{(1)}\varphi^{(2)}+\beta^{(1)}f^{(2)},$$

welche Gleichungen für $\alpha^{(0)}=0$ durch beliebige $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ erfüllt werden.

Hat man jedoch $\varphi^{(0)}=\varphi^{(1)}=\varphi^{(2)}=0$, so ist nun $\varphi^{(3)}$ nicht mehr völlig willkührlich annehmbar. Denn durch Vergleichung der Glieder gleicher Dimension erhält man:

$$\psi^{(2)}=\beta^{(0)}f^{(2)};\qquad \psi^{(3)}=\beta^{(0)}f^{(3)}+\alpha^{(0)}\varphi^{(3)}+\beta^{(1)}f^{(2)};$$
$$\psi^{(4)}=\beta^{(0)}f^{(4)}+\alpha^{(0)}\varphi^{(4)}+\beta^{(1)}f^{(3)}+\alpha^{(1)}\varphi^{(3)}+\beta^{(2)}f^{(2)},$$

Gleichungen, in denen man sich die Formen $\varphi^{(x)}$ und $f^{(x)}$ sämmtlich gegeben zu denken hat, $\psi^{(2)}$, $f^{(2)}$ conform der ersten Bedingungsgleichung; ferner werde, mit Rücksicht auf die Anwendung auf die Hesse'sche Curve:

$$\psi^{(3)} \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2) f^{(2)} + a_0 f^{(3)},$$

wo $a_0 a_1 a_2$ Constante sind, angenommen, die übrigen $\psi^{(\varkappa)}$ und $f^{(\varkappa)}$ beliebig. Dann folgt für die Coefficienten von:

$$\varphi^{(3)} = \varphi_0^{(3)} x_1^3 + \varphi_1^{(3)} x_1^2 x_2 + \varphi_2^{(3)} x_1 x_2^2 + \varphi_3^{(3)} x_2^3,$$

die Bedingungsgleichung:

$$\begin{vmatrix} \varphi_0^{(3)} & f_0^{(3)} & f_0^{(2)} & 0 \\ \varphi_1^{(3)} & f_1^{(3)} & f_1^{(2)} & f_0^{(2)} \\ \varphi_2^{(3)} & f_2^{(3)} & f_2^{(2)} & f_1^{(2)} \\ \varphi_3^{(3)} & f_3^{(3)} & 0 & f_2^{(2)} \end{vmatrix} = 0,$$

wo die zweite Verticalreihe die Coefficienten von $f^{(3)}$, die dritte und vierte die von $f^{(2)}$ enthalten. $\varphi^{(4)}$ ist nicht näher bestimmt.

Diese Gleichung wird der geometrischen Deutung zugänglich, wenn man in dieselbe die Wurzeln $\frac{\xi_1}{\xi_2}$, $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ der Gleichung $f^{(2)} = 0$ statt der Coefficienten einführt; dann lässt sich nämlich die mit $(\xi\eta)$ multiplicirte Determinante mit Hilfe bekannter Sätze auf die Form bringen:

$$\varphi^{(3)}(\xi) f^{(3)}(\eta) - f^{(3)}(\xi) \varphi^{(3)}(\eta) = 0.$$

Der Quotient $\frac{\varphi^{(3)}(\xi)}{\varphi^{(3)}(\eta)}$ stellt aber das Product der Abstandsverhältnisse der drei Tangenten des dreifachen Punktes von φ von den beiden Tangenten des Doppelpunktes von f dar; der Werth dieses Productes muss also gleich dem für die Wurzeln von $f^{(3)} = 0$ sein, welche die Schnittpunkte der cubischen Polaren von f (für den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ als Pol) mit der Geraden $x_3 = 0$ bestimmen.

Die oben für ψ gemachten Voraussetzungen werden u. A. erfüllt, wenn die Hesse'sche Determinante Factor von ψ ist. Man hat also den Satz:

Die Hesse'sche Curve H einer Curve f kann in einem Doppelpunkt der Letzteren eine andere Curve φ „vertreten", wenn diese überhaupt nicht oder nur ein- oder zweimal hindurch geht. Besitzt φ in diesem Punkt drei Zweige, so müssen die Tangenten derselben einer Bedingung genügen, wenn H die Curve φ in dem Punkt vertreten soll. Es muss nämlich das Product der drei Doppelverhältnisse, welche man aus den drei Tangenten des dreifachen Punktes von φ und den drei Strahlen nach den unendlich fernen Punkten*) der cubischen Polare von f, genommen in Bezug auf die beiden Tangenten des Doppelpunkts, bilden kann, gleich Eins sein.

*) Man überzeugt sich leicht davon, dass man statt der unendlich fernen Geraden jede beliebige nehmen könnte, indem das Product der Abstandsverhältnisse der Schnittpunkte von den beiden Tangenten des Doppelpunkts eine constante Grösse ist.

Ich füge die Bemerkung zu, dass die vorstehenden Gleichungen auch erfüllbar sind, und demnach der vorstehende Satz auch ausgesprochen werden kann für $\psi^{(3)} \equiv \psi^{(4)} \equiv \cdots \equiv 0$, d. h. wenn an Stelle der Hesse'schen Curve das Tangentenpaar von f im Doppelpunkt gesetzt wird.

Wir wenden uns nun zu einer Anwendung der vorstehenden Betrachtungen.

3.

Die Hesse'sche Curve der rationalen Curven vierter Ordnung.

Die Gleichung einer rationalen Curve vierter Ordnung lässt sich auf die Form bringen:

$$0 = f(x_1 x_2 x_3) = x_2^2 x_3^2 d_{11} + x_3^2 x_1^2 d_{22} + x_1^2 x_2^2 d_{33} + 2x_1^2 x_2 x_3 d_{23} + 2x_2^2 x_3 x_1 d_{31} + 2x_3^2 x_1 x_2 d_{12},$$

oder, nach Dimensionen von x_1, x_2 geordnet:

$$0 = f = x_3^2 \cdot f^{(2)} + x_3 \cdot f^{(3)} + f^{(4)},$$

wo:

$$f^{(2)} = x_1^2 d_{22} + 2x_1 x_2 d_{12} + x_2^2 d_{11}; \quad f^{(3)} = 2x_1 x_2 (d_{23} x_1 + d_{31} x_2);$$
$$f^{(4)} = x_1^2 x_2^2 d_{33}.$$

Die Hesse'sche Determinante H von f kann in $x_1 = x_2 = 0$ jede Curve $\varphi = 0$ „vertreten", die daselbst einen dreifachen Punkt hat, für dessen Tangenten das Product der Abstandsverhältnisse von den zwei festen Tangenten des Doppelpunkts gleich dem der drei Wurzeln von $f^{(3)} = 0$ ist. Nimmt man insbesondere eine solche Curve $\varphi = 0$, für welche die Tangenten des dreifachen Punktes die Wurzeln der Gleichung $f^{(3)} = 0$ selbst sind, so ist jene Bedingung erfüllt. Dies ist der Fall mit dem Product:

$$\varphi = x_1 x_2 x_3 \cdot D$$

der Verbindungslinien der drei Doppelpunkte und einem durch dieselben gehenden Kegelschnitt:

$$D \equiv x_3 x_2 d_{31} d_{12} + x_3 x_1 d_{12} d_{23} + x_1 x_2 d_{31} d_{23} = 0,$$

dessen Tangente in $x_1 = x_2 = 0$ sich aus:

$$x_2 d_{31} + x_1 d_{23} = 0$$

bestimmt. Aber aus Symmetriegründen erfüllt das Product φ jene Bedingung auch in den Doppelpunkten $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 = x_3 = 0$, und demnach ist das ganze Schnittpunktsystem des Products $x_1 x_2 x_3 \cdot D$ — mit Ausnahme der zwei weiteren Schnittpunkte, welche $D = 0$ ausserhalb der Doppelpunkte von f besitzt — in dem von H mit f enthalten. Multiplicirt man also H mit einer linearen Function G, welche, gleich Null gesetzt, eine Gerade durch jene zwei Schnittpunkte darstellt, so muss die Identität bestehen:

$$G \cdot H + f \cdot C \equiv x_1 x_2 x_3 \cdot D \cdot \Gamma,$$

wo $C = 0$ die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, $\Gamma = 0$ aber die Gleichung eines Kegelschnitts ist, der diejenigen Schnittpunkte von H mit f enthält, durch welche $x_1 x_2 x_3 D$ nicht hindurchgeht, d. h. die Gleichung eines durch die sechs Wendepunkte von f und die zwei noch unbeschäftigten Schnittpunkte der Geraden G mit f gehenden Kegelschnitts, des „Wendekegelschnitts", wie ich ihn an einem a. O. genannt habe (d. Annalen, Bd. XII, p. 104).

Die Bemerkungen des vorstehenden Paragraphen ergeben also ohne weitere Rechnung den Satz, *dass die sechs Wendepunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung auf einem Kegelschnitt liegen.* Aber man beweist mit Hilfe derselben noch eine andere elegante Eigenschaft dieser Curven.

Wenn nämlich (§ 2. a. E.) rücksichtlich des Verhaltens in den Doppelpunkten die Hesse'sche Curve mit ihrem Tangentenpaar vertauschbar ist, so muss für das Product $t_1 \tau_1 t_2 \tau_2 t_3 \tau_3$ der sechs Tangenten in den drei Doppelpunkten eine der obigen analoge Identität bestehen:

$$G \cdot t_1 \tau_1 t_2 \tau_2 t_3 \tau_3 + f \cdot C' \equiv x_1 x_2 x_3 \cdot D \cdot N,$$

wo G, D, f die vorige Bedeutung haben. Man schliesst hieraus, *dass die sechs Punkte, in welchen die Tangenten an die Zweige der drei Doppelpunkte die Curve noch weiter schneiden, mit den zwei weiteren Schnittpunkten des durch die Wendepunkte gehenden Kegelschnitts* (Γ) *auf einem Kegelschnitt* (N) *liegen.*

Endlich *liegen auch die vier weiteren Schnittpunkte der Tangentenpaare $t_1 \tau_1 t_2 \tau_2$ von zweien der drei Doppelpunkte mit denselben auf einem Kegelschnitt* (Δ). Denn man kann (§ 2.) in einem Doppelpunkt von f jeden beliebigen Doppelpunkt einer Curve φ (hier x_3^2) durch die Hesse'sche Curve oder das Tangentenpaar derselben ersetzen, woraus dann die Identität folgt:

$$t_1 \tau_1 t_2 \tau_2 - f \cdot \text{const.} \equiv x_3^2 \, \Delta.$$

München, im November 1877.

Ueber die Vertheilung der Elektricität auf Leitern, welche aus heterogenen Theilen bestehen.

Von D. Bobylew.

(Hierzu zwei lithographirte Tafeln.)

Allgemeiner Ueberblick.

Die Theorie der Volta'schen Säule beruht auf dem folgenden, als durchs Experiment bestätigt angenommenen, Satze:

Wenn irgend ein Leiter aus zwei heterogenen Theilen A und B besteht, entweder aus zwei verschiedenen Metallen, oder aus zwei ungemischten Massen verschiedener Flüssigkeiten, oder endlich aus einem Metalltheile und einer Flüssigkeit, welche alle dieselbe Temperatur haben, so ist, Gleichgewicht der Elektricität auf dem Leiter vorausgesetzt, auf dem Theile A die Potentialfunction eine constante Grösse $C(A)$, und ebenso eine constante Grösse $C(B)$ von anderem Werthe auf dem Theile B. Diese Constanten werden elektrische *Spannungen* genannt. Ihre Differenz: $C(A) - C(B)$, welche als *elektrische Differenz* zwischen A und B bezeichnet wird, ist eine Grösse, die nur von der Natur der Körper A, B und ihrer Temperatur abhängt.

Daraus folgt, dass bei der Berührung von zwei verschiedenen Körpern die Thätigkeit einer gewissen, die neutrale Elektricität scheidenden, Kraft erregt wird; diese Kraft nennt man *elektromotorische Kraft**).

---

*) In „Treatise on Electricity and Magnetism" von Maxwell ist dieser Satz in folgender Form ausgesprochen:

„*The Potentials of Different Substances in Contact*"

„246. If we define the potential of a hollow conducting vessel as the potential „of the air inside the vessel, we may ascertain this potential by means of an „electrometer as described in Part I, Art. 222."

„If we now take two hollow vessels of different metals, say copper and zinc, „and put them in metallic contact with each other, and then test the potential „of the air inside each vessel, the potential of the air inside the zinc vessel will „be positive as compared with that inside the copper vessel. The difference of „potentials depends on the nature of the surface of the insides of the vessels,

Unter dieser Benennung versteht man jedoch nicht nur diese Kraft, sondern im Allgemeinen solche, welche auf die elektrischen Quantitäten wirken können, nämlich:

a) elektromotorische Kräfte elektrostatischen Ursprunges,

b) elektromotorische Kräfte, welche bei Berührung (Contact) heterogener Körper erregt werden, und

c) elektromotorische Kräfte elektrodynamischen Ursprunges.

Aus diesem Grunde glaube ich die Kräfte (b) mit einem besonderen Ausdruck: „die galvanischen Kräfte" bezeichnen zu dürfen.

Dieser Grundsatz der Theorie der Volta'schen Säule in der oben gegebenen oder in der citirten Form von Mascart enthält implicite:

Hypothese I: *In einem zusammengesetzten Leiter, welcher aus heterogenen Theilen besteht, kann die Elektricität im Gleichgewichte sein.*

Zum Gleichgewicht der Elektricität ist es nothwendig, dass die elektromotorischen Kräfte in jedem Punkte innerhalb des Leiters sich im Gleichgewichte befinden; seien X, Y, Z die Componenten der galvanischen Kraft, welche auf die Einheit der positiven Elektricität in einem Punkte (x, y, z) wirkt, und V die Potentialfunction aller in dem Leiter befindlichen Elektricitätsquantitäten, so werden die Gleichgewichtsbedingungen durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$X - \frac{dV}{dx} = 0; \quad Y - \frac{dV}{dy} = 0; \quad Z - \frac{dV}{dz} = 0;$$

es muss demnach die galvanische Kraft innerhalb des ganzen Leiters eine Potentialfunction haben; ich will sie G nennen. Die letzten Formeln zeigen dann, dass die *Summe* $(G + V)$ *auf dem ganzen Leiter ein und denselben constanten Werth hat.*

„being greatest when the zinc is bright and when the copper is coated with „oxide."

„It appears from this that when two different metals are in contact there „is in general an electromotive force acting from the one to the other, so as to „make the potential of the one exceed that of the other by a certain quantity. „This is Volta's theory of Contact Electricity." Seite 299, Vol. I.

In dem Werke von Mascart: „Traité d'électricité statique", Bd. II, S. 337, ist derselbe Satz so ausgedrückt:

„Pour traduire l'idée de Volta dans le langage actuel il suffit d'admettre „que le contact de deux corps établit entre eux une certaine différence de po- „tentiel. Chacun des deux métaux est à un potentiel constant dans toute son „étendue; mais, au passage d'un métal à l'autre à travers la surface de contact, „il se manifeste un changement rapide de niveau électrique. Ce changement, „sans être absolument brusque, ce qui serait contraire au principe général de „continuité dans les phénomènes physiques, s'effectue dans une étendue inappré- „ciable, et la variation du potentiel est indépendante de la valeur absolue du „potentiel sur chacun des métaux. C'est là l'hypothèse fondamentale dont tous „les phénomènes peuvent se déduire; . . . ."

Daraus muss man schliessen, dass die Potentialfunction (Spannung), welche in dem oben angegebenen Grundsatze der Theorie der Volta'schen Säule vorkommt, und welche, wie dort vorausgesetzt wurde, verschiedene Werthe an verschiedenen Theilen eines und desselben Leiters hat, nicht die Summe $(G + V)$ ist, sondern einen andern Werth hat.

Versteht man unter dem Worte „Spannung" nur die Potentialfunction der auf dem Leiter vertheilten Elektricitätsquantitäten, so wird dabei hypothetisch vorausgesetzt, dass im Innern eines jeden Theiles A und B die galvanische Kraft verschwindet und eine merkliche Grösse nur in der nächsten Nähe ihrer Oberflächen erreicht.

In einem Leiter, welcher aus verschiedenen Theilen A, B, C, $\cdots$ zusammengesetzt ist, muss man die äussere Oberfläche von den Flächen, in welchen die verschiedenen Theile A, B, C, $\cdots$ aneinander grenzen, unterscheiden. Ich will die letzteren „Grenzflächen" nennen und mit den Symbolen $S(AB)$, $S(BC)$, $\cdots$ bezeichnen.

Die Grenzflächen erscheinen auf der äusseren Oberfläche des Leiters als geschlossene Linien; diese Linien $\Sigma(AB)$, $\Sigma(BC)$ werde ich „Grenzlinien" nennen.

Wenn die galvanische Kraft in der nächsten Nähe der Oberfläche eine merkliche Grösse hat, so fragt es sich, ob diese Eigenschaft nur den Grenzflächen oder auch den äusseren Oberflächen zuzuschreiben ist?

Diese Frage kann man muthmasslich nur dahin beantworten, dass die galvanischen Kräfte wahrscheinlich zu denjenigen Kräften gehören, welche nur in einer unmessbar-kleinen Entfernung von ihren Ausgangscentren eine merkliche Grösse besitzen; die wahrscheinlichste Lage dieser Centra, von welchen die Wirkung der galvanischen Kräfte ausgeht, befindet sich längs der Grenzflächen.

Diese Voraussetzungen fasse ich in Form der folgenden Hypothese:

Hypothese II. *Die galvanische Kraft geht von den Mittelpunkten aus, welche längs der Grenzflächen vertheilt sind; diese Kraft hat eine merkliche Grösse nur in solchen Punkten innerhalb des Leiters, welche von der Grenzfläche nicht mehr als um einen unmessbar-kleinen Abstand* τ *entfernt sind. Denken wir uns zu beiden Seiten jeder Grenzfläche zwei andere ihr parallele Oberflächen construirt, welche allenthalben von der Grenzfläche um* τ *entfernt sind, so werden diese Oberflächen eine Schicht abgrenzen, innerhalb welcher die galvanischen Kräfte wirken und eine merkliche Grösse haben. Die Dicke* 2τ *dieser Schicht ist unmessbar-klein, und wir werden sie weiter als eine unendlichkleine Grösse behandeln.*

Ausserhalb dieser Schicht wirkt die galvanische Kraft nicht. Wenn wir uns daher die Räume dieser Schichten aus dem Leiter ausgeschlossen denken, so muss die Potentialfunction V an allen übrigen Stellen des Theiles A, *innerhalb desselben und auf seiner äusseren Oberfläche*, eine

constante Grösse $C(A)$ haben; ebenso muss die Potentialfunction innerhalb und auf der äusseren Oberfläche des Theiles B, die Schichten $S(AB)$ und $S(BC)$ ausgeschlossen, eine constante Grösse $C(B)$ haben u. s. w.

Innerhalb der Schichten ist die Potentialfunction V veränderlich, wahrscheinlich in continuirlicher Weise.

In Betreff des Zusammenhanges der Grössen $C(A)$, $C(B)$, $C(C)$, $\cdots$ wird in der fundamentalen Voraussetzung der Theorie der Volta'schen Säule, wie oben erwähnt, folgende Hypothese angenommen:

Hypothese III: *Die Differenz der Spannungen zweier aneinandergrenzender Körper A und B, welche eine in allen ihren Theilen gleiche constante Temperatur haben, hängt nur von der Natur der Körper A, B und ihrer Temperatur ab; diese Differenz wird „Elektrische Differenz" zwischen A und B genannt und soll mit dem Symbol $A \mid B$ bezeichnet werden.*

Diese Hypothese muss so verstanden werden, dass die elektrische Differenz gänzlich unabhängig ist, sowohl von der Grösse und Gestalt der Körper A, B, als auch von der Form und Grösse der Grenzfläche, ebenso auch davon, ob die Körper mit irgend welchen anderen Körpern in Berührung treten, oder ob endlich diesen Körpern irgendwelche elektrische Ladung zugeführt ist.

Unter Annahme der Hypothesen I, II und III lässt sich beweisen, dass die freie Elektricität auf der äusseren Oberfläche und innerhalb der Schichten vertheilt sein muss.

Um die Vertheilung der Elektricität auf der äusseren Oberfläche eines Leiters von endlichen Dimensionen zu finden, genügt es, die Lage der Niveauflächen der Potentialfunction im äussern Raume zu kennen; zur Bestimmung der Vertheilung der Elektricität innerhalb der Schichten jedoch müssen die Grössen der Componenten X, Y, Z der galvanischen Kraft innerhalb dieser Schichten gegeben sein.

Die Form und Lage der Niveauflächen kann nach bekannten Methoden bestimmt werden:

A) wenn wir mit Sicherheit wissen, dass die Elektricitätsquantitäten mit endlicher Dichtigkeit vertheilt sind, und

B) wenn ausserdem die Grösse der Potentialfunction in allen Punkten der äusseren Oberfläche gegeben ist.

Denn wenn wir überzeugt sind, dass die Dichtigkeit der Elektricitätsquantitäten nirgends unendlich gross ist, so lässt sich beweisen,

a) dass die Potentialfunction V innerhalb des äusseren Raumes der Differentialgleichung $\Delta_2 V = 0$ genügt,

b) dass die Potentialfunction V nebst ihren ersten Derivirten innerhalb des äusseren Raumes stetig, endlich und in jedem Punkte einwerthig ist, und

c) dass in einer unendlichgrossen Entfernung K die Potentialfunction wie $\frac{1}{K}$ verschwindet und ihre ersten Derivirten wie $\frac{1}{K^2}$.

Es ist aber bekannt, dass die Bedingungen (a, b, c, B) völlig genügen, um den Ausdruck der Potentialfunction in dem ganzen äusseren Raume zu bestimmen.

In dem uns vorliegenden Falle sind wir aber durchaus nicht berechtigt anzunehmen, dass die Elektricitätsquantitäten in allen Punkten des Leiters eine endliche Dichtigkeit haben; denn sobald wir voraussetzen, dass die Schichten unendlich dünn sind, so müssen wir auch folgern, dass die Potentialfunction auf der äusseren Oberfläche längs den Grenzlinien endliche Sprünge erleide.

Wollte man die Dicke 2τ der Schichten als nicht unendlich klein annehmen, so werden die Grössen der Potentialfunction auf den Gürteln $T(AB)$, $T(BC)$ *) $\cdots\cdots$ der äussern Oberflächen, welche die Schichten aus ihr herausschneiden, unbekannt. Ausserdem kann in dem äusseren Raume, aber nur in der nächsten Umgebung jeder Grenzlinie $\Sigma(AB)$, $\Sigma(BC)$, $\cdots$ (d. h. in den Punkten des äusseren Raumes, welche von den Grenzlinien nicht weiter als um τ entfernt sind), die galvanische Kraft eine soweit merkliche Grösse erreichen, dass sie die Lage der Niveauflächen in der Nähe der Grenzlinien verändert.

Wenn man hingegen für die Dicke der Schichten einen unendlich kleinen Werth annimmt, so muss man, wegen des endlichen Sprunges der Potentialfunction auf der äusseren Oberfläche, erwarten:

1) dass die Elektricität auf dem Leiter an irgendwelchen Stellen eine unendlich grosse Dichtigkeit habe; da aus der Theorie der Potentialfunction bekannt ist, dass bei der Vertheilung der Elektricität mit einer endlichen Dichtigkeit die Potentialfunction allenthalben endlich sein muss,
2) dass im äusseren Raume in den nächsten Umgebungen jeder Grenzlinie solche Stellen vorkommen, an welchen die Potentialfunction oder ihre Derivirten Stetigkeitsunterbrechungen erleiden.

An allen übrigen Stellen des äusseren Raumes kann die Potentialfunction den Bedingungen (a, b, c) genügen und auf der äusseren Oberfläche des Leiters die ihr zugeschriebenen Werthe haben.

Eine solche Function habe ich für einen kugelförmigen Leiter bestimmt, welcher aus zwei Theilen *Zn* und *Cu* **) besteht, die auf der äusseren Oberfläche in einem Kreise aneinander grenzen.

---

*) $T(AB)$, $T(BC)$, $\cdots$ bedeuten die hohen Kanten der Schichten.

**) *Zn* bedeutet Zink, *Cu* bedeutet Kupfer.

Im Folgenden wird nun in § 1. gezeigt, dass die Function V des Punktes m (sphärische Coordinaten ϱ, φ, ψ), welche durch die Summe von zwei Oberflächenintegralen (Ausdruck 4) dargestellt wird, in dem Raume ausserhalb der Kugel (Kugelradius R) folgende Eigenschaften hat:

a) sie genügt der Differentialgleichung $\Delta_2 V = 0$;

b) für $\varrho > R$ ist diese Function sammt ihren ersten Derivirten stetig und endlich;

c) für $\varrho = \infty$ verschwindet die Function wie $\frac{1}{\varrho}$ und ihre erste Derivirte nach ϱ — wie $\frac{1}{\varrho^2}$.

B) Wenn der Punkt m auf der äusseren Oberfläche des Zn liegt, so wird $V = C(Zn)$; liegt m auf der äusseren Oberfläche von Cu, so wird $V = C(Cu)$.

C) Auf der Grenzlinie $L_1 L'$ ist die Function vieldeutig, dergestalt, dass diejenigen Niveauflächen der Function V, deren Parameter zwischen den Grenzen $C(Zn)$ und $C(Cu)$ liegt, alle durch die Grenzlinie gehen.

Die Function V wird als eine Summe (13) dargestellt, deren zweites Glied eine Function U enthält, welche durch die Reihe (14) ausgedrückt ist.

Die Function U genügt den Bedingungen (a, b, c) in dem äusseren Raume,

B') sie hat eine constante Grösse $(+1)$ auf der äusseren Oberfläche des Zn und (-1) auf der äusseren Oberfläche des Cu;

C') auf der Grenzlinie ist sie vieldeutig, so dass alle ihre Niveauflächen, deren Parameter zwischen $+1$ und -1 liegen, durch die Grenzlinie gehen.

Um die letzte Eigenschaft (C') der Function U zu beweisen, theile ich den ganzen äusseren Raum in drei Theile $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und zwar so, dass $\mathfrak{A}$ — zwischen der äusseren Oberfläche des Zn und einer Kugelcalotte, welche durch die Grenzlinie $L_1 L'$ und das Centrum geht, liegt; $\mathfrak{B}$ — zwischen dieser Oberfläche und der ebenen Fläche, in welcher die Kreislinie $L_1 L'$ sich befindet, $\mathfrak{C}$ — zwischen dieser Fläche und der Oberfläche des Theiles Cu.

Es wird bewiesen, dass im Raume $\mathfrak{A}$ — $U = \frac{R}{\varrho} - M$; im Raume $\mathfrak{B}$ — $U = -\frac{R}{\varrho} - M$, wo M ein bestimmtes Integral (30) ist; im Raume $\mathfrak{C}$ — $U = -\frac{R}{\varrho} - M'$, wo M' ein anderes bestimmtes Integral (39) bedeutet.

Da im § 3. einige Differentialquotienten von M und M' bekannt sein müssen, so entwickele ich im § 2. die Differentialquotienten von

M und M' nach den Coordinatenparametern, welche die Lage des Punktes m im Raume bestimmen.

Vorläufig wähle ich ein passendes Coordinatensystem. In den §§ 2. und 3. werde ich dasselbe System, welches Herr Mehler in seiner Abhandlung über die Vertheilung der statischen Elektricität in einem von zwei Kugelcalotten begrenzten Körper (Crelle J. Bd. 68, Seite 134—150) anwendet, als das für meine Untersuchung vortheilhafteste gebrauchen. Im Anfange des § definire ich die Bedeutung der drei Coordinatenparameter ψ, q und ϑ dieses Systems.

Die äusseren Oberflächen der Theile Zn und Cu sind die Niveauflächen der Function U; zugleich stellt jede eine Coordinatenoberfläche $q = \text{const.}$ vor; daher verschwinden die Differentialquotienten $\frac{dM}{d\vartheta}$ und $\frac{dM'}{d\vartheta}$ auf diesen Oberflächen.

Der Eigenschaft (C′) gemäss gehen alle Niveauflächen der Function U, deren Parameter zwischen $+1$ und -1 liegen, durch die Grenzlinie $L_1 L'$. Durch dieselbe gehen ferner auch alle Coordinatenflächen $q = \text{const.}$ In § 2. wird dann bewiesen, dass auf der Grenzlinie die Differentialquotienten $\frac{dM}{d\vartheta}$ und $\frac{dM'}{d\vartheta}$ verschwinden.

In § 3. zeige ich, dass V als eine Summe (69) von drei Gliedern dargestellt werden kann. Die zwei ersten Glieder bilden die Potentialfunction der Elektricitätsquantitäten, welche auf der äusseren Oberfläche des Cu mit der Dichtigkeit σ_1 und auf der äusseren Oberfläche des Zn mit der Dichtigkeit σ_2 vertheilt sind; das dritte Glied der Summe (69) ist:

$$\frac{Zn \mid Cu}{4\pi} \Omega,$$

wo Ω das Integral:

$$\int \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{dn} dS = \int (\pm d\omega)$$

bedeutet. Dieses Integral ist ausgedehnt über alle Oberflächenelemente dS einer nicht geschlossenen Oberfläche S, die innerhalb des Leiters liegt und von der Linie $L_1 L'$, welche die Kante von S bildet, begrenzt ist. Diejenige Seite der Oberfläche S, welche in der Grenzlinie auf die äussere Oberfläche des Zn austritt, wird positive, die andere — negative Seite genannt. $d\omega$ bedeutet die Kegelöffnung, unter welcher das Element dS aus dem Punkte m gesehen wird; $d\omega$ ist mit dem positiven oder negativen Vorzeichen zu nehmen, je nachdem das Element dS seine positive oder negative Seite dem Punkte m zukehrt; T ist die Entfernung des Punktes m von dem Oberflächenelemente dS, n — die auf dS von der positiven Seite errichtete Normale; die Richtung T wird von m nach dS gerechnet.

Der Ausdruck von der Form $\frac{Zn \mid Cu}{4\pi}\,\Omega$ ist in der Elektrodynamik und der Theorie des Magnetismus als die Potentialfunction einer magnetischen Doppelschicht*) bekannt, welche längs der Oberfläche S auf folgende Art construirt ist:

Auf jeder Seite der Fläche S denkt man sich eine ihr parallele Oberfläche in dem unendlich kleinen längs den Normalen gerechneten Abstande ε. Diese Oberflächen S_1 und S' werden auf folgende Weise die eine, S_1, mit dem nordmagnetischen, die andere, S', mit dem südmagnetischen Fluidum belegt:

Aus allen Punkten der Peripherie eines Elements dS der Fläche S errichten wir Normalen nach beiden Seiten. Die durch diese Normalen gebildete Oberfläche schneidet aus den Oberflächen S_1, S' die Elemente dS_1 und dS' aus; das Element dS_1 muss mit der Quantität $\frac{Zn \mid Cu}{8\pi\varepsilon}\,dS$ des nordmagnetischen Fluidums und das Element dS' — mit der gleichen Quantität südmagnetischen Fluidums belegt werden. Ebenso verfährt man mit der ganzen Fläche S.

Die Grösse $\frac{Zn \mid Cu}{4\pi}$, welche als Coefficient der Kegelöffnung Ω im Ausdrucke der Potentialfunction einer doppelt-magnetischen Schicht steht, ist ein Quotient von dem magnetischen Momente $\frac{Zn \mid Cu}{8\pi\varepsilon}\,dS \cdot 2\varepsilon$ der über dem Elemente dS vertheilten magnetischen Quantitäten und der Grösse der Oberfläche des Elementes dS; dieser Quotient hat eine und dieselbe Grösse längs der ganzen Oberfläche und soll „Stärke“**) der Schicht genannt werden.

In gegenwärtiger Untersuchung, wo die Rede nur von den elektrischen Quantitäten ist, werde ich den Ausdruck $\frac{Zn \mid Cu}{4\pi}\,\Omega$ als die Potentialfunction einer doppelt-elektrischen Schicht von der Stärke $\frac{Zn \mid Cu}{4\pi}$ betrachten.

Diese Schicht befindet sich innerhalb des Leiters; sie hat ihren Rand auf der Grenzlinie $L_1 L'$ und kehrt ihre positive Seite in dieser Linie nach der äusseren Oberfläche des Zn. Die Lage der Schicht innerhalb des Leiters ist für seine Wirkung in dem äusseren Raume ganz gleichgültig; aber aus einem später zu erwähnenden Grunde muss man annehmen, dass diese Schicht auf der Grenzfläche liegt.

---

*) „Magnetic shell“, Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. II, Seite 32 und flgd.

**) „Strength“, Maxwell, Vol. II, S. 32, und Thomson, Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism, S. 379.

Die Potentialfunction einer doppelt-elektrischen Schicht besitzt dieselben Eigenschaften wie die Potentialfunction einer doppelt-magnetischen Schicht. Eine von diesen Eigenschaften ist folgende:

D) Die Potentialfunction einer doppelten Schicht erleidet einen Sprung nur beim Durchgange des Punktes m durch die Schicht selbst; die Grösse des Sprunges bei dem Durchgange von der positiven auf die negative Seite ist: $4\pi \times$ (Stärke).

In gegenwärtigem Falle ist die Grösse des Sprunges $Zn \mid Cu$; dieselbe Grösse hat auch der Sprung der Potentialfunction aller auf dem Leiter befindlichen Elektricität, und dieser Sprung findet statt auf der Grenzfläche. Sobald also bewiesen ist, dass die Potentialfunction der auf der äusseren Oberfläche mit den Dichtigkeiten σ_1, σ_2 vertheilten Quantitäten innerhalb des Leiters continuirlich ist, muss man schliessen, dass der Sprung nur durch die Doppelschicht hervorgebracht wird, und dass diese auf der Grenzfläche liegt.

Die Dichtigkeit $\frac{Zn \mid Cu}{8\pi\varepsilon}$ der elektrischen Belegungen der Flächen S_1 und S' ist unendlich gross, weil ε unendlich klein ist.

In dem § 4. drücke ich die Dichtigkeiten σ_1 und σ_2 in elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung aus. Nach den so gewonnenen Formeln (73), (74), (98), (99) habe ich für den Fall $\alpha = 30^\circ$ die Grösse der Dichtigkeit in einigen Punkten der äusseren Oberfläche der Kugel berechnet.

Die Formeln geben auf der Grenzfläche $\sigma_1 = -\infty$, $\sigma_2 = +\infty$.

In dem § 5. zeige ich, dass die Potentialfunction der auf der äusseren Oberfläche vertheilten Elektricitätsquantitäten innerhalb des Leiters den Ausdruck

$$\mathfrak{v} = C(Cu) + \frac{Zn \mid Cu}{4\pi}\,\mathfrak{O}$$

annimmt, wo $\mathfrak{O}$ die Grösse der reducirten Kegelöffnung bedeutet, unter welcher die äussere Oberfläche des Zn von dem Punkte μ innerhalb des Leiters aus gesehen wird. Da $\mathfrak{O}$ eine continuirliche Function innerhalb des ganzen Leiters ist, so kann $\mathfrak{v}$ daselbst keinen Sprung erleiden.

Wenn zu $\mathfrak{v}$ die Potentialfunction $\mathfrak{w}$ der die Grenzfläche belegenden Doppelschicht addirt wird, so ergiebt sich, dass die Summe $(\mathfrak{v} + \mathfrak{w})$ innerhalb des Zn gleich $C(Zn)$ und innerhalb des Cu gleich $C(Cu)$ ist.

Nach den Untersuchungen der §§ 1. — 5. halte ich mich für berechtigt, die Formeln (73), (74), (98), (99) als erste Annäherung zur Lösung der Frage über die Vertheilung der statischen Elektricität auf der äusseren Oberfläche des obengenannten heterogenen Leiters zu betrachten.

Den Inhalt der gegenwärtigen Abhandlung kann ich in folgende Worte zusammenfassen:

Ich bestimme die Vertheilung der Elektricität auf den äusseren Oberflächen eines Systems von Leitern, welche aus heterogenen Theilen bestehen, indem ich mich ausser auf die Hypothesen I, II, III noch auf die folgenden stütze:

Hypothese IV: *Wenn jede Grenzlinie aus dem äusseren Raume vermittelst einer trogartigen Oberfläche* (wie in § 3.) *ausgeschlossen wird, und wenn jede solche Oberfläche ihre Grenzlinie so eng wie möglich umschliesst, so verschwinden die Integrale:*

$$\int \frac{dV}{dn}\frac{dc}{T}; \qquad \int \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{dn} V\, dc;$$

wo ein jedes Integral über die Elemente einer solchen trogartigen Oberfläche ausgedehnt ist.

Bestehen mehrere Leiter: 1, 2, 3, ⋯, und zwar:

der Leiter 1 aus den Theilen A_1, B_1, C_1, ⋯,
" " 2 " " " A_2, B_2, C_2, ⋯,
" " 3 " " " A_3, B_3, C_3, ⋯,

so kann, gemäss Hypothese IV, die Potentialfunction der Elektricität auf diesen Leitern in einem Punkte m des äusseren Raumes durch die folgende Summe von Integralen dargestellt werden:

$$(1)\quad V = \frac{1}{4\pi}\left\{C(A_1)\int\limits_{A_1} \frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{d\mathfrak{N}}\, d\mathfrak{S} + C(B_1)\int\limits_{B_1} \frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{d\mathfrak{N}}\, d\mathfrak{S} + \cdots\right\} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\left\{C(A_2)\int\limits_{A_2} \frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{d\mathfrak{N}}\, d\mathfrak{S} + C(B_2)\int\limits_{B_2} \frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{d\mathfrak{N}}\, d\mathfrak{S} + \cdots\right\} + \cdots$$

Jedes Integral ist über die Elemente $d\mathfrak{S}$ der äusseren Oberfläche von einem der Theile A_1, B_1, ⋯ A_2, ⋯ ausgedehnt; $C(A_1)$, $C(B_1)$, ⋯ sind die Spannungen auf diesen Theilen; T ist die Entfernung des Punktes m von einem anderen äusseren Punkte M; Φ ist die Green'sche Function*) für die äussere Oberfläche des gegebenen Leitersystems und für die Punkte m und M; $d\mathfrak{N}$ ist das Differential der auf $d\mathfrak{S}$ nach dem äusseren Raume errichteten Normale. Die unter dem Integralzeichen befindlichen Differentialquotienten sind die Derivirten der

---

*) Ueber die Green'schen Functionen handelt sehr ausführlich die Abhandlung von C. Neumann: Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt ist. Halle (Druck u. Verl. von Schmidt) 1862.

Differenz $\left(\frac{1}{T} - \Phi\right)$ in dem Punkte M, welcher auf dem Elemente $d\mathfrak{S}$ liegt, in der Richtung der nach aussen errichteten Normale $\mathfrak{N}$; das heisst:

$$\frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{d\mathfrak{N}} = \left[\frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{dx_1}\right]_0 \cos\alpha + \left[\frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{dy_1}\right]_0 \cos\beta + \left[\frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{dz_1}\right]_0 \cos\gamma;$$

worin: x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes M; α, β, γ — die Winkel, welche die äussere Normale $\mathfrak{N}$ mit den Coordinatenaxen bildet, bedeuten; die in den Klammern: $[\;]_0$ stehenden Derivirten nach x_1, y_1, z_1 drücken die Grenzwerthe aus, nach welchen dieselben bei einer Näherung des Punktes M bis an das Element $d\mathfrak{S}$ der Oberfläche streben.

In den §§ 8. und 9. wende ich die Formel zur Bestimmung der Vertheilung der statischen Elektricität auf eine galvanische ungeschlossene Säule an, deren äussere Oberfläche eine Kugelgestalt hat.

In § 10. bestimme ich die Vertheilung der statischen Elektricität auf den Oberflächen zweier zusammengesetzter Leiter. Einer von ihnen, von unbegrenzten Dimensionen, hat eine sphärische Höhlung vom Radius R und wird durch eine ebene Grenzfläche, welche die Oberfläche der Höhlung in einem grössten Kreise schneidet, in zwei Theile getheilt, deren einer aus dem Stoffe A, der andere aus dem Stoffe B besteht. Innerhalb der Höhlung befindet sich ein anderer Leiter, eine Kugel vom Radius r, welcher aus zwei halbkugelförmigen Theilen gebildet wird. Beide sphärischen Oberflächen sind concentrisch. Der innere Leiter kann sich um eine Axe drehen, welche mit der Schnittlinie der beiden ebenen Grenzflächen zusammenfällt.

In dem § 11. bestimme ich endlich das Drehungsmoment der ponderomotorischen Kräfte elektrostatischen Ursprungs, welche auf den inneren Leiter wirken in Bezug auf diese Axe.

§ 1.

Ich nehme an, der zusammengesetzte Leiter sei eine massive Kugel (Radius R), welche aus zwei heterogenen die Elektricität leitenden Stoffen bestehe, z. B. aus Zink und Kupfer. Diese Theile grenzen auf der Oberfläche der Kugel längs einem grossen oder kleinen Kreise $L_1 L'$ (s. lithogr. Tafel Fig. 1) aneinander. In einem sphärischen Coordinatensystem, dessen Polaraxe durch die Mitte der Zink- und Kupfersegmente der äusseren Oberfläche geht, kann der Bau dieser Oberfläche wie folgt definirt werden:

von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha = P_1 O L'$ ist die äussere Oberfläche aus Zink, von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \pi$ — aus Kupfer gebildet.

Ich nehme eine Function nach der Formel (1). Für eine Kugeloberfläche und für die Punkte m und M, die beide in dem unbegrenzten Raume ausserhalb derselben liegen, und deren Coordinaten resp. sind:

ϱ, r die Radienvectoren,

φ, f die polaren Winkelabstände,

ψ, p die Winkel zwischen dem ersten Meridian und den Meridianen der Punkte m, M,

wird die Green'sche Function Φ, wie bekannt, durch folgende Formel ausgedrückt:

$$(2) \qquad \Phi = \frac{R}{\sqrt{(r\varrho)^2 - 2r\varrho R^2 \cos\gamma + R^4}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{R^{(2n+1)}}{(r\varrho)^{(n+1)}} P_n(\cos\gamma),$$

P_n ist eine Kugelfunction erster Art und n^{ter} Ordnung; γ — der Winkel zwischen den Radienvectoren der Punkte M und m.

Für $r < \varrho$ ist:

$$\frac{1}{T} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n}{\varrho^{n+1}} P_n(\cos\gamma).$$

Nimmt man die Derivirte der Differenz $\left(\frac{1}{T} - \Phi\right)$ nach r und setzt in dem gefundenen Ausdrucke $r = R$, so wird:

$$(3) \qquad \left(\frac{d\left(\frac{1}{T} - \Phi\right)}{dr}\right)_{r=R} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{R^{(n-1)}}{\varrho^{(n+1)}} P_n(\cos\gamma).$$

Diese Reihe soll in die Integrale des folgenden Ausdrucks substituirt werden:

$$(4) \qquad \begin{aligned} V = \frac{R^2}{4\pi} \Bigg\{ & C(Zn) \int_{p=0}^{p=2\pi} \int_{f=0}^{f=\alpha} \left(\frac{d\left(\frac{1}{T} - \Phi\right)}{dr}\right)_{r=R} \sin f \, df \, dp \\ & + C(Cu) \int_{p=0}^{p=2\pi} \int_{f=\alpha}^{f=\pi} \left(\frac{d\left(\frac{1}{T} - \Phi\right)}{dr}\right)_{r=R} \sin f \, df \, dp \Bigg\}. \end{aligned}$$

Es soll die Function V in Bezug auf die Eigenschaften a, b, c, B (s. ob.) untersucht werden.

Zuerst muss man die Integrationen, welche in der Formel (4) vorkommen, ausführen, was man vermittelst der folgenden bekannten Eigenschaften der Kugelfunctionen thun kann:

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma) \, dp = 2\pi P_n(\cos\varphi) P_n(\cos f),$$

$$(6)\qquad \frac{1}{\sin f}\,\frac{d\left(\sin f\,\dfrac{dP_n}{df}\right)}{df}+n(n+1)\,P_n=0\,,$$

$$(7)\quad \int_a^b P_n(\cos f)\sin f\,df=\frac{1}{n(n+1)}\left\{\sin^2 b\,\frac{dP_n(\cos b)}{d(\cos b)}-\sin^2 a\,\frac{dP_n(\cos a)}{d(\cos a)}\right\},$$

$$(8)\qquad (1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}=(n+1)(xP_n(x)-P_{(n+1)}(x))=$$

$$(9)\qquad =n(P_{(n-1)}(x)-xP_n(x)),$$

$$(10)\qquad \frac{(2n+1)}{n(n+1)}(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}=P_{(n-1)}(x)-P_{(n+1)}(x),$$

$$(11)\qquad \int_a^b P_0(\cos f)\sin f\,df=\cos a-\cos b\,.$$

Nach vollzogener Integration haben wir für die Function V den folgenden Ausdruck:

$$(13)\quad V=\frac{C(Zn)+C(Cu)}{2}\,\frac{R}{\varrho}+\frac{C(Zn)-C(Cu)}{2}\,U,$$

$$(14)\quad U=-\frac{R}{\varrho}\cos\alpha+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{(n+1)}P_n(\cos\varphi)(P_{(n-1)}(\cos\alpha)-P_{(n+1)}(\cos\alpha)).$$

Aus der Form dieser, für $\frac{R}{\varrho}<1$ convergirenden, Reihe kann man leicht schliessen, dass *für* $\frac{R}{\varrho}<1$

a) *die Function* V *der Differentialgleichung* $\Delta_2 V=0$ *genügt*;

b) *dass dieselbe sammt ihren ersten Derivirten stetig und endlich ist*;

c) *dass sie für* $\varrho=\infty$ *verschwindet wie* $\frac{1}{\varrho}$ *und ihre erste Derivirte nach* ϱ *wie* $\frac{1}{\varrho^2}$.

Um den Verlauf der Functionen U und V auf der Oberfläche des Leiters und in der Nähe der Linie L_1L' zu untersuchen, stelle ich die Function U in der Gestalt eines endlichen Ausdruckes dar, und zwar in der eines bestimmten Integrals.

Dieser Integralausdruck kann aus dem Ausdrucke (1), ohne die Green'sche Function Φ und die Function $\frac{1}{T}$ in Reihen zu entwickeln, gefunden werden, oder auch auf folgende Art:

Es werden $P_{n-1}(\cos\alpha)$ und $P_{n+1}(\cos\alpha)$ in der Reihe (14) durch ihre Ausdrücke nach der Formel von Laplace:

$$P_n(\cos\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\alpha - i\sin\alpha\cos\beta)^n d\beta$$

ersetzt; dann wird U in ein bestimmtes Integral von einer Function der complexen veränderlichen Grösse $z = R(\cos\alpha - i\sin\alpha\cos\beta)$ verwandelt, wo die Function unter dem Integralzeichen die Form einer Reihe hat.

Bei einer graphischen Darstellung der complexen Veränderlichen auf der Ebene, wird z durch einen Punkt Q (s. lithogr. Tafel Fig. 2) ($OC = x = R\cos\alpha$, $y = -CQ = -R\sin\alpha\cos\beta$), welcher auf der Linie L_1L' liegt, dargestellt. Während β von 0 bis π wächst, bewegt sich der Punkt Q längs der Linie L_1L' von L_1 bis L'; in diesen Punkten ist z gleich $Re^{-\alpha i}$ (in L_1) und $Re^{\alpha i}$ (in L').

Folglich reducirt sich die Integration nach β von 0 bis π auf eine Integration nach z längs dem geradlinigen Wege L_1L' von L_1 bis L'; dabei wird:

$$dz = Ri\sin\alpha\sin\beta\, d\beta;$$

oder da

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{z^2 - 2zR\cos\alpha + R^2}}{R\sin\alpha}, \tag{15}$$

wird:

$$d\beta = -\frac{i\,dz}{\sqrt{(z - Re^{\alpha i})(z - Re^{-\alpha i})}}. \tag{16}$$

Nun haben wir:

$$U = -\frac{R}{\varrho}A - \frac{i}{\pi}\int \frac{dz}{\sqrt{(z - Re^{\alpha i})(z - Re^{-\alpha i})}}\left(\frac{R^2}{z} - z\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{z^n}{\varrho^{(n+1)}}P_n(\cos\varphi), \tag{17}$$

wo:

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\beta}{\cos\alpha - i\sin\alpha\cos\beta} = P_0(\cos\alpha) = 1$$

und die Integration nach z längs der geraden Linie L_1L' von L_1 bis L' ausgeführt werden muss.

Die Summe, welche unter dem Integrale des Ausdruckes (17) steht, ist gleich:

$$\frac{1}{\sqrt{(z - \varrho e^{\varphi i})(z - \varrho e^{-\varphi i})}}, \tag{18}$$

wenn:

$$\mathrm{mod}\left(\frac{z}{\varrho}\right) < 1,$$

oder, was gleichbedeutend,

$$R(1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta) < \varrho$$

ist.

Für $\sin\alpha < 1$, werden wir folglich haben:

(19) $$U = -\frac{R}{\varrho} - \frac{i}{\pi}\int\frac{R^2 dz}{zD} + \frac{i}{\pi}\int\frac{z\,dz}{D},$$

wo:

$$D = \sqrt{(z - Re^{\alpha i})(z - Re^{-\alpha i})(z - \varrho e^{\varphi i})(z - \varrho e^{-\varphi i})},$$

und die Integrationen auf dem geradlinigen Wege ausgeführt werden.

Anmerkung A. Die Wurzel D kann man als aus zwei Factoren $\sqrt{z^2 - 2Rz\cos\alpha + R^2}$ und $\sqrt{z^2 - 2z\varrho\cos\varphi + \varrho^2}$ bestehend betrachten. Wenn der Punkt Q in C (s. lithogr. Tafel Fig. 2) liegt, so müssen beide mit dem positiven Zeichen genommen werden; denn der eine Factor: $\sqrt{(R\cos\alpha)^2 - 2R\cos\alpha\cdot\varrho\cos\varphi + \varrho^2}$ bedeutet die positiv genommene Entfernung zwischen den Punkten C und m, und der andere $\sqrt{z^2 - 2zR\cos\alpha + R^2}$ ist, nach der Formel (15), immer positiv, wenn der Punkt Q auf der Linie $L_1 L'$ liegt. Die Function D kann ihr Zeichen nur dann wechseln, wenn der Punkt z durch einen Nullpunkt geht; auf allen Punkten der Linie POP_1 muss daher D ein positives Zeichen haben.

Um den Ausdruck U weiter umzuformen, führe ich einen Kreis durch die Punkte $L_1 m_1 m L'$. Wenn ξ die Abscisse seines Mittelpunktes K ist (s. lithogr. Tafel Fig. 2), u — die Grösse seines Radius, v und ω — die Winkel, unter welchen die Radien KL' und Km gegen die positive Axe X geneigt sind, so findet man aus dem Dreiecke $KL'O$:

(20) $$R^2 = \xi^2 + 2\xi u\cos v + u^2.$$

Wenn der Punkt z irgendwo auf dem Umfange dieses Hülfskreises liegt, und ϑ den Winkel bezeichnet, unter welchem der von K nach dem Punkte z geführte Radius gegen die positive Axe X geneigt ist, so wird:

(21) $$z = \xi + ue^{\vartheta i},$$

daher:

(22) $$Re^{\pm\alpha i} = \xi + ue^{\pm v i},$$

(23) $$\varrho e^{\pm\varphi i} = \xi + ue^{\pm\omega i}.$$

Aus diesen letzten Ausdrücken folgt, dass, wenn der Punkt z auf dem Umfange des Hülfskreises liegt, D auf folgende Art dargestellt werden kann:

(24) $$\begin{cases} D = 2e^{\vartheta i}u^2 S, \\ \text{wo} \quad S = \sqrt{(\cos\vartheta - \cos v)(\cos\vartheta - \cos\omega)}. \end{cases}$$

Den Ausdruck für die Function U transformire ich mittelst der Transposition des Integrationsweges zwischen den Punkten L_1 und L' von der geraden Linie $L_1 L'$ nach dem Theile des Hülfskreises, auf welchem die Punkte m und m_1 sich nicht befinden. Dieser Theil des Hülfs-

kreises liegt entweder innerhalb des Hauptkreises (Radius R) oder auf dem Umfange des letzteren:

liegt der Punkt m auf der Oberfläche des Zn, so fällt der Hülfskreis mit dem Hauptkreise zusammen, ξ ist $= 0$ und die Punkte m und m_1 befinden sich auf dem Bogen $L_1 P_1 L'$; daher wird in diesem Falle der Integrationsweg auf den Bogen $L_1 P L'$ transponirt;

tritt m von der Oberfläche des Zn in den äusseren Raum herein, so rückt der Mittelpunkt des Hülfskreises nach der Seite der positiven Axe OX, so dass $\xi > 0$ wird; der von m und m_1 freie Bogen $L_1 F L'$ des Hülfskreises liegt dann ganz innerhalb des Hauptkreises (s. lithogr. Tafel Fig. 2); der Punkt F (s. lithogr. Tafel Fig. 2) liegt anfänglich auf der negativen Seite der Axe X, so lange $\xi < u$ ist; nachdem $\xi = u$ geworden, tritt der Punkt F auf die positive Seite der Axe X heraus.

Indem die Grösse ξ mehr und mehr wächst, erlangt sie schliesslich einen unendlich grossen Werth, wenn der Punkt m in der Ebene liegt, welche den Kreis $L_1 L'$ in sich enthält; dann wird der Integrationsweg $L_1 C L'$ ungeändert bleiben.

Wenn der Punkt m in dem Raume zwischen der letzteren Fläche und der Oberfläche des Cu liegt (s. lithogr. Tafel Fig. 3), so wird ξ negativ, der Radius u grösser als R und der Integrationsweg muss mit dem Bogen $L_1 F L'$ (s. lithogr. Tafel Fig. 3) zusammenfallen.

Gelangt endlich m auf die Oberfläche des Cu, so wird wieder $\xi = O$; doch muss der Integrationsweg in diesem Falle auf den Bogen $L_1 P_1 L'$ transponirt werden.

Bei dieser Transposition des Integrationsweges verfahre ich auf folgende Art.

Den Weg des Integrales $\int \frac{z\,dz}{D}$ kann man nach einem bekannten Theorem auf den betreffenden Bogen des Hülfskreises überführen; denn zwischen dem alten und neuen Wege giebt es keine Nullpunkte der Function D; dabei wird z nach der Formel (21) ausgedrückt und

$$dz = iue^{\vartheta i}\,d\vartheta. \tag{25}$$

Bei der Transposition des Weges des Integrales:

$$\int \frac{R^2\,dz}{zD} \tag{25 bis}$$

muss man darauf achten, ob der Punkt O zwischen dem alten und neuen Wege liegt, oder nicht.

Im erstern Falle wird das über eine geschlossene Linie, welche den Punkt O umgiebt, ausgedehnte Integral gleich sein demselben Integrale (25 bis) über die ganze Elementarcontur des Punktes O ausgedehnt.

Die geschlossene Curve wird zusammengesetzt aus der Geraden L_1CL', dem Bogen $L'FL_1$ und den Theilen der Elementarconturen der Punkte L_1 und L', welche innerhalb des Umfanges $L_1CL'FL_1$ liegen. Der Weg muss beschrieben sein: von C bis zur Elementarcontur des Punktes L', längs derselben bis zu dem Bogen $L'FL_1$, dann längs diesem Bogen bis zu der Elementarcontur des Punktes L_1, dann längs derselben bis zu der Geraden L_1C, und endlich längs dieser Geraden bis C.

Das Integral (25 bis) über die ganze Elementarcontur des Punktes O in derselben Richtung ausgedehnt ist gleich:

(26) $$2\pi i \frac{R}{\varrho}.$$

Die Integrale (25 bis) über die Theile der Elementarconturen der Punkte L_1 und L' — verschwinden.

Ferner ist zu beachten, dass ϑ sich längs dem Hülfsbogen auf folgende Weise continuirlich verändert: liegt F links von C (s. lithogr. Tafel Fig. 2), so wächst ϑ von $+v$ durch $+\pi$ bis $(+2\pi - v)$ auf dem Wege $L'FL_1$ und vermindert sich von $-v$ durch $-\pi$ bis $(-2\pi+v)$ auf dem Wege L_1FL'; liegt F rechts von C (s. lithogr. Tafel Fig. 3), so wächst ϑ von $-v$ durch O bis $+v$ auf dem Wege L_1FL' und vermindert sich von $+v$ durch O bis $-v$ auf dem Wege $L'FL_1$.

Ich will nun die Transformation und die Untersuchung der Function U für die verschiedenen Lagen des Punktes m gesondert ausführen.

𝔄) Der Punkt m liege in dem Raume zwischen der Oberfläche des Zn und der Kugelcalotte, welche durch den Kreis L_1L' und den Punkt O geht. Dann ist:

$$\xi > \text{oder} = 0, \quad (\xi - u) < \text{oder} = 0 \quad \text{und} \quad \omega < \text{oder} = v$$

(s. lithogr. Tafel Fig. 2) und:

(27) $$\int \frac{R^2 dz}{zD} = 2i\pi \frac{R}{\varrho} - i\int_v^{(2\pi - v)} \frac{R^2 d\vartheta}{2(\xi + ue^{\vartheta i})uS},$$

(28) $$\int \frac{z\,dz}{D} = i\int_{-v}^{-(2\pi - v)} \frac{(\xi + ue^{\vartheta i})}{2uS}\,d\vartheta.$$

In (28) setze ich $(-\vartheta)$ statt ϑ ein; berücksichtige ich die Gleichung:

$$R^2 - (\xi + ue^{-\vartheta i})(\xi + ue^{\vartheta i}) = 2\xi u(\cos v - \cos\vartheta) \text{ (s. (20))},$$

so erhalte ich:

(29) $$U = +\frac{R}{\varrho} - M,$$

(30) $$M = \frac{1}{\pi}\int_v^{(2\pi - v)} \frac{\xi(\cos v - \cos\vartheta)}{(\xi + ue^{\vartheta i})S}\,d\vartheta.$$

Wenn der Punkt m auf der Oberfläche der Zn liegt, so wird:

$$\xi = 0, \quad \varrho = R$$

und

$$U = +1,$$

daher (13):

(31) $$V = C(Zn).$$

Nähert sich der Punkt m der Grenzlinie $L_1 L'$, so dass er auf ein und derselben Hülfskugel bleibt, d. h. ξ constant ist, so wird $\omega = v$, $\varrho = R$, $S = \sqrt{(\cos\vartheta - \cos v)^2}$. Um das Zeichen der letzten Wurzel zu bestimmen, muss man beachten, dass in dem Punkte $F(\vartheta = \pi)$ die Grösse D positiv ist (Anmerkung A); in diesem Punkte F ist aber $e^{\vartheta i} = -1$; daher muss, nach der Formel (24), S daselbst einen negativen Werth haben:

$$S = -(\cos v + 1);$$

folglich muss auch auf dem ganzen Wege $L_1 F L'$ (für alle ϑ von v bis $2\pi - v$):

$$S = -(\cos v - \cos\vartheta)$$

sein.

Es wird daher:

(32) $$M = -\frac{1}{\pi}\int_v^{(2\pi - v)} \frac{\xi\, d\vartheta}{(\xi + u e^{\vartheta i})} = -\frac{1}{\pi}(2\pi - 2v) + \frac{1}{\pi}\int_v^{(2\pi - v)} \frac{u e^{\vartheta i}\, d\vartheta}{(\xi + u e^{\vartheta i})}.$$

Das letzte Integral ist dasselbe wie:

(33) $$\frac{1}{\pi i}\int \frac{dz}{z},$$

längs der Linie $L' F L_1$ von L' bis L_1 erstreckt; sein Integrationsweg kann auf den Bogen $L' P L_1$ transponirt werden; dann nimmt es folgende Form an:

$$\frac{1}{\pi}\int_\alpha^{(2\pi - \alpha)} d\varphi = 2 - \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Es ist also auf der Grenzlinie $L_1 L'$:

(34) $$U = \frac{2}{\pi}\left(\alpha - v + \frac{\pi}{2}\right).$$

𝔅) Der Punkt m befinde sich in dem Raume zwischen der Kugelcalotte: $(\xi = u)$ und der Ebene, welche den Kreis $L_1 L'$ enthält.

$$\xi > 0, \ (\xi - u) > \text{oder} = 0, \ \omega < \text{oder} = v.$$

Dann wird:

(35) $$U = -\frac{R}{\varrho} - M.$$

Für $\varrho = R$ und $\omega = v$ nimmt M den in Formel (32) ausgedrückten

Werth an; die Contur $L'FL_1PL'$ wird aber in diesem Falle den Punkt O umgeben; daher wird:

$$\frac{1}{\pi}\int_{v}^{(2\pi-v)}\frac{ue^{\vartheta i}\,d\vartheta}{(\xi+ue^{\vartheta i})} = -2-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{-(2\pi-\alpha)}d\varphi = -\frac{2\alpha}{\pi}$$

und

(36) $$U=\frac{2}{\pi}\left(\alpha-v+\frac{\pi}{2}\right),$$

wenn m auf die Grenzlinie L_1L' kommt.

𝔅 bis) Der Punkt m liege in der Ebene, welche den Kreis L_1L' enthält.

Dann muss man in Gleichung (19) setzen:

$$\varrho\cos\varphi = R\cos\alpha.$$

Kommt der Punkt m auf die Grenzlinie L_1L', so wird ausserdem $\varrho = R$; die Gleichung (19) wird dann:

$$U=-1+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\beta}{(\cos\alpha-i\sin\alpha\cos\beta)}\,\frac{}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\cos\alpha-i\sin\alpha\cos\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\,d\beta.$$

Wird in dem zweiten Integrale $(\pi-\beta)$ anstatt β gesetzt, so können die beiden Integrale in das eine zusammengezogen werden:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{(\cos\alpha-i\sin\alpha\cos\beta)}\,d\beta.$$

Dieses Integral ist wieder:

$$\frac{1}{\pi i}\int\frac{dz}{z},$$

ausgedehnt auf den Weg L_1CL' oder L_1P_1L'; sein Werth wird:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}d\varphi=\frac{2\alpha}{\pi}.$$

Daher ist:

(37) $$U=\frac{2}{\pi}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right),$$

wenn $\varrho = R$, $\xi = \infty$, $\omega = v = \pi$, d. h. der Punkt m auf der Grenzlinie ist.

ℭ) Der Punkt m liege in dem Raume zwischen der eben erwähnten Ebene und der äusseren Oberfläche des Cu.

Dann ist $\xi <$ oder $= 0$, $\omega >$ oder $= v$ (s. lithogr. Tafel Fig. 3)

(38) $$U=-\frac{R}{\varrho}-M',$$

(39) $$M'=\frac{1}{\pi}\int_{v}^{-v}\frac{\xi(\cos v-\cos\vartheta)}{(\xi+ue^{\vartheta i})\,S}\,d\vartheta.$$

Liegt der Punkt m auf der Oberfläche des Cu, so wird $\xi = 0$, $\varrho = R$; die letzten Ausdrücke geben dann:

$$U = -1$$

und, nach Formel (13):

(40) $$V = C(Cu).$$

Wenn der Punkt m in die Grenzlinie kommt, indessen auf demselben Hülfskreise bleibt, daher ξ constant ist, so wird der Winkel ω sich dem Winkel v nähern; für $\omega = v$, $\varrho = R$ wird:

$$S = \sqrt{(\cos\vartheta - \cos v)^2}.$$

In dem Punkte F ist: $e^{\vartheta i} = +1$ (für $\vartheta = 0$); daher muss S positiv sein in dem Punkte F und auf dem ganzen Wege L_1FL'. Man muss also in dem Ausdrucke M' setzen:

$$S = \cos\vartheta - \cos v;$$

dann wird:

$$M' = -\frac{1}{\pi}\int_v^{-v}\frac{\xi\, d\vartheta}{(\xi + ue^{\vartheta i})} = \frac{2v}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_v^{-v}\frac{ue^{\vartheta i}\, d\vartheta}{(\xi + ue^{\vartheta i})}$$

$$= \frac{2v}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\varphi = \frac{2(v-\alpha)}{\pi}.$$

(41) $$U = \frac{2}{\pi}\left(\alpha - v - \frac{\pi}{2}\right).$$

Aus dieser Untersuchung folgt demnach:

B) dass die Function V, auf der äusseren Oberfläche der Zn, gleich $C(Zn)$ ist, auf der äusseren Oberfläche des Cu gleich $C(Cu)$;

C) dass auf der Grenzlinie L_1L' die Function V mehrdeutig ist, so dass ihre Grösse von der Richtung, in welcher der Punkt m auf die Grenzlinie gelangt, abhängt. Sei l der Punkt der Grenzlinie, zu welchem sich m aus irgend welcher Richtung $(\overleftarrow{lk})$ nähert, und E die Ebene, welche die Richtung k und die Tangente an die Grenzlinie im Punkte l enthält; sei ferner $(\overrightarrow{le})$ die Schnittlinie dieser Ebene mit der durch den Punkt l geführten Meridianebene und η endlich der Winkel zwischen der nach aussen gezogenen Richtung $(\overrightarrow{le})$ und der äusseren Verlängerung des Radius Ol; wobei dieser Winkel positiv zu zählen ist, wenn die Richtung $(\overrightarrow{le})$ zwischen der äusseren Verlängerung des Radius Ol und der Oberfläche des Zn liegt: dann wird die Mehrdeutigkeit ausgedrückt durch:

(42) $$V = \frac{C(Zn) + C(Cu)}{2} + (Zn|Cu)\,\frac{\eta}{\pi},$$

weil, wie leicht zu ersehen, in den Formeln (34), (36), (37), (41) die Winkel $\left(\alpha - v + \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(\alpha - v - \frac{\pi}{2}\right)$ nichts anderes als η vorstellen.

Daraus sieht man, dass durch die Grenzlinie alle diejenigen Niveauflächen der Function V gehen, für welche die Grösse des Parameters zwischen den Grenzen $C(Cu)$ und $C(Zn)$ liegt.

§ 2.

Es sollen nun die Ausdrücke der Derivirten von M und M' nach den Coordinatenparametern, welche die Lage des Punktes m bestimmen, hergeleitet werden.

Das geeigneteste Coordinatensystem für die Entwicklungen dieses und des nächsten Paragraphen besteht aus den durch die Axe OX gehenden Meridianebenen und aus zwei Systemen von Rotationsflächen, welche durch die Rotation des auf den Polen L_1, L' in der XY Ebene construirten biciculären Coordinatensystems um die Axe OX entstehen. Die Lage eines Punktes m wird in diesem Systeme durch folgende Grössen bestimmt: 1) durch den Parameter ψ der Meridionalfläche, welche den Punkt m enthält, 2) durch den Parameter q der Kugelcalotte, welche durch die Grenzlinie und den Punkt m geht und 3) durch den Parameter δ einer durch denselben Punkt gehenden Ringfläche mit kreisförmigem Querschnitte.

Der Parameter q ist gleich dem Winkel $L'mL_1$ (s. lithogr. Tafel Fig. 4, 5) zwischen den Geraden mL' und mL_1. Der Parameter δ ist der Logarithmus des Quotienten: $\frac{mL'}{mL_1}$ und < 1.

Nimmt man CX und CY (s. lithogr. Tafel Fig. 4) für die Coordinatenaxen, so kann die Beziehung zwischen den Coordinaten x, y, q und δ durch die folgende Formel ausgedrückt werden:

$$x + yi = a \cot\left(\frac{q + \delta i}{2}\right), \quad a = R \sin \alpha,$$

oder:

$$x = a \frac{\sin q}{\cos \delta i - \cos q}, \tag{43}$$

$$y = a \frac{i \sin \delta i}{\cos \delta i - \cos q}. \tag{44}$$

In den Integralen M und M' (30) (39) kommen die Winkel v und ω vor; und es muss noch die Beziehung zwischen ihnen und den Parametern q und δ gefunden werden.

Für die Fälle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (§ 1., s. lithogr. Tafel Fig. 4), bei welchen $\xi > 0$ ist und das Integral M (30) vorkommt, ist

$$q = \pi - v,$$

weil der Winkel $q = L'mL_1$ gleich dem Winkel PKL' oder $(\pi - XKL')$

und XKL' gleich v ist. Bei $\xi > 0$ kann v sich von α bis π ändern; daher kann in diesen Fällen q alle Werthe von $(\pi - \alpha)$ bis Null annehmen und wird diesen letzteren erreichen, wenn der Punkt m in der Ebene des Kreises $L_1 L'$ liegt.

Die Grössen ξ und u, welche in M vorkommen, hängen nur von q oder v ab; denn aus dem Dreiecke OKL' finden wir:

$$u = \overline{KL'} = \overline{OL'} \frac{\sin \alpha}{\sin v} = R \frac{\sin \alpha}{\sin v},$$

$$\xi = \overline{OK} = R \frac{\sin (v - \alpha)}{\sin v}.$$

Der Winkel ω, welcher für $\xi > 0$ kleiner als v ist, hängt von den beiden Parametern q und δ ab, und diese Beziehung wird durch folgende Formeln ausgedrückt:

Nach der Formel (43) wird:

$$x = \overline{C\mu} = \frac{R \sin \alpha \cdot \sin v}{\cos \delta i + \cos v};$$

nun ist aber (s. lithogr. Tafel Fig. 4):

$$\overline{C\mu} = \overline{K\mu} - \overline{KC} = u \cos \omega - R \sin \alpha \operatorname{cotg} v,$$

daher:

$$\cos \omega = \frac{\cos \delta i \cos v + 1}{\cos \delta i + \cos v}. \tag{45}$$

Aus der Gleichung

$$y = \overline{m\mu} = u \sin \omega = \frac{i \sin \delta i}{\cos \delta i + \cos v} R \sin \alpha$$

finden wir:

$$\sin \omega = \frac{i \sin \delta i \sin v}{\cos \delta i + \cos v}. \tag{46}$$

Die Beziehung zwischen ω, v und δ kann auch folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \operatorname{cotg} \frac{v}{2} = i \operatorname{tg} \frac{\delta i}{2}. \tag{47}$$

Nimmt man von dieser Gleichung den Logarithmus und differenzirt sie, so erhält man:

$$\frac{d\omega}{\sin \omega} = \frac{dv}{\sin v} + \frac{i\, d\delta}{\sin \delta i}; \tag{48}$$

woraus man dann folgende Differentialquotienten findet:

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{i \sin \delta i}{\cos \delta i + \cos v}, \tag{49}$$

$$\frac{d\omega}{d\delta} = - \frac{\sin v}{\cos \delta i + \cos v}. \tag{50}$$

Aus (45) erhält man:

$$\cos \omega - \cos v = \frac{\sin^2 v}{\cos \delta i + \cos v}, \tag{51}$$

daher:

$$\frac{d\omega}{d\delta} = -\frac{(\cos\omega - \cos v)}{\sin v}, \tag{52}$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{i\sin\delta i}{\sin^2 v}(\cos\omega - \cos v). \tag{53}$$

Für den Fall C, wo $\xi < 0$ ist (s. lithogr. Tafel Fig. 5) und das Integral M' (39) vorkommt, hat der Parameter q einen negativen Werth:

$$q = -(L'm L_1),$$

und weil der Winkel $L'mL_1$ gleich dem Winkel $L'KX = v$ ist, wird in diesem Falle:

$$q = -v.$$

Wenn der Punkt m auf der Ebene des Kreises $L_1 L'$ liegt, wird $q = 0$. Kommt der Punkt m auf die Oberfläche $L'PL_1$, so wird $q = -\alpha$.

Aus dem Dreiecke $L'OK$ (s. lithogr. Tafel Fig. 5) erhält man:

$$u = R\frac{\sin\alpha}{\sin v}; \qquad \xi = R\frac{\sin(v-\alpha)}{\sin v}.$$

Setzt man in (43) und (44) $q = -v$ und verfährt wie bei der Ableitung der Formeln (45—53), so findet man für $\xi < 0$ folgende Gleichungen:

$$\cos\omega = \frac{\cos\delta i\cos v - 1}{\cos\delta i - \cos v}, \tag{45 bis}$$

$$\sin\omega = \frac{i\sin\delta i\sin v}{\cos\delta i - \cos v}, \tag{46 bis}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{v}{2} = i\operatorname{tg}\frac{\delta i}{2}, \tag{47 bis}$$

$$\frac{d\omega}{\sin\omega} = \frac{dv}{\sin v} - \frac{i\,d\delta}{\sin\delta i}, \tag{48 bis}$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{i\sin\delta i}{\cos\delta i - \cos v}, \tag{49 bis}$$

$$\frac{d\omega}{d\delta} = \frac{\sin v}{\cos\delta i - \cos v}. \tag{50 bis}$$

$$\cos\omega - \cos v = -\frac{\sin^2 v}{\cos\delta i - \cos v}, \tag{51 bis}$$

$$\frac{d\omega}{d\delta} = -\frac{\cos\omega - \cos v}{\sin v}, \tag{52 bis}$$

$$\frac{d\omega}{dv} = -\frac{i\sin di}{\sin^2 v}(\cos\omega - \cos v). \tag{53 bis}$$

Mit Rücksicht auf diese gewonnenen Ausdrücke kann man nun folgende Gleichungen für die Derivirten von M und M' nach den Parametern δ und q erhalten:

$$(54)\quad \frac{dM}{d\delta} = -\frac{1}{2\pi}\int_v^{(2\pi-v)} \frac{\xi}{(\xi+ue^{\vartheta i})} \frac{(\cos\vartheta-\cos v)^{\frac{1}{2}}}{(\cos\vartheta-\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin\omega}{\sin v}(\cos\omega-\cos v)\,d\vartheta$$

$$= -\frac{\sin\omega}{\sin v}\frac{1}{2\pi}\left\{\int_v^{(2\pi-v)} \frac{\xi}{(\xi+ue^{\vartheta i})}\left(\frac{\cos\vartheta-\cos v}{\cos\vartheta-\cos\omega}\right)^{\frac{3}{2}} d\vartheta\right.$$

$$\left.-\int_v^{(2\pi-v)} \frac{\xi}{(\xi+ue^{\vartheta i})}\left(\frac{\cos\vartheta-\cos v}{\cos\vartheta-\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}} d\vartheta\right\}.$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man für die Derivirte $\frac{dM'}{d\delta}$. Beide Derivirte unterscheiden sich nur in dem Integrationswege.

Aus dem letzten Ausdrucke folgt:

$$(55)\qquad \frac{dM}{d\delta}=0,\quad \frac{dM'}{d\delta}=0\left\{\begin{array}{l}1)\ \text{für }\omega=v\\ 2)\ \text{für }v=\alpha\end{array}\right\}.$$

Nach den Formeln (47) und (47 bis) wird $\delta=-\infty$ für $\omega=v$ und dann verschwinden also die Derivirten $\frac{dM}{d\delta}$ und $\frac{dM'}{d\delta}$.

Der Differentialquotient nach q ist:

$$(56)\quad -\frac{dM}{dq} = \frac{dM}{dv} = \frac{\xi}{\pi}\left(\frac{\cos v-\cos v}{\cos v-\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{\xi+ue^{-vi}}+\frac{1}{\xi+ue^{vi}}\right\}$$

$$-\frac{1}{\pi}\cos(v-\alpha)\sin\alpha\int_v^{(2\pi-v)}\frac{e^{\vartheta i}}{(\sin(v-\alpha)+e^{\vartheta i}\sin\alpha)^2}\left(\frac{\cos\vartheta-\cos v}{\cos\vartheta-\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}}d\vartheta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{(\cos\omega-\cos v)}{\sin v}\int_v^{(2\pi-v)}\frac{\xi}{(\xi+ue^{\vartheta i})}\frac{(\cos\vartheta(\cos v+\cos\omega)-1-\cos v\cos\omega)}{\sqrt{(\cos\vartheta-\cos v)(\cos\vartheta-\cos\omega)^3}}d\vartheta.$$

Der Ausdruck des Differentialquotienten:

$$\frac{dM'}{dq} = -\frac{dM'}{dv},$$

unterscheidet sich vom Ausdrucke (56) durch den Integrationsweg und das Vorzeichen.

Für $v=\alpha$, $\xi=0$ wird:

$$(57)\quad -\frac{dM}{dq} = \frac{dM}{dv} = -\frac{1}{\pi\sin\alpha}\int_\alpha^{(2\pi-\alpha)}\sqrt{\frac{\cos\vartheta-\cos\alpha}{\cos\vartheta-\cos\omega}}\,e^{-\vartheta i}\,d\vartheta,$$

$$(57\text{ bis})\quad \frac{dM'}{dq} = -\frac{dM'}{dv} = \frac{1}{\pi\sin\alpha}\int_\alpha^{-\alpha}\sqrt{\frac{\cos\vartheta-\cos\alpha}{\cos\vartheta-\cos\omega}}\,e^{-\vartheta i}\,d\vartheta.$$

§ 3.

Nun lässt sich beweisen, dass die Function V eine Potentialfunction der Elektricitätsquantitäten ist, welche

1) auf der äusseren Oberfläche eine einfache elektrische,
2) innerhalb des Leiters aber eine doppelt-elektrische Schicht bilden.

Um dieses zu beweisen, benutze ich das bekannte Theorem, welches aus dem Green'schen folgt und auf den Theil des äusseren Raumes angewendet werden kann, wo die Function V und ihre ersten Derivirten endlich, stetig und eindeutig sind.

In § 2. wurde bewiesen, dass die Function V auf der Grenzlinie unendlich viele Werthe hat; wollen wir demnach das Theorem von Green anwenden, so muss die nächste Umgebung der Grenzlinie aus dem äusseren Raume ausgeschlossen werden.

Ich schliesse diese Linie mittelst einer, ihr unendlich nahen, Ringfläche $\delta = \Delta =$ const. aus, und verstehe dann unter dem Namen „äusserer Raum" den von aussen unbegrenzten Raum, welcher von innen durch folgende Oberflächen begrenzt ist (Fig. 6):

1) durch den Theil der Kugelcalotte $q = -\alpha$ (Kupfer), welcher von $\delta = 0$ bis $\delta = \Delta$ reicht,
2) durch den Theil der Ringfläche $\delta = \Delta$, welcher von $q = -\alpha$ durch $q = 0$ bis $q = (\pi - \alpha)$ sich erstreckt, und
3) durch den Theil der Kugelcalotte (Zink) $q = \pi - \alpha$, welcher von $\delta = \Delta$ bis $\delta = 0$ reicht.

Dem erwähnten Theoreme zufolge kann die Function V in einem jeden Punkte m des „äusseren Raumes" durch den folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$(58)\quad V = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_1 \frac{dV}{d\mathfrak{N}}\frac{d\mathfrak{S}}{T} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_3 \frac{dV}{d\mathfrak{N}}\frac{d\mathfrak{S}}{T} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_2 \frac{dV}{dn}\frac{dc}{T}$$

$$+ \frac{C(Cu)}{4\pi}\int\limits_1 \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\mathfrak{N}}d\mathfrak{S} + \frac{C(Zn)}{4\pi}\int\limits_3 \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\mathfrak{N}}d\mathfrak{S} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_2 V\frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{dn}dc.$$

Die Zahlen, welche unter den Integralzeichen stehen, bedeuten:

die Zahl 1, dass das Integral über die Elemente des Kupfersegmentes von $\delta = 0$ bis $\delta = \Delta$ auszudehnen ist,

die Zahl 3, dass das Integral über die Elemente des Zinksegmentes von $\delta = \Delta$ bis $\delta = 0$ zu nehmen ist,

die Zahl 2, dass das Integral sich über die Elemente der Ringfläche $\delta = \Delta$ von $q = -\alpha$ durch $q = 0$ bis $q = (\pi - \alpha)$ erstreckt.

$d\mathfrak{S}$ bedeutet das Element der Oberflächen 1 und 3, $\mathfrak{N}$ die Richtung der auf demselben nach dem äusseren Raume errichteten Normalen, dc ein Element der Ringfläche, n seine äussere Normale; T ist die Entfernung von m bis zu dem Elemente der Oberfläche.

Während Δ bis $-\infty$ abnimmt, wird die Ringfläche die Grenzlinie $L_1 L'$ immer enger und enger umschliessen, wobei sich beweisen lässt, dass das dritte und sechste Glied der Formel (58) verschwinden.

In der That wird das Element der Ringfläche durch die Formel ausgedrückt:

$$dc = \frac{R^2 \sin^2 \alpha}{(\cos \Delta i - \cos q)^2}\, i \sin \Delta i \, dq \, d\psi\,;$$

also, für alle q von $q = -\alpha$ bis $q = 0$:

$$dc = \frac{R^2 \sin^2 \alpha}{(\cos \Delta i - \cos v)^2}\, i \sin \Delta i \, dq \, d\psi\,, \tag{59}$$

und für alle q von $q = 0$ bis $q = (\pi - \alpha)$:

$$dc = \frac{R^2 \sin^2 \alpha}{(\cos \Delta i + \cos v)^2}\, i \sin \Delta i \, dq \, d\psi\,. \tag{60}$$

Nach der Formel (46 bis) und (51 bis) ist:

$$\frac{i \sin \Delta i}{(\cos \Delta i - \cos v)^2} = \frac{\sin \omega}{\sin v} \, \frac{1}{(\cos \Delta i - \cos v)} = \frac{(\cos v - \cos \omega)}{\sin^3 v} \sin \omega\,, \tag{61}$$

und nach den Formeln (46), (51):

$$\frac{i \sin \Delta i}{(\cos \Delta i + \cos v)^2} = \frac{(\cos \omega - \cos v)}{\sin^3 v} \sin \omega\,. \tag{62}$$

Auf der Ringfläche hat V einen endlichen Werth auch dann, wenn $\Delta = -\infty$ ist (§ 1. Formel (42)); ferner hat auch

$$\frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{dn} = -\frac{1}{T^2}\,\frac{dT}{dn}\,,$$

bei einem *nicht unendlich kleinen* T, einen endlichen Werth für jedes Element der Ringfläche; ausserdem verschwindet die Differenz $(\cos \omega - \cos v)$ für $\Delta = -\infty$. Aus diesen Gründen verschwindet das sechste Glied des Ausdruckes (58) für $\Delta = -\infty$.

In dem dritten Gliede der Formel (58) steht unter dem Integrale:

$$\frac{dV}{dn}\,\frac{dc}{T}\,.$$

Aus den Formeln (13), (29), (35) und (38) sieht man, dass V aus zwei Gliedern besteht, deren eines den Factor $\pm \frac{R}{\varrho}$, das andere das Integral M oder M' enthält. Daher wird die Derivirte $\frac{dV}{dn}$ auch aus zwei Gliedern bestehen; so wird z. B. für $\xi > 0$, $(\xi - u) < 0$:

$$V = C(Zn)\,\frac{R}{\varrho} - \frac{Zn\,|\,Cu}{2}\,M,$$

$$\frac{dV}{dn} = C(Zn)\,\frac{d\left(\frac{R}{\varrho}\right)}{dn} - \frac{Zn\,|\,Cu}{2}\,\frac{dM}{dn}.$$

Die Derivirte von $\frac{R}{\varrho}$ nach n hat einen endlichen Werth in allen Punkten der Ringfläche und für jedes Δ; wenn T nicht unendlich klein ist, so werden für $\Delta = -\infty$ die Integrale

$$\int_2 \left(\mp \frac{d\left(\frac{R}{\varrho}\right)}{dn}\right) \frac{dc}{T}$$

aus denselben Gründen verschwinden, wie das sechste Glied der Formel (58).

Die Normalen, welche von den Elementen der Ringfläche in den äusseren Raum errichtet sind, tangiren die Schnittcurven der Coordinatenflächen q und ψ; daher ist:

$$\frac{dM}{dn} = h_1\,\frac{dM}{d\delta};$$

hier bedeutet h_1 den Differentialparameter erster Ordnung der Coordinatenfläche $\delta = \text{const.}$ Sein Ausdruck ist:

$$(63) \qquad h_1 = \frac{(\cos \delta i - \cos q)}{R \sin \alpha}.$$

Anmerkung B: Der Differentialparameter h_2 der Coordinatenfläche $q = \text{const.}$ hat denselben Ausdruck wie h_1.

Folglich ist das andere Glied des dritten Integrales:

$$(64) \qquad \iint \frac{dM}{d\delta}\,\frac{R \sin \alpha}{T}\,\frac{i \sin \Delta i}{(\cos \Delta i \pm \cos v)}\,dq\,d\psi,$$

oder, mit Rücksicht auf die Formeln (46) und (46 bis):

$$\iint \frac{dM}{d\delta}\,\frac{R \sin \alpha}{T}\,\frac{\sin \omega}{\sin v}\,dq\,d\psi.$$

Da nun aber die Derivirten $\frac{dM}{d\delta}$ und $\frac{dM'}{d\delta}$ für $\Delta = -\infty$ verschwinden, wird das Integral (64) bei einem nicht unendlich kleinen T auch selbst verschwinden.

Für $\Delta = -\infty$ verschwindet somit auch das dritte Integral des Ausdruckes (58).

Die Summe des vierten und fünften Integrals des Ausdruckes (58) verwandelt sich für $\Delta = -\infty$ in

$$(65) \qquad (Zn\,|\,Cu)\,\frac{\Omega}{4\pi}.$$

Ω bedeutet hier die Grösse der Oeffnung der Kegelfläche, die ihre Spitze in dem Punkte m hat, und deren Erzeugende längs der Grenzlinie gleitet. Ω hat das Vorzeichen $+$, wenn aus dem Punkte diejenige Seite der Ebene des Kreises L_1CL' gesehen wird, welche zu dem Zn-Theile der äusseren Oberfläche gewendet ist.

Im ersten und zweiten Integrale des Ausdruckes (58) fällt die Normale $\mathfrak{N}$ mit den Tangenten an die Schnittcurven der Coordinatenflächen $\delta =$ const. und $\psi =$ const. zusammen; dabei ist in dem ersten Integrale die Normale $\mathfrak{N}$ nach der Seite der sich vergrössernden q gerichtet, im zweiten Integrale dagegen nach der Seite der sich vermindernden q.

In dem ersten Integrale haben wir

$$\sigma_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{d\mathfrak{N}} = -\frac{1}{4\pi}h_2\frac{dV}{dq} = \frac{1}{4\pi}h_2\frac{dV}{dv}, \tag{66}$$

$$h_2 = \frac{\cos\delta i - \cos\alpha}{R\sin\alpha}.$$

Nach der Formel (51 bis) für $q = -\alpha$ ist:

$$\frac{\cos\delta i - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \cos\omega};$$

daher:

$$\sigma_1 = \frac{\sin\alpha}{4\pi R(\cos\alpha - \cos\omega)}\frac{dV}{dv}. \tag{67}$$

Im zweiten Integrale des Ausdruckes (58) ist:

$$\sigma_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{d\mathfrak{N}} = \frac{1}{4\pi}h_2\frac{dV}{dq} = -\frac{\sin\alpha}{4\pi R(\cos\omega - \cos\alpha)}\frac{dV}{dv}. \tag{68}$$

In einem jeden Punkte m des äusseren Raumes kann V durch folgende Gleichung ausgedrückt werden, wenn m nicht in einer unendlich kleinen Entfernung von der Grenzlinie liegt:

$$V = \int_1 \frac{\sigma_1 d\mathfrak{S}}{T} + \int_3 \frac{\sigma_2 d\mathfrak{S}}{T} + (Zn\,|\,Cu)\frac{\Omega}{4\pi}. \tag{69}$$

Das heisst: die Function V kann als eine Potentialfunction folgender elektrischer Quantitäten betrachtet werden:

1) einer doppelt-elektrischen Schicht, welche die Stärke

$$\frac{Zn\,|\,Cu}{4\pi} \tag{70}$$

hat, von der Grenzlinie L_1L' wie von einem Rande begrenzt ist und innerhalb der Kugel liegt; ihre positive Seite tritt in der Grenzlinie auf die äussere Oberfläche des Zn aus,

2) einer einfachen elektrischen Schicht, welche auf der äusseren Oberfläche des Cu die Dichtigkeit σ_1, auf der äusseren Oberfläche des Zn die Dichtigkeit σ_2 hat.

Anmerkung C. Die Integrale der Gleichung (69) müssen in den Grenzen von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ und von $\delta = 0$ bis $\delta = \Delta$ genommen werden; man muss dann voraussetzen, dass Δ sich dem $(-\infty)$ unbegrenzt nähert. Hier will ich besonders hervorheben, dass die Grenze Δ während dieser Annäherung zu $(-\infty)$ für beide Segmente der äusseren Oberfläche (*Zn* und *Cu*) gleiche Werthe hat.

§ 4.

In diesem § sollen die Ausdrücke der Dichtigkeiten σ_1 und σ_2 in eine für die Berechnung bequemere Form gebracht werden.

Da in der Nähe der Oberfläche des *Cu*:

$$V = C(Cu)\,\frac{R}{\varrho} - \frac{(Zn \mid Cu)}{2}\,M',$$

hingegen in der Nähe der Oberfläche des *Zn*:

$$V = C(Zn)\,\frac{R}{\varrho} - \frac{(Zn \mid Cu)}{2}\,M,$$

und da die Normalen $\mathfrak{N}$ mit den äusseren Verlängerungen der Radienvectoren zusammenfallen, daher:

$$\frac{d\left(\frac{R}{\varrho}\right)}{d\,\mathfrak{N}} = \left[-\frac{R}{\varrho^2}\right]_{\varrho=R} = -\frac{1}{R},$$

so haben wir:

$$\sigma_1 = \frac{C(Cu)}{4\pi R} - \frac{Zn \mid Cu}{8\pi R}\,\frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha - \cos\omega)}\,\frac{dM'}{dv}, \tag{71}$$

$$\sigma_2 = \frac{C(Zn)}{4\pi R} + \frac{Zn \mid Cu}{8\pi R}\,\frac{\sin\alpha}{(\cos\omega - \cos\alpha)}\,\frac{dM}{dv}, \tag{72}$$

oder, mit Rücksicht auf die Formeln (57) und (57 bis):

$$\sigma_1 = \frac{C(Cu) - (Zn \mid Cu)\,X}{4\pi R}, \tag{73}$$

$$\sigma_2 = \frac{C(Zn) - (Zn \mid Cu)\,Y}{4\pi R}, \tag{74}$$

$$X = \frac{1}{\pi(\cos\alpha - \cos\omega)}\int_0^{\alpha}\left(\frac{\cos\vartheta - \cos\alpha}{\cos\vartheta - \cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\vartheta\,d\vartheta, \tag{75}$$

$$Y = \frac{1}{\pi(\cos\omega - \cos\alpha)}\int_{\alpha}^{\pi}\left(\frac{\cos\alpha - \cos\vartheta}{\cos\omega - \cos\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\vartheta\,d\vartheta. \tag{76}$$

Die letzten Ausdrücke bringe ich durch partielle Integration auf die Form:

$$(77)\qquad X = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(\cos\vartheta - \cos\alpha)(\cos\vartheta - \cos\omega)^3}},$$

$$(78)\qquad Y = -\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(\cos\alpha - \cos\vartheta)(\cos\omega - \cos\vartheta)^3}}.$$

Im ersten Integrale setze ich:

$$(79)\qquad \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\operatorname{am} u, \qquad k = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2},$$

im zweiten:

$$(80)\qquad \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\sin\operatorname{am} u, \qquad k = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}.$$

Dann erhalten wir:

$$(81)\qquad X = \frac{1}{\pi\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\omega}{2}}\left(\int_0^K \frac{k^2\sin^2\operatorname{am} u}{\Delta^2\operatorname{am} u}du + \int_0^K \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\operatorname{am} u}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\operatorname{am} u}du\right),$$

$$(82)\qquad Y = -\frac{1}{\pi\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\omega}{2}}\left(\int_0^K \frac{k^2\sin^2\operatorname{am} u}{\Delta^2\operatorname{am} u}du + \int_0^K \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\operatorname{am} u}{1+\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\operatorname{am} u}du\right),$$

wo

$$(83)\qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

ist.

Ferner setze ich in dem Ausdrucke X:

$$(84)\qquad i\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \sin\operatorname{am}(vi, k),$$

und in dem Ausdrucke Y:

$$(85)\qquad i\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} = \sin\operatorname{am}(wi, k)$$

Da nun

$$(86)\qquad \sin\operatorname{am}(vi, k) = i\operatorname{tg}\operatorname{am}(v, k')\text{*)},$$
$$k' = \sqrt{1-k^2},$$

---

*) Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, 1829, § 19, Formel 1 auf der Seite 34.

so ist:

(87) $$\frac{\omega}{2} = \text{am}\,(v, k'),$$

im Ausdrucke X, und

(88) $$\frac{\pi - \omega}{2} = \text{am}\,(w, k')$$

im Ausdrucke Y.

Aus (84) folgt:

(89) $$\frac{\cos \text{am}\, vi \Delta \,\text{am}\, vi}{\sin \text{am}\, vi} = \frac{1}{i \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\alpha}{2}};$$

aus (85):

(90) $$\frac{\cos \text{am}\, wi \Delta \,\text{am}\, wi}{\sin \text{am}\, wi} = \frac{1}{i \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Der Ausdruck X kann in folgender Form dargestellt werden:

(91) $$X = \frac{1}{\pi \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\omega}{2}} \int_0^K \frac{k^2 \sin^2 \text{am}\, u\, du}{\Delta^2 \,\text{am}\, u} - \frac{iKZ(vi)}{\pi},$$

wo:

(92) $$KZ(vi) = \int_0^K \frac{k^2 \sin \text{am}\, vi \cos \text{am}\, vi \Delta \,\text{am}\, vi \sin^2 \text{am}\, u}{1 - k^2 \sin^2 \text{am}\, vi \sin^2 \text{am}\, u}\, du \text{*)},$$

(93) $$KZ(\beta) = KE\,(\text{am}\,\beta) - \beta E \text{**)},$$

(93 bis) $$E = \int_0^{\pi} \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\right) d\varphi,$$

(94) $$E\,(\text{am}\,\beta) = \int_0^{\text{am}\,\beta} \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\right) d\varphi.$$

Dem Product $(-iKZ)$ kann man die Gestalt:

(95) $$-iKZ(vi) = K \,\text{tg am}\,(v, k') \Delta \,\text{am}\,(v, k')$$
$$- \left[KE\,(\text{am}\, v, k') + (E - K) F\,(\text{am}\, v, k')\right] \text{***)}$$

geben, wo

(96) $$F\,(\text{am}\, v, k') = \int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\text{tg am}\,(v, k') = \text{tg}\,\frac{\omega}{2},$$

---

*) Fundamenta, Seite 144, 142, Formel 3, § 50.

**) Fundamenta, Seite 133, Formel 2, § 17.

***) Fundamenta, Seite 162, Zeile 5 von oben.

$$\Delta \operatorname{am}(v, k') = \Delta(\operatorname{am} vi, k) \cos \operatorname{am}(v, k')\,^{*)} = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

bedeuten. Aus der Formel (3) des § 50. der Fundamenta findet man leicht

$$(97)\qquad \int_0^K \frac{k^2 \sin^2 \operatorname{am} u}{\Delta^2 \operatorname{am} u}\, du = \frac{E}{1-k^2} - K.$$

Mit Hülfe dieser Formeln erhält man endlich:

$$(98)\qquad X = \frac{1}{\pi \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\omega}{2}}\left(\frac{E}{k'^2} - K\cos^2\frac{\omega}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{\pi}\left((K-E)F\left(\frac{\omega}{2}, k'\right) - KE\left(\frac{\omega}{2}, k'\right)\right)^{**)},$$

und dem analog:

$$(99)\qquad Y = -\frac{1}{\pi \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\omega}{2}}\left(\frac{E}{k'^2} - K\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{\pi}\left((K-E)F\left(\frac{\pi-\omega}{2}, k'\right) - KE\left(\frac{\pi-\omega}{2}, k'\right)\right)^{***)}.$$

Nach diesen Formeln habe ich mit Benutzung der Tabellen für die Functionen F und E, welche sich in Bertrand: Traité de calcul différentiel et de calcul intégral S. 716 und 717 finden, die Werthe von X und Y für $\alpha = 30^0$ und für folgende Argumente berechnet:

$\alpha = 30^0$

ω	X	ω	Y
30^0	$+\infty$	30^0	$-\infty$
$30^0\ 26'$	$+ 39,80$	$29^0\ 34'$	$- 44,56$
31^0	$+ 16,55$	$29^0\ 1'$	$- 19,77$
$34^0\ 23'$	$+ 3,09$	$26^0\ 3'$	$- 5,53$
$41^0\ 31'$	$+ 0,85$	$21^0\ 27'$	$- 2,84$
$56^0\ 22'$	$+ 0,23$	$15^0\ 16'$	$- 1,91$
$91^0\ 59'$	$+ 0,05$	$10^0\ 28'$	$- 1,62$
$114^0\ 7'$	$+ 0,03$	$7^0\ 56'$	$- 1,54$
180^0	$+ 0,018$	$5^0\ 19'$	$- 1,526$
		0^0	$- 1,43$

*) Fundamenta, Seite 34, Formel 4, § 19.
**) k — nach der Formel (79).
***) k — nach der Formel (80).

Für die Punkte P und P_1 nehmen X und Y sehr einfache Gestalt an; im Punkte P ist $\omega = \pi$; nach der Formel (79) $k = 0$, am $u = u$, $K = \frac{\pi}{2}$. Die Formel (81) giebt:

$$(100) \quad X = \frac{1}{\pi \cos \frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u \, du}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right).$$

Für den Punkt P_1, wo $\omega = 0$, erhalten wir:

$$(101) \quad Y = -\frac{1}{\pi \sin \frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin^2 u \, du}{1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1 \right).$$

Für $\omega = \alpha$ sind $X = +\infty$, $Y = -\infty$, wie man leicht aus den Formeln (75) und (76) sieht.

§ 5.

Nun soll bewiesen werden, dass die Potentialfunction $\mathfrak{v}$ der Elektricitätsquantitäten σ_1 und σ_2 innerhalb der Kugel sich continuirlich ändert. Nach einem bekannten Theoreme der Potentialtheorie besteht die Gleichung:

$$(102) \quad \int_1 \frac{dV}{d\mathfrak{N}} \frac{d\mathfrak{S}}{t} + \int_3 \frac{dV}{d\mathfrak{N}} \frac{d\mathfrak{S}}{t} + \int_2 \frac{dV}{dn} \frac{dc}{t}$$

$$= C(Cu) \int_1 \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{d\mathfrak{N}} d\mathfrak{S} + C(Zn) \int_3 \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{d\mathfrak{N}} d\mathfrak{S} + \int_2 V \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dn} dc.$$

t bedeutet hier die Entfernung eines innerhalb der Kugel liegenden Punktes μ von dem Elemente $d\mathfrak{S}$ oder dc; alle übrigen Buchstaben und Zeichen haben dieselbe Bedeutung wie in § 3.

Die letzten Integrale der beiden Seiten der Gleichung (102) verschwinden aus denselben Gründen wie in § 3.; die Summe der übrigen zwei Integrale der rechten Seite ist gleich: $-4\pi\mathfrak{v}$; daher nimmt die Gleichung (102) die Form an:

$$(103)\quad \mathfrak{v} = -\frac{1}{4\pi}\left\{C(Cu)\int_1 \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{d\mathfrak{R}}\,d\mathfrak{S} + C(Zn)\int_3 \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{d\mathfrak{R}}\,d\mathfrak{S}\right\}.$$

$\frac{1}{t^2}\frac{dt}{d\mathfrak{R}}d\mathfrak{S}$ ist die Oeffnung der Kegelfläche, unter welcher das Element $d\mathfrak{S}$ aus dem Punkte μ gesehen wird; wenn wir die ganze Kegelöffnung, unter welcher aus dem Punkte μ der Zn-Theil der äusseren Oberfläche erscheint, durch $\mathfrak{O}$ bezeichnen und berücksichtigen, dass die Kegelöffnung, unter welcher aus μ der Cu-Theil der äusseren Oberfläche gesehen wird, gleich $4\pi - \mathfrak{O}$ ist, so können wir dem Ausdrucke (103) die folgende Form geben:

$$(104)\quad \mathfrak{v} = C(Cu) + \frac{Zn \mid Cu}{4\pi}\mathfrak{O}.$$

Nun ist aber $\mathfrak{O}$ eine continuirliche Function innerhalb der ganzen Kugel; daher ist innerhalb derselben auch $\mathfrak{v}$ continuirlich.

Stellen wir uns vor, dass die doppelt-elektrische Schicht auf der Grenzfläche liegt, so dass ihre Potentialfunction $\mathfrak{w}$

innerhalb des Zn gleich $\frac{Zn \mid Cu}{4\pi}(4\pi - \mathfrak{O})$

und innerhalb des Cu gleich $-\frac{Zn \mid Cu}{4\pi}\mathfrak{O}$

ist, so wird die Summe $(\mathfrak{v} + \mathfrak{w}) = V$

innerhalb des Zn die constante Grösse $C(Zn)$

und innerhalb des Cu die constante Grösse $C(Cu)$

haben.

§ 6.

Bei der Annäherung an die Grenzlinie $L_1 L'$ nähern sich die Dichtigkeiten σ_1 und σ_2 den Werthen $-\infty$ und $+\infty$; daher muss die Menge $Q(Zn)$ der Elektricität auf dem Zn-Theile der äusseren Oberfläche positiv unendlich, die Menge $Q(Cu)$ der Elektricität auf dem Cu-Theile der äusseren Oberfläche hingegen negativ unendlich sein. Die Summe $Q = Q(Zn) + Q(Cu)$ aber, d. h. die Menge der Elektricität auf der ganzen äusseren Oberfläche der Kugel, kann einen endlichen Werth haben.

Q lässt sich auf folgende Art berechnen:

Aus dem Ausdrucke (13), (14) kann man den folgenden Ausdruck für die Dichtigkeit σ bilden:

$$(105)\quad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{d\varrho}\right)_{\varrho=R} = \frac{C(Zn)+C(Cu)}{8\pi R} - \frac{Zn \mid Cu}{8\pi R}\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\alpha - \sum_{n=1}^{n=\infty}(n+1)\,P_n(\cos\varphi)\left(P_{(n-1)}(\cos\alpha) - P_{(n+1)}(\cos\alpha)\right)\right).$$

Setzt man diese Reihe für σ in die Formel

$$Q = \int \sigma d\mathfrak{S}$$

ein, so findet man:

$$(106) \qquad Q = C(Zn) R \sin^2 \frac{\alpha}{2} + C(Cu) R \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

§ 7.

In den Formeln der vorhergehenden §§ befinden sich die Constanten: $Zn \mid Cu$, $C(Cu)$, $C(Zn)$, welche nach der Hypothese III in folgender Relation zu einander stehen:

$$(107) \qquad C(Zn) - C(Cu) = Zn \mid Cu.$$

$Zn \mid Cu$ ist eine vollkommen bestimmte und unveränderliche Grösse; von den beiden anderen Constanten wird die eine vollkommen bestimmt durch die elektrischen Bedingungen, unter denen der Leiter sich befindet.

Wenn das Kupfer in die Erde abgeleitet ist, so muss $C(Cu) = 0$ und $C(Zn) = Zn \mid Cu$ sein; daher wird nach den Gleichungen (73) und (74):

$$\sigma_1 = -\frac{Zn \mid Cu}{4\pi R} X, \qquad \sigma_2 = \frac{Zn \mid Cu}{4\pi R}(1 - Y).$$

Um die Vertheilung der Dichtigkeiten graphisch darzustellen, habe ich in der Figur 7 auf den zu den Punkten $\omega = 0$, $\omega = 5^0 19'$ u. s. w. gezogenen Radien die Längen $(1 - Y)$ und $(-X)$, d. h.: $+2{,}43$ Millimeter, $+2{,}526$ u. s. w. abgemessen; die positiven Grössen sind vom Umfange des Kreises nach aussen abgetragen, die negativen nach dem Mittelpunkte des Kreises zu; durch die Endpunkte dieser Längen sind Curven gezogen, wobei die Oberfläche der positiven Curve schraffirt ist.

Die positive Elektricität, welche die Oberfläche des Zn bedeckt, hat ihre kleinste Dichtigkeit im Punkte P_1 in der Mitte des Zn-Segments, wo $(1 - Y)$ gleich $(2{,}43)$ ist. Der Zuwachs der Dichtigkeit nach dem Rande des Segments erfolgt anfangs langsam, gegen Ende aber sehr rasch; so ist z. B. in der Entfernung von 15 Graden von der Mitte $(1 - Y) = 2{,}91$, in der Entfernung von $\frac{1}{2}$ Grad vom Rande ist aber die Dichtigkeit schon $(45{,}56)$, oder fast 19 Mal grösser als in der Mitte.

Die negative Elektricität auf der äusseren Oberfläche des in die Erde abgeleiteten Kupfers hat eine sehr kleine Dichtigkeit; nicht nur in der Mitte des Segments (wo $X = 0{,}018$), sondern auch auf dem grössten Theile des Segments; so ist z. B. in der Entfernung von 130 Graden von der Mitte $X = 0{,}231$. Einen raschen Zuwachs erleidet die Dichtigkeit nur in der Entfernung 1^0 vom Rande des Seg-

ments, so dass in der Entfernung $\frac{1}{2}$ Grades $X = 39{,}8$ oder 220 Mal grösser ist als in der Mitte.

Da die Menge der Elektricität auf der Kugel, nach der Formel (107), ausgedrückt wird durch

$$Q' = Zn \mid Cu\, R \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

so ist sie proportional der äusseren Oberfläche des Zn-Theiles.

Wenn das Zink in die Erde abgeleitet ist, daher $C(Zn) = 0$, so ist $C(Cu) = -Zn \mid Cu$,

$$\sigma_1 = -\frac{Zn \mid Cu}{4\pi R}(1 + X), \qquad \sigma_2 = -\frac{Zn \mid Cu}{4\pi R} Y.$$

Die Vertheilung der Dichtigkeiten für diesen Fall ist in der Figur 8 dargestellt, die sich von der Figur 7 darin unterscheidet, dass alle Ordinaten um eine positivê Einheit vermindert sind. Daraus folgt, dass in diesem Falle die Menge Q'' der Elektricität um den Werth

$$\frac{Zn \mid Cu}{4\pi R} 4\pi R^2$$

kleiner als Q' ist; daher

$$Q'' = Q' - (Zn \mid Cu) R = -(Zn \mid Cu) R \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Die ganze Kugel enthält also eine der äusseren Oberfläche des Cu proportionale Menge negativer Elektricität.

Wenn der Leiter vollkommen isolirt und die Menge der Elektricität auf ihm gleich Null ist, so bestimmt sich die Grösse $C(Cu)$ aus den Gleichungen (107) und (106) (wenn $Q = 0$). Man findet leicht:

$$(108)\qquad \begin{cases} C(Cu) = -Zn \mid Cu \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\ C(Zn) = Zn \mid Cu \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

und weiter:

$$\sigma_1 = -\frac{Zn \mid Cu}{4\pi R}\left(X + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right), \qquad \sigma_2 = \frac{Zn \mid Cu}{4\pi R}\left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - Y\right);$$

σ_1 ist hier negativ und σ_2 positiv.

In allen diesen Fällen ist die Dichtigkeit in den mittleren Theilen der Segmente sehr klein, fast verschwindend. So wird z. B. die Dichtigkeit im Punkte P_1, wenn das Cu abgeleitet ist, gleich:

$$(\sigma_2)_0 = \frac{Zn \mid Cu}{4\pi R} 2{,}43.$$

Nehmen wir für die elektrische Differenz zwischen Zink und Kupfer die Hälfte der elektromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elementes $\left(0{,}374 \frac{\sqrt{(Mm)(Mg)}}{\text{Sec.}}\right.$ nach Thomson$\left.\right)$ an, so wird:

$$(\sigma_2)_0 = \frac{0{,}03616}{R} \frac{\sqrt{Mm \cdot Mg}}{\text{Sec.}},$$

und, wenn $R = 20\,Mm$,

$$(\sigma_2)_0 = 0{,}0018 \frac{\sqrt{Mg}}{\text{Sec.} \sqrt{Mm}}.$$

Wird an die Kugel im Punkte P_1 eine Prüfungskugel von 2 Mm. Radius angelegt, so wird die mittlere Dichtigkeit auf ihr grösser sein, als die Dichtigkeit in den mittleren Theilen des Zn-Segmentes. Wäre die grosse Kugel homogen, so würde die Prüfungskugel eine um 1,47*) Mal grössere mittlere Dichtigkeit haben als die mittlere Dichtigkeit auf der grossen Kugel. Nehmen wir an, dass die mittlere Dichtigkeit der Prüfungskugel zu der Dichtigkeit $(\sigma_2)_0$ in eben demselben Verhältnisse stehe, so wird die Prüfungskugel eine Elektricitätsmenge

$$0{,}001808 \times 1{,}47 \times 4\pi(2)^2 \frac{\sqrt{(Mm)^3 \cdot Mg}}{\text{Sec.}}$$

annehmen.

Wird diese Prüfungskugel in die Torsionswage eingesetzt und mit einer ihr gleichgrossen Kugel, welche am Ende des Wagebalkens in 40 Mm. Entfernung von der Torsionsaxe befestigt ist, in Berührung gebracht, so muss, für eine Ablenkung von $(10)^0$, der Faden den folgenden Torsionscoefficienten haben:

$$k = \frac{(0{,}133)^2 \cos 5^0}{16 \cdot 40\,(\text{arcus } 10) \sin^2 5^0} = 0{,}02076 \frac{(Mm)^2\, Mg}{(\text{Sec.})^2}.$$

Nun hat aber ein einzelner Coconfaden von der Länge von 200 Mm. einen Torsionscoefficienten zwischen 50 und 200.

Ich schliesse daraus, dass, wenn bei den Untersuchungen über die Vertheilung der statischen Elektricität in ungeschlossenen Ketten eine Drehwage gewöhnlicher Construction gebraucht wird, man sogar mit den empfindlichsten Instrumenten nur Messungen an solchen Ketten anstellen kann, deren elektromotorische Kraft nicht kleiner ist als

$$0{,}187 \sqrt{\frac{200}{0{,}02076}} = 0{,}187.98,$$

d. h. fast 50 Daniell'sche Elemente.

Da es bekannt ist, dass das Elektrometer von Dellmann die Möglichkeit bietet, die statische Elektricität von 6 Daniell'schen Elementen zu beobachten, 15 aber schon 15 Grade Ablenkung geben, so ist eine solche Empfindlichkeit dieses Instrumentes nicht sowohl der Feinheit des Glasfadens, sondern vielmehr der vorzüglichen Construction der Haupttheile des Instrumentes zuzuschreiben, namentlich des Wagebalkens und der Silberplatte.

*) Riess, Reibungselektricität, Band 1, Seite 512, Tabelle 1.

§ 8.

Unter dem Namen einer „galvanischen ungeschlossenen Säule" werde ich einen Leiter (Fig. 9) verstehen, welcher aus heterogenen Theilen $NN: 1, 2, 3, \cdots i, \cdots m$ so zusammengesetzt ist, dass ein jeder von den Theilen $2, 3, \cdots i, \cdots (m-1)$ sich zwischen zwei anderen befindet und an dieselben grenzt (z. B. i zwischen $(i-1)$ und $(i+1)$). Eine Ausnahme bieten nur die Endtheile 1 und m.

Die Werthe der elektrischen Spannungen $C_1, C_2, \cdots C_i, \cdots C_m$ auf den verschiedenen Theilen der Säule sind durch $(m-1)$ Gleichungen verbunden:

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned} &C_2 - C_1 = 2\,|\,1\,, \\ &C_3 - C_2 = 3\,|\,2\,, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &C_m - C_{(m-1)} = m\,|\,(m-1)\,, \end{aligned}\right.$$

aus welchen folgt:

$$(110)\quad \left\{\begin{aligned} &C_2 = C_1 + 2\,|\,1\,, \\ &C_3 = C_1 + 2\,|\,1 + 3\,|\,2\,, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &C_m = C_1 + 2\,|\,1 + 3\,|\,2 + \cdots + m\,|\,(m-1)\,. \end{aligned}\right.$$

Wendet man die Formel (1) zur Lösung der Frage über die Vertheilung der Elektricität auf einer solchen Säule an, so lässt sich diese Aufgabe auf eine andere einfachere zurückführen.

In der Formel (1) ist jedes Integral über die äussere Oberfläche eines jeden Theiles der Säule ausgedehnt; wenn ich, der Kürze wegen, durch J_i das über die äussere Oberfläche des Theiles i erstreckte Integral:

$$J_i = \iint \frac{d\left(\frac{1}{T} - \Phi\right)}{d\mathfrak{N}}\, d\mathfrak{S}$$

bezeichne, so habe ich:

$$(111)\qquad V = \frac{1}{4\pi}\left(C_1 J_1 + C_2 J_2 + \cdots + C_m J_m\right).$$

Setze ich statt $C_2, C_3, \cdots C_m$ ihre Ausdrücke nach den Formeln (110) ein, so bilden sich in der Formel (111) Summen von der Form

$$J_i + J_{(i+1)} + \cdots + J_m\,,$$

welche ein über die Oberflächen der Theile $i, (i+1), \cdots m$ ausgedehntes Integral darstellen; ich werde dasselbe durch $J(i, m)$ bezeichnen. Dann wird:

$$(112)\quad 4\pi V = C_1 J(1, m) + (2\,|\,1)\, J(2, m) + (3\,|\,2)\, J(3, m) + \text{u. s. w.}$$

In dieser Formel bedeuten:

1) das erste Glied die Potentialfunction eines homogenen Leiters, welcher die Form der Säule hat, wenn die Spannung auf ihm gleich C_1 ist;

2) das zweite Glied die Potentialfunction eines Leiters von derselben Form, welcher aber aus zwei Theilen besteht, die auf der äusseren Oberfläche längs der Linie α_1 (Fig. 9) aneinander grenzen; der eine Theil ist aus dem Stoffe Nr. 1, der andere aus Nr. 2 gebildet; Nr. 1 ist in die Erde abgeleitet;

3) das dritte Glied die Potentialfunction eines Leiters von derselben Form, welcher auch aus zwei Theilen besteht, die auf der äusseren Oberfläche längs der Linie α_2 (Fig. 9) aneinander grenzen; der eine Theil besteht aus dem Stoffe Nr. 2, der andere aus Nr. 3; Nr. 2 ist in die Erde abgeleitet. U. s. w.

§ 9.

Nach obigen Bemerkungen kann ich die Vertheilung der Elektricität auf einer Säule bestimmen, die Kugelform hat, und deren Grenzlinien Kreise sind. Ich beschränke mich hier auf die Betrachtung einer solchen Säule, bei welcher die Grenzlinien parallele Kreise α_1, α_2, $\cdots$ $\alpha_{(3k-1)}$ (Fig. 10) sind ($\alpha = 0$ in der Mitte des Segmentes Nr. 1 gerechnet).

Alle Integrale $J(i, 3k)$ sind nach den vorigen §§ bekannt.

Wenn in den Formeln (13) und (14) für $C(Cu)$ und $C(Zn)$ eins gesetzt wird, so haben wir:

$$\frac{J(1,3k)}{4\pi} = \frac{R}{\varrho}; \tag{113}$$

wird in denselben Formeln $C(Cu) = 1$, $C(Zn) = 0$ und α_1 statt α gesetzt, so erhalten wir:

$$\frac{J(2,3k)}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\varrho} - U_1\right). \tag{114}$$

Ebenso

$$\frac{J(3,3k)}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\varrho} - U_2\right), \tag{115}$$

. . . .

$$\frac{J(3k,3k)}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\varrho} - U_{(3k-1)}\right). \tag{116}$$

U_i ist derjenige Ausdruck, in welchen sich U verwandelt, wenn $\alpha = \alpha_i$ wird.

Die Formel (112) erhält dann die Gestalt:

$$V = \frac{C_1 + C_{3k}}{2}\,\frac{R}{\varrho} - \frac{2\,|\,1}{2} U_1 - \frac{3\,|\,2}{2} U_2 - \cdots - \frac{3k\,|\,(3k-1)}{2} U_{(3k-1)}. \tag{117}$$

Hieraus ist leicht zu ersehen, dass die Vertheilung der Elektricität auf der äusseren Oberfläche der Säule betrachtet werden kann als zusammengesetzt aus folgenden Schichten:

Die Function $J(1, 3k)$ giebt eine Schicht von constanter Dichtigkeit σ_1 auf der ganzen Oberfläche der Kugel:

$$\sigma_1 = \frac{C_1}{4\pi R}. \tag{118}$$

Die Function $J(2, 3k)$ giebt eine Schicht von der Dichtigkeit σ_2'' auf der äusseren Oberfläche des Theiles Nr. 1 und von σ_2' auf der äusseren Oberfläche der übrigen Theile. Nach den Formeln (74) und (73), in welchen $C(Zn) = 0$, $C(Cu) = -Zn \mid Cu = 2 \mid 1$, $\alpha = \alpha_1$ ($\varphi = 0$ in der Mitte des Segmentes Nr. 1) gesetzt wird, haben wir:

$$\sigma_2'' = \frac{2 \mid 1}{4\pi R} Y_1, \quad \sigma_2' = \frac{2 \mid 1}{4\pi R}(1 + X_1). \tag{119}$$

Die Function $J(3, 3k)$ giebt eine Schicht von der Dichtigkeit σ_3'' auf den äusseren Oberflächen der Theile NNr. 1 und 2 und σ_3' auf den äusseren Oberflächen der übrigen Theile. Die Ausdrücke dieser Dichtigkeiten werden aus den Formeln (74) und (73) erhalten, wenn in ihnen $C(Zn) = 0$, $C(Cu) = -Zn \mid Cu = 3 \mid 2$, $\alpha = \alpha_2$ gesetzt wird:

$$\sigma_3'' = \frac{3 \mid 2}{4\pi R} Y_2, \quad \sigma_3' = \frac{3 \mid 2}{4\pi R}(1 + X_2), \tag{120}$$

u. s. w.

Um diese Untersuchungen auf einen speciellen Fall anzuwenden, betrachten wir eine kugelförmige Säule, die aus Zink, Zinkvitriol und Kupfer bestehe, und deren Grenzlinien parallele Kreise: $\alpha_1 = 30^0$, $\alpha_2 = 150^0$ seien.

Die Grössen der elektrischen Differenzen: $Zn \mid ZnSO_4$, $ZnSO_4 \mid Cu$ sind nach Kohlrausch:

$$Zn \mid ZnSO_4 = -1{,}29\, Zn \mid Cu,$$
$$ZnSO_4 \mid Cu = +0{,}36\, Zn \mid Cu.$$

Wende ich die Formeln (118) — (120) an, so habe ich $C(Zn)$ statt C_1, Zn, $ZnSO_4$, Cu statt 1, 2, 3 zu setzen. Die Grössen X_1 und Y_1 für $\alpha_1 = 30^0$ und für verschiedene Winkel φ kann man der Tabelle des § 4. entnehmen, indem man für die zwischenliegenden Winkel interpolirt. Um dieselbe Tabelle in der Formel (120) zu benutzen, muss man die Winkel von der Mitte des Cu-Segmentes zählen; dann erhält man die Ausdrücke für σ_3'' und σ_3' aus den Formeln (73) und (74), indem in den letzten gesetzt wird: $(\pi - \varphi)$ statt φ, Cu statt Zn, $ZnSO_4$ statt Cu, Null statt $C(Cu)$ und $(Cu \mid ZnSO_4)$ statt $C(Zn)$. Als Endresultat erhält man:

$$\sigma_3'' = -\frac{Cu \mid Zn\,SO_4}{4\pi R} X_1(\pi - \varphi),$$

$$\sigma_3' = \frac{Cu \mid Zn\,SO_4}{4\pi R}\big(1 - Y_1(\pi - \varphi)\big)$$

an Stelle der Formeln (120).

Auf diese Weise erhalten wir folgende Formeln für die Gesammtdichtigkeit:

auf Zink:

$$\sigma_1 + \sigma_2'' + \sigma_3'' = \frac{1}{4\pi R}\Big\{C(Zn) + \big(1{,}29\,Y(\varphi) + 0{,}36\,X(\pi - \varphi)\big) Zn \mid Cu\Big\},$$

auf Vitriol:

$$\frac{1}{4\pi R}\Big\{C(Zn) + \big(1{,}29\,(1 + X(\varphi)) + 0{,}36\,X(\pi - \varphi)\big) Zn \mid Cu\Big\},$$

auf Kupfer:

$$\frac{1}{4\pi R}\Big\{C(Zn) + \big(1{,}29\,(1 + X(\varphi)) - 0{,}36\,(1 - Y(\pi - \varphi))\big) Zn \mid Cu\Big\}.$$

Nach diesen Ausdrücken sind die in der Figur 11 graphisch abgebildeten elektrischen Dichtigkeiten berechnet, wenn das Kupfer abgeleitet ist, d. h. für $C(Cu) = 0$, $C(Zn) = -0{,}93\, Zn \mid Cu$.

Ist das Zn durch einen Kupferdraht abgeleitet, so wird $C(Zn) = Zn \mid Cu$. Für diesen Fall ist die Vertheilung der Dichtigkeiten in der Figur 12 abgebildet.

Die Formeln (118) — (120), (100) und (101) liefern einfache Ausdrücke für die Dichtigkeiten in den Mitten der äusseren Oberflächen der Endglieder der Säule, d. h. in den Punkten $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$.

In dem Punkte $\varphi = 0$, in der Mitte des Segmentes Nr. 1 ist:

$$(121)\quad \sigma = \frac{1}{4\pi R}\left\{C_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2 \mid 1}{\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} + \frac{3 \mid 2}{\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)} + \cdots\right) + \frac{E}{2}\right\},$$

$$E = 3k \mid (3k-1) + \cdots + 3 \mid 2 + 2 \mid 1.$$

In dem Punkte $\varphi = 180^0$, in der Mitte des Segmentes Nr. $3k$:

$$(122)\quad \sigma = \frac{1}{4\pi R}\left\{C_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2 \mid 1}{\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} + \frac{3 \mid 2}{\cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)} + \cdots\right) + \frac{E}{2}\right\}.$$

Diese Formeln zeigen, dass auf dem nach der Erde abgeleiteten Segmente die Dichtigkeit nicht verschwindet. Als Beispiel nehme ich eine aus 20 Elementen bestehende kugelförmige Säule, deren Platten so dünn sind, dass alle Elemente nur den mittleren Gürtel der Kugel von $\varphi = 30^0$ bis 150^0 einnehmen; die Säule ist durch zwei Kugelsegmente zu einer Kugel ergänzt; die Ordnung der Platten und der Grenzlinien ist folgende:

	Zn	$ZnSO_4$	Cu
NNr.	"	"	1
	2	3	4
	5	6	7
	. . .	. . .	. . .
	59	60	61

$\alpha_1 = 30^0, \quad \alpha_2 = 32^0, \quad \alpha_3 = 34^0, \quad \alpha_4 = 36^0, \cdots\cdots \alpha_{60} = 148^0.$

Für $C_1 = 0$ erhalten wir folgende Grössen:

$$\varphi = 0, \qquad \sigma = -14{,}29 \frac{Zn \mid Cu}{4\pi R},$$

$$\varphi = 180^0, \qquad \sigma = 50{,}708 \frac{Zn \mid Cu}{4\pi R}.$$

§ 10.

Die Formel (1) kann auf alle die Leitersysteme angewendet werden, für welche die Green'sche Function bekannt ist; wobei sich indessen einige mathematische Schwierigkeiten einstellen können.

Ich werde die Vertheilung der Elektricität auf einem Systeme bestimmen, welches aus zwei zusammengesetzten Leitern besteht. Die Masse des einen erstrecke sich nach allen Seiten in die Unendlichkeit und habe eine kugelförmige Höhlung vom Radius R. Durch eine Fläche, welche den Mittelpunkt der Höhlung enthält, sei der Leiter in zwei Theile getheilt; der eine Theil sei aus dem Stoffe A, der andere aus dem Stoffe B gebildet.

Innerhalb der Höhlung befinde sich ein anderer Leiter, eine Kugel vom Radius r; diese Kugel bestehe aus zwei heterogenen Halbkugeln a und b; die beiden sphärischen Oberflächen seien concentrisch.

Die Green'sche Function für den Raum zwischen den Kugelflächen und für die Punkte $m\,(\varrho, \varphi, \psi)$, $M\,(u, f, p)$ ist:

$$(123) \quad \Phi = \sum_0^\infty \left(\frac{(\varrho u)^n}{R^{2n+1}} - \frac{\varrho^n}{u^{n+1}} q^{2n+1} - \frac{u^n}{\varrho^{n+1}} q^{2n+1} + \frac{r^{2n+1}}{(\varrho u)^{n+1}} \right) \frac{P_n(\cos\gamma)}{1 - q^{2n+1}};$$

hier ist $q = \frac{r}{R}$, und γ bedeutet den Winkel zwischen den Radienvectoren ϱ und u.

Mit Hülfe der bekannten Entwickelungen:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\varrho} \sum \left(\frac{u}{\varrho}\right)^n P_n(\cos\gamma) \quad \text{für } u < \varrho,$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{u} \sum \left(\frac{\varrho}{u}\right)^n P_n(\cos\gamma) \quad \text{für } u > \varrho$$

erhalten wir die Ausdrücke für die Derivirten:

$$\left[\frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{du}\right]_{u=r}=\sum_0^{\infty}(2n+1)\,\frac{\eta^n}{r\varrho}\,\frac{1-\left(\frac{q}{\eta}\right)^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\,P_n(\cos\gamma)\,,$$

wo: $\eta=\frac{r}{\varrho}$,

$$-\left[\frac{d\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{du}\right]_{u=R}=\sum_0^{\infty}(2n+1)\left(\frac{q}{\eta}\right)^n\frac{1}{R^2}\,\frac{1-\eta^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\,P_n(\cos\gamma)\,.$$

Für die polare Axe des sphärischen Coordinatensystems nehme ich die Symmetrieaxe OP_1 des äusseren Leiters und für die erste Meridionalfläche die Fläche, welche die Symmetrieaxen der beiden Leiter enthält; man kann auch die Symmetrieaxe OP_2 des inneren Leiters als polare Axe nehmen.

Seien φ' und ψ' (Fig. 13) die polaren Coordinaten des Punktes m bei dieser neuen Polaraxe OP_2 und derselben ersten Meridionalfläche, und β der Winkel P_1P_2 zwischen den Axen OP_1 und OP_2. Die Winkel φ, ψ, β, φ', ψ' stehen zu einander in folgender Beziehung:

$$\cos\varphi'=\cos\varphi\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta\cos\psi\,, \tag{124}$$

$$\operatorname{cotg}\psi'=\frac{(-\sin\beta\operatorname{cotg}\varphi+\cos\beta\cos\psi)}{\sin\psi}\,. \tag{125}$$

Es sind $C(A)$, $C(B)$, $C(a)$, $C(b)$ die Grössen der Spannungen auf den Theilen A, B, a, b. Wendet man die Formel (1) an, so hat man zwischen folgenden Grenzen zu integriren:

auf der Hemisphäre

$$\left.\begin{array}{llllllll}\text{des Theiles} & A & \text{nach } f: & \text{von} & 0 & \text{bis} & \frac{\pi}{2} \\ \text{„} & B & \text{„} & \text{„} & \frac{\pi}{2} & \text{„} & \pi\end{array}\right\}\text{ nach } p \text{ von } 0 \text{ bis } 2\pi,$$

$$\left.\begin{array}{llllllll}\text{„} & a & \text{„ } f': & \text{„} & 0 & \text{„} & \frac{\pi}{2} \\ \text{„} & b & \text{„} & \text{„} & \frac{\pi}{2} & \text{„} & \pi\end{array}\right\}\text{ nach } p' \text{ von } 0 \text{ bis } 2\pi;$$

f' und p' bedeuten hier die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die Polaraxe OP_2 und die erste Meridionalfläche P_1P_2.

Mit Berücksichtigung der Formeln (5) bis (11) erhalten wir folgenden Ausdruck für die Potentialfunction:

$$V=\frac{C(a)+C(b)}{2}\,\eta\,\frac{\left(1-\frac{q}{\eta}\right)}{1-q}+\frac{C(A)+C(B)}{2}\,\frac{1-\eta}{1-q} + \frac{a\,|\,b}{2}\,U'+\frac{A\,|\,B}{2}\,U''\,, \tag{126}$$

$$(127)\quad U' = \sum_1^\infty \eta^{(n+1)} \frac{1-\left(\frac{q}{\eta}\right)^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} P_n(\cos\varphi')\,[P_{n-1}(O) - P_{n+1}(O)],$$

$$(128)\quad U'' = \sum_1^\infty \left(\frac{q}{\eta}\right)^n \frac{1-\eta^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} P_n(\cos\varphi)\,[P_{n-1}(O) - P_{n+1}(O)].$$

Die Reihe U' verschwindet bei $\varrho = R$, weil dann $\eta = q$; für $\varrho = r$ (dann ist $\eta = 1$) nimmt sie die Form der Reihe $(14)_4$ an.

Die Reihe U'' verschwindet bei $\varrho = r$ und wird identisch mit $U\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ bei $\varrho = R$.

Daraus kann man schliessen, dass durch die Grenzlinie der Höhlung alle diejenigen Niveauflächen hindurchgehen, deren Parameter zwischen $C(A)$ und $C(B)$ eingeschlossen sind; ebenso gehen durch die Grenzlinie des inneren Leiters alle Niveauflächen, deren Parameter zwischen $C(a)$ und $C(b)$ liegen.

Die Function V kann als eine Summe von vier anderen Functionen betrachtet werden. Die zwei ersten hängen nur von ϱ ab, die dritte ist die Potentialfunction für $C(A) = C(B) = 0$ und $C(b) = -C(a)$; ihre Niveauflächen sind mit dem inneren Leiter *unveränderlich verbunden*, so dass bei der Veränderung des Winkels β das ganze System der Niveauflächen sich mit dem Leiter zusammen dreht. Die vierte Function der Formel (126) ist ebenso unveränderlich mit dem äusseren Leiter verbunden. Die Dichtigkeit der elektrischen Schichten auf den Kugeloberflächen sind:

auf der inneren:

$$(129)\quad \sigma' = \frac{C(a) + C(b) - C(A) - C(B)}{8\pi r(1-q)} + \frac{a\,|\,b}{8\pi r} \sum_1^\infty \frac{(n+1) + nq^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} P_n(\cos\varphi')\,N - \frac{A\,|\,B}{8\pi r} \sum_1^\infty (2n+1) \frac{q^n}{1-q^{2n+1}} P_n(\cos\varphi)\,N,$$

wo:

$$N = P_{n-1}(O) - P_{n+1}(O);$$

auf der äusseren:

$$(130)\quad \sigma'' = -\frac{C(a) + C(b) - C(A) - C(B)}{8\pi R} \frac{q}{1-q} + \frac{A\,|\,B}{8\pi R} \sum_1^\infty \frac{n + (n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} P_n(\cos\varphi)\,N - \frac{a\,|\,b}{8\pi R} \sum_1^\infty (2n+1) \frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+1}} P_n(\cos\varphi')\,N.$$

Diese Formeln zeigen, dass die Vertheilung der Elektricität auf den Kugelflächen aus folgenden Schichten besteht:

1) aus Schichten von constanter Dichtigkeit auf der ganzen Kugeloberfläche,

2) aus Schichten, welche eine von der Lage des anderen Leiters unabhängige Dichtigkeit haben; auf der inneren Kugelfläche ist es die Schicht, deren Dichtigkeit durch die erste Summe der Formel (129) ausgedrückt wird; diese Summe kann in zwei andere zerlegt werden:

$$\sum_1^\infty (n+1) P_n(\cos\varphi') N + \sum_1^\infty (2n+1) \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} P_n(\cos\varphi') N;$$

von diesen letzteren Summen ist die erste identisch mit der Reihe $\left(105, \text{ für } \alpha = \frac{\pi}{2},\ C(Cu) = -C(Zn) \text{ und } \frac{Zn \mid Cu}{8\pi R} = 1\right)$, sie muss daher positiv-unendlich sein auf der einen Seite der Grenzlinie und negativ-unendlich auf der anderen Seite; die andere Summe ist offenbar eine für alle φ convergente Reihe.

3) Ferner bestehen σ' und σ'' noch aus solchen Schichten, deren Dichtigkeit nur von der Lage der gegenüberliegenden Kugelflächen abhängt; so enthält z. B. die zweite Summe der Formel (130) nur den Polarabstand φ' und stellt daher eine in Bezug auf die Axe OP_2 symmetrische Schicht dar, welche mit dem inneren Leiter sich auf der äusseren Kugelfläche verschiebt.

§ 11.

Unter der Wirkung der ponderomotorischen Kräfte wird der innere Leiter gezwungen, sich um seinen Mittelpunkt zu verschieben und eine bestimmte Lage anzunehmen.

Ich nehme an, dass der innere Leiter sich um diejenige Axe drehen kann, welche mit der Durchschnittslinie der beiden ebenen Grenzflächen zusammenfällt, und bestimme die Grösse des Drehungsmomentes der elektrischen ponderomotorischen Kräfte um diese Axe.

Die Potentialfunction der doppelt-elektrischen Schicht des äusseren Leiters in einem Punkt m $(s, \varphi, \psi, \varphi', \psi')$ innerhalb der Höhlung (bei $s < R$) ist:

$$W = \frac{A \mid B}{2} \left\{1 + \sum_1^\infty \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{s}{R}\right)^n N P_n(\cos\varphi)\right\} *).$$

Die Potentialfunction der auf der äusseren Kugelfläche vertheilten Elektricität in demselben Punkt ist:

*) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. II, S. 301.

$$- \frac{C(a) + C(b) - C(A) - C(B)}{2} \frac{q}{1-q}$$

$$- \frac{a \mid b}{2} \sum_1^\infty \frac{q^{(n+1)}}{1-q^{(2n+1)}} \left(\frac{s}{R}\right)^n N P_n(\cos\varphi')$$

$$+ \frac{A \mid B}{2} \sum_1^\infty \frac{n + (n+1) q^{(2n+1)}}{1-q^{(2n+1)}} \left(\frac{s}{R}\right)^n \frac{N}{(2n+1)} P_n(\cos\varphi).$$

Die Summe dieser beiden letzten Potentialfunctionen wird also:

$$v = \frac{A \mid B}{2} - \frac{C(a) + C(b) - C(A) - C(B)}{2} \frac{q}{1-q} \tag{131}$$

$$- \frac{a \mid b}{2} \sum_1^\infty \frac{q^{(n+1)}}{1-q^{(2n+1)}} \left(\frac{s}{R}\right)^n N P_n(\cos\varphi')$$

$$+ \frac{A \mid B}{2} \sum_1^\infty \left(\frac{s}{R}\right)^n \frac{N}{1-q^{(2n+1)}} P_n(\cos)\varphi).$$

OZ (Fig. 14) sei die Rotationsaxe des inneren Leiters, ZL_1 und ZL_2 seien die Quadranten, welche in den Ebenen der Grenzlinien des äusseren und inneren Leiters liegen; OP_1 und OP_2 die Symmetrieaxen der beiden Leiter, P_1 entspricht der Mitte des Segmentes A und P_2 der Mitte des Segmentes a; ausser den früher erwähnten Winkeln φ, φ', ψ, ψ' und β führe ich noch die Winkel $\lambda(\widehat{Zm})$ und ϑ in die Formel ein, deren Bedeutung aus der Figur ersichtlich ist.

Wenn sich im Punkte m die Einheit der positiven Elektricität befindet, so wirkt auf denselben von der Elektricität des äusseren Leiters her eine Kraft, deren Componente längs der Tangente an den Parallelkreis $\lambda =$ const. gleich

$$- \frac{dv}{d\vartheta} \frac{1}{s \sin\lambda}$$

ist. Das Moment dieser Kraft in Bezug auf die Axe OZ ist:

$$- \frac{dv}{d\vartheta}.$$

Daraus folgt, dass das Drehungsmoment der Kräfte, welche von dem äusseren Leiter auf die elektrische Schicht σ' wirken, gleich ist:

$$K = - r^2 \int\int \frac{dv}{d\vartheta} \sigma' \sin f\, df\, dp.$$

Nach den Formeln (131) und (129), mit Benutzung einiger bekannter Eigenschaften der Kugelfunctionen, findet man:

$$K = \frac{(a \mid b)(A \mid B)}{4} r \sum_1^\infty \frac{(n+1)}{(2n+1)} \frac{q^n}{1-q^{2n+1}} N^2 \frac{dP_n(\cos\beta)}{d\cos\beta} \sin\beta.$$

Um die ponderomotorische Wirkung auf die Doppelschicht des inneren Leiters zu bestimmen, denke ich mir diese Doppelschicht auf die äussere Oberfläche des Theiles a übertragen, so dass seine positive Seite (Dichtigkeit Δ) auf der äusseren Oberfläche der Halbkugel und seine negative auf einer Kugelfläche vom Radius $(r - \varepsilon)$ liegt; dabei ist:

$$\Delta \varepsilon = \frac{a \mid b}{4 \pi}.$$

Das Drehungsmoment der Kräfte, welche auf ein Element der positiven Seite der Schicht wirken, ist:

$$-\Delta \frac{dv}{d\vartheta} r^2 \sin \lambda \, d\lambda \, d\vartheta$$

und das derjenigen auf das entsprechende Element der negativen Seite:

$$\Delta \left(\frac{dv}{d\vartheta} - \varepsilon \frac{d^2 v}{d\vartheta \, dr}\right) r^2 \sin \lambda \, d\lambda \, d\vartheta.$$

Das Drehungsmoment der ponderomotorischen Kräfte, welche an der Doppelschicht angreifen, wird daher:

$$L = -\frac{a \mid b}{4 \pi} \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{dv}{dr}\right)_1 - \left(\frac{dv}{dr}\right)_2\right] r^2 \sin \lambda \, d\lambda.$$

Die Zahlen 1 und 2 bei den Derivirten nach r bedeuten, dass in der ersten Derivirten $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \beta$, in der zweiten $\vartheta = \left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right)$ stehen muss. Diese Derivirten sind nach s genommen, und es ist dann $s = r$ gesetzt.

Aus der Figur ersieht man, dass

$$\cos \varphi = \sin \lambda \cos \vartheta, \qquad \cos \varphi' = \sin \lambda \cos (\vartheta - \beta).$$

Um nach λ zu integriren, benutze ich die Gleichung:

$$P_n (\sin \lambda \cos \vartheta)$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m a_m^{(n)} P_m^{(n)}(O) P_m^{(n)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right) \cos m \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \text{*)}$$

und finde mit Hülfe der bekannten Eigenschaften der Kugelfunctionen folgenden Ausdruck für L:

$$L = \frac{(a \mid b)(A \mid B)}{4} r \sum_1^{\infty} \frac{n}{(2n+1)} \frac{q^n}{1 - q^{2n+1}} N^2 \frac{d P_n (\cos \beta)}{d \cos \beta} \sin \beta.$$

---

*) Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, S. 177.

Die Summe $(L+K)=P$ stellt das ganze Drehungsmoment der elektrischen ponderomotorischen Kräfte dar, welche auf den inneren Leiter wirken:

$$(132)\qquad P=\frac{(a\,|\,b)\,(A\,|\,B)}{4}\,r\sum_{1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n+1}}\,N^2\,\frac{d\,P_n(\cos\beta)}{d\cos\beta}\,\sin\beta.$$

Das Kräftepaar hat seinen grössten Werth für $\beta=\frac{\pi}{2}$; für diesen Winkel ist:

$$(133)\qquad P\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{(a\,|\,b)\,(A\,|\,B)}{4}\,r\sum_{1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n+1}}\,\frac{n(n+1)}{(2n+1)}\,N^3.$$

Da $P_{n-1}(O)$ und $P_{n+1}(O)$ nur für gerade Zahlen $(n-1)$ und $(n+1)$ nicht verschwinden, und da

$$P_{2k}(O)=(-1)^k\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\;2k},$$

wird:

$$(P_{2k}-P_{2k+2})^3=(-1)^k\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\;2k}\,\frac{4k+3}{2k+2}\right)^3;$$

daher:

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{(a\,|\,b)\,(A\,|\,B)}{4}\,r\left\{\frac{9}{4}\,\frac{q}{1-q^3}\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots\;2k}\right)^3\cdot\left(\frac{4k+3}{2k+2}\right)^2(2k+1)\,\frac{q^{2k+1}}{1-q^{(4k+3)}}\right\}.$$

Für $q=0{,}9$ ist die Summe der 10 ersten Glieder der Reihe gleich 6,32; die Summe aller übrigen ist kleiner als 0,048.

Nimmt man den Radius r zu 15 Millimeter an, $a\,|\,b$ gleich der elektromotorischen Kraft eines Elementes von Daniell; ist der innere Leiter bifilär aufgehängt an Fäden von der Länge $l=200$ Mm. und in einem Abstande $d=1$ Mm. von einander; ist das Gewicht des Leiters $M=1$ Gramm: so wird nach der bekannten Formel der Sinus des Ablenkungswinkels:

$$\sin\varphi=\frac{4\,l}{d^2}\,\frac{P}{M}.$$

P ist das ablenkende Kräftepaar, ferner:

$$M=1000.9800\,\frac{\text{Mm}\cdot\text{Mg}}{(\text{Sec.})^2}.$$

Ist $A\,|\,B$ n Mal grösser als die elektromotorische Kraft eines Elementes von Daniell, so wird:

$$A\,|\,B=n(0{,}374)\sqrt{\frac{\text{Mm}\cdot\text{Mg}}{\text{Sec.}}};$$

daher:

$$P = n\,(0{,}374)^2 \,\frac{(\mathrm{Mm})^2 \cdot \mathrm{Mg}}{(\mathrm{Sec.})^2}\, \frac{15}{4}\, 6{,}3\,.$$

Hieraus findet man, dass bei $n = 1$ der Winkel $\varphi = 55''$ wird.

Wird die Beobachtung der Ablenkung mittelst Spiegel und Fernrohr gemacht, und beträgt die Entfernung der Scale vom Spiegel einen Meter, so entspricht dem Winkel $55''$ eine Ablenkung von 0,54 Mm. oder ein halber Scalentheil.

Beträgt aber die Differenz der Spannungen auf den Hälften des äusseren Leiters 20 Daniell'sche Elemente, so wird die Ablenkung 10,8 Scalentheile betragen; hundert Daniell'sche Elemente geben eine Ablenkung um 54 Scalentheile.

Wird nicht nur $A \mid B$, sondern auch $a \mid b$ 20 Daniell'schen Elementen gleich, so wird die Ablenkung 216 Scalentheile.

Man ersieht hieraus, dass ein nach solchem Gesichtspunkte construirtes Instrument als ein absolutes Elektrometer dienen kann; dasselbe hat grosse Aehnlichkeit mit dem Quadrantenelektrometer von Thomson.

Arensburg (Oesel), Juni 1876.

Ueber Raumcurven und Developpabele.

Von

A. Voss in Darmstadt.

In einer in den *Göttinger Nachrichten* (Februar 1875) veröffentlichten Mittheilung habe ich die speciellen Liniencomplexe n. Grades $f=0$, welche der Gleichung:

$$(1)\qquad \sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = M\sum x_i^2$$

genügen, einer genaueren Untersuchung unterzogen. Genügt die Gleichung eines Complexes der Differentialgleichung (1), *so umhüllen seine Geraden im Allgemeinen eine Fläche*, deren Gleichung in Liniencoordinaten eben $f=0$ ist. *Die Gleichung $f=0$ ordnet dann jeder Geraden x des Raumes eine Gerade y zu* (conjugirte Polare von x bei Plücker), deren Coordinaten:

$$(2)\qquad \varrho y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

sind. Ist x eine Gerade des Complexes selbst, so wird y von x geschnitten. Man findet dann leicht, dass das ganze Büschel $x+\lambda y$ dem Complexe angehört, es besteht eben aus den Tangenten der Fläche, deren gemeinsamer Berührungspunkt der Schnittpunkt von x und y ist. Es finden ferner vermöge $f=0$, $\Sigma x_i^2 = 0$ die Gleichungen statt:

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial z_i} = A x_i + B\frac{\partial f}{\partial x_i},\quad \text{für } z_i = x_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

in welchen A und B vom Index i unabhängige Polynome $n-1$. Grades in λ bedeuten. Sie sagen aus, *dass die zugeordneten Geraden sämmtlicher Strahlen des Büschels $x+\lambda y$ jenem letzteren selbst angehören*, wie es freilich a priori zu erwarten war. *Hiernach finden sich in jedem Büschel dieser Art sich selbst zugeordnete Gerade*, bestimmt durch die Gleichungen:

$$(4)\qquad \varrho\left[x_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}\right] = A x_i + B\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

d. h. durch die Gleichung n. Grades:

$$(5)\qquad \lambda A - B = 0.$$

Die n Wurzeln derselben bestimmen die singulären Tangenten der Fläche, d. h. die Doppel- und Haupttangenten, welche von dem genannten Punkte auslaufen. Insbesondere habe ich gezeigt, *dass für eine Doppelwurzel von* (5) *der Factor* ϱ *immer gleich Null ist*)*.

Soll der Complex $f = 0$ die *Treffgeraden einer Curve,* beziehungsweise *das Tangentensystem einer Developpabelen darstellen,* so muss noch *eine zweite Differentialgleichung* neben der Gleichung (1) für alle Geraden des Complexes erfüllt sein, welche am angeführten Orte (Seite 119) gleichfalls hergeleitet ist.

Umhüllen die Geraden des Complexes eine Developpabele, so hat die Gleichung (5) eine *Doppelwurzel,* für welche die Werthe sämmtlicher Differentialquotienten verschwinden; sie bestimmt die *Erzeugende* der Fläche, während die $n-2$ anderen Wurzeln sich auf die Doppeltangenten beziehen. Endlich ist das System der Haupttangenten dadurch charakterisirt, dass ihre zugeordneten Geraden die Erzeugenden sind; *jedem Büschel von Haupttangenten ist also ein fester Strahl zugeordnet.*

Völlig dualistisch sind die Verhältnisse, wenn der Complex aus den Treffgeraden, oder, wie ich sagen werde, *aus den Strahlen einer Curve besteht.* Jedem Strahle x entspricht ein zugeordneter y *und bestimmt mit ihm eine Tangentenebene der Curve, deren singuläre Strahlen die* $n-2$ *Sehnen und die Curventangente selbst sind,* welche von dem Punkte (x, y) auslaufen. Den *Hauptstrahlen* der Curve (d. h. den Haupttangenten ihrer Developpabelen oder den Strahlen in den Schmiegungsebenen der Curve) *ist jedesmal als fester Strahl die betreffende Curventangente zugeordnet.*

Ist nun die Gleichung einer Raumcurve gegeben, so führt die Bedingung, dass eine Gerade z zwei unendlich nahe Tangenten derselben treffe, immer gleichzeitig zu dem Complexe der Strahlen der Curve, und zu dem der Tangenten ihrer Developpabelen. *Die Discriminante,* deren Verschwinden jene Beziehung aussagt, muss also die Eigenschaft haben, vermöge der Identität zwischen den Liniencoordinaten

$$(6) \qquad \sum x_i^2 = 0 \text{ **)}$$

in zwei rationale Factoren f_1, f_2 *zu zerfallen,* deren Charakter nur in dem besonderen Falle völlig gleich ist, wenn die Curve ihrer Developpabelen selbst dualistisch entspricht, wie das z. B. bei der Raumcurve dritter Ordnung, R_3, stattfindet, während in jedem anderen beide

---

*) A. a. O. p. 108.

**) Dieselbe wird im Folgenden durch den entsprechenden grossen Buchstaben, also durch $X = 0$ bezeichnet werden. Für Ausdrücke von der Form $\Sigma a_i b_i$ setze ich, wie bisher, (ab), so dass auch $X = (xx)$.

Formen leicht nach der Natur der Curve unterschieden werden können, da der Grad des einen die Ordnung der Curve, der des anderen die Classe des ebenen Schnittes ihrer Developpabelen bestimmt.

Beide Complexe $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ haben ausserdem die Eigenschaft, eine specielle Congruenz, die der Hauptstrahlen der Curve gemeinsam zu enthalten, während für das System der Erzeugenden der Fläche (Tangenten der Curve) sowohl die $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$ als auch die $\frac{\partial f_2}{\partial x_i}$ sämmtlich verschwinden*).

Untersuchungen über dieses Verhalten der Formen f_1, f_2 haben auch ein rein algebraisches Interesse, indem sie den Zusammenhang zwischen den Formen zweier Gleichungen darlegen, welche in gewissem Sinne das nämliche geometrische Gebilde (Curve und Developpabele) bestimmen. Eine besonders übersichtliche Gestalt nehmen sie insbesondere bei den rationalen Raumcurven an, deren Tangentensystem eine rationale Parameterdarstellung gestattet; die erforderliche Discriminantenbildung beruht dann unmittelbar auf der Verwerthung der binären Formentheorie.

Indem ich die im Vorigen angedeuteten allgemeinen Beziehungen an dem Beispiel der *Raumcurven dritter Ordnung* erläutere, war es meine Absicht, neben der Entwickelung einiger Eigenschaften, welche sich unmittelbar aus jener Parameterdarstellung ergeben, auf die nahe Beziehung hinzuweisen, *welche jenes Beispiel zur Theorie der binären biquadratischen Formen auf der R_3 besitzt.* Manches ist dabei freilich nur andeutungsweise ausgeführt, da eine eigentliche geometrische Theorie jener Formen auf der R_3 mehr Raum beansprucht haben würde.

§ I.

Parameterdarstellung eines rationalen Liniengebildes insbesondere der R_3.

1) Die Liniencoordinaten der Erzeugenden einer rationalen Linienfläche n. Grades lassen sich durch Gleichungen von der folgenden Form:

$$(1) \qquad \varrho x_i = f_i = \sum a_k^i \lambda^k \mu^{n-k}$$

(mit zwei homogenen Parametern λ, μ) ausdrücken**). Die Fläche wird im Allgemeinen windschief sein, wenn nur die Identitäten:

$$(2) \qquad \sum a_k^i a_s^i = 0, \qquad k + s = \text{const.},$$

für alle k und s zwischen den Coefficienten a_k^i bestehen, vermöge welcher Σf_i^2 identisch verschwindet.

---

*) Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dass f_1, f_2 wieder auf die Normalform, in der sie der Gleichung (1) genügen, reducirt sind.

**) Vgl. Math. Annalen Bd. VIII, S. 115 ff.

Sei nun die Discriminante der Gleichung, welche die n Schnittpunkte einer Geraden z mit der Fläche bestimmt:

(3) $$(xz) = 0 = \sum (az)_k \lambda^k \mu^{n-k}$$

durch Δ bezeichnet. $\Delta = 0$ *stellt den Tangentencomplex der Fläche vor und genügt der partiellen Differentialgleichung:*

(4) $$\sum \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z_i}\right)^2 = \Delta M^*).$$

Man findet in der That:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z_i} = \sum \frac{\partial \Delta}{\partial (az)_k} a_k^i,$$

also:

$$\sum \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z_i}\right)^2 = \sum \frac{\partial \Delta}{\partial (az)_k} \frac{\partial \Delta}{\partial (az)_l} a_k^i a_l^i.$$

Ordnet man rechter Hand in Gruppen, für welche $k + l = \text{const.}$, so kann man durch Addition der Identitäten (2), welche man mit passend gewählten Differentialquotienten von Δ multiplicirt hat, die letztere Gleichung in die Form:

$$\sum \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z_i}\right)^2 = \sum \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial (az)_k} \frac{\partial \Delta}{\partial (az)_l} - \frac{\partial \Delta}{\partial (az)_{k'}} \frac{\partial \Delta}{\partial (az)_{l'}} \right\} \alpha_{kl},$$
$$k + l = k' + l'$$

bringen. Die rechte Seite hat aber nach einer bekannten Eigenschaft der Discriminante**) den Factor Δ, womit die Gleichung (4) bewiesen ist.

Verschwindet Δ, so sind die Differentialquotienten $\frac{\partial \Delta}{\partial (az)_k}$ den Potenzen der Doppelwurzel der Gleichung (3), d. h. den Grössen λ_0^k proportional. Daher ist in diesem Falle:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z_i} = \sum a_k^i \lambda_0^k \mu_0^{n-k},$$

mithin sind die Differentialquotienten von Δ den Coordinaten der Erzeugenden proportional, an der die Gerade z die Fläche berührt. Für eine Haupttangente z der Fläche würden jene Differentialquotienten sämmtlich verschwinden.

Sollen die Gleichungen (1) eine Developpabele vorstellen, so müssen neben den Identitäten (2) noch die folgenden:

(5) $$\sum k s a_k^i a_s^i = 0$$

erfüllt sein. Die Discriminante zerfällt dann, was geometrisch unmittelbar evident ist, vermöge $Z = 0$ in zwei rationale Factoren:

---

*) Vgl. Gött. Nachrichten Febr. 1875, S. 115.

**) Vgl. z. B. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, S. 113.

$$\Delta = f_1 f_2 + ZN$$

und jeder derselben muss wieder der Differentialgleichung:

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)^2 = Af + BZ$$

genügen*).

2) Das System der *Tangenten einer* R_3 ist daher dargestellt durch die Gleichungen:

(6) $$\varrho x_i = a_i + 4 b_i \lambda + 6 c_i \lambda^2 + 4 d_i \lambda^3 + e_i \lambda^4,$$

in denen:

$$(ae) = -4(bd) = 6(cc)$$

zu nehmen ist, während die übrigen Productsummen je zweier Coefficienten verschwinden müssen**). Die Curve ist nach den Gleichungen (6) bezogen auf das Vierseit der Geraden a, b, d, e, von denen a, e selbst Tangenten, die Ebenen der (a, b), (d, e) Schmiegungsebenen der Curve sind. Ein solches Vierseit ist durch zwei Curvenpunkte völlig bestimmt; wir bezeichnen dasselbe als *Tetraeder U*, es giebt deren ∞^2.

Die Curve gehört einem linearen Complexe $(\alpha x) = 0$ an, dessen Coefficienten α_i bestimmt sind durch die Gleichungen:

(7) $$(a\alpha) = 0, \quad (b\alpha) = 0, \quad (c\alpha) = 0, \quad (d\alpha) = 0, \quad (e\alpha) = 0.$$

Da derselbe kein specieller ist, so kann man setzen:

(8) $$(\alpha\alpha) = -(ae)\,^{***}).$$

Zwischen den Coefficienten a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, α_i *und den ganz willkürlichen* z_i *findet die Identität statt:*

(9) $$(\alpha z)^2 = (\alpha\alpha)\left[(zz) - \frac{2}{(ae)}\left\{3(cz)^2 - 4(bz)(dz) + (az)(ez)\right\}\right].\dagger)$$

Man erhält die Gleichung (9) durch Multiplication der identisch verschwindenden Determinante, welche entsteht, wenn man die 7 Horizontalreihen der a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, α_i, z_i mit den (az), (bz), (cz), (dz),

---

*) Man kann dies auch algebraisch beweisen, wenn man das allerdings verwickelte System von Identitäten untersucht, welches zwischen den (az) vermöge $Z = 0$ in Folge der Identitäten (2), (5) besteht.

**) Vgl. Math. Annalen Bd. XIII, S. 112.

***) Das dritte Kantenpaar des Tetraeders U ist dann durch die Axen der beiden speciellen linearen Complexe $(cz) \pm \frac{(\alpha z)}{\sqrt{6}} = 0$ bestimmt.

†) Eine noch allgemeinere Identität ist:

$$(ay)(ex) - 4(by)(dx) + 6(cx)(cy) - 4(bx)(dy) + (ax)(ey) = (\alpha y)(\alpha x) + (xy)(\alpha\alpha),$$

welche für je zwei Werthe x_i, y_i besteht.

$(e z)$, (αz), $(z z)$, durch eine siebente Verticalreihe ergänzt, mit der Determinante der a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, α_i.

Für jede Gerade des Raumes ist daher:

$$(10) \qquad (\alpha z)^2 = 2\,[3\,(c z)^2 - 4\,(b z)\,(d z) + (a z)\,(e z)].$$

3) Aus den Gleichungen (6) ist ferner:

$$\varrho(a x) \equiv \lambda^4, \quad \varrho(b x) \equiv -\lambda^3, \quad \varrho(c x) \equiv \lambda^2, \quad \varrho(d x) \equiv -\lambda, \quad \varrho(e x) \equiv 1\text{*)}.$$

Demnach genügt jede Tangente der Curve der Gleichung:

$$(a z)\,(e z) - (b z)\,(d z) = 0.$$

Es ist dies die Gleichung eines tetraedralen Complexes, nämlich desjenigen, dessen Gerade das Tetraeder U in Punkten des Doppelverhältnisses 4 schneiden. Da jenes Tetraeder ein ganz beliebiges aus der ∞^2 Schaar derselben ist, so folgt:

Für alle Raumcurven dritter Ordnung hat das Doppelverhältniss der Eckpunkte (Ebenen) eines Tetraeders U gegen irgend eine ihrer Tangenten den unveränderlichen Werth 4 **).

Neben dem Tetraeder U werden wir noch eine andere covariante Figur betrachten, nämlich das Hyperboloid, dessen Gerade dem Complexe (αx) angehören und zwei Tangenten der Curve schneiden. Solche Hyperboloide H haben ebenfalls zu allen Tangenten eine unveränderliche Beziehung. Ueberhaupt muss jede Figur, welche zu zwei Tangenten covariant ist in dem Sinne, dass bei allen ∞^3 Transformationen der Curve in sich selbst ihre wesentlichen Beziehungen zu derselben erhalten bleiben, zu allen Tangenten der R_3 in einer unveränderlichen Beziehung stehen, weil die projectivische Anordnung im binären Gebiet erst durch 3 Elementenpaare völlig bestimmt ist.

Aus den Gleichungen (6) hat man endlich noch für irgend zwei Tangenten mit den Parametern λ_1, λ_2:

$$(11) \qquad \varrho_1\,\varrho_2(x y) = (a e)\,(\lambda_1 - \lambda_2)^4,$$

nach welcher Gleichung das *Moment der Tangenten x, y der vierten Potenz der Parameterdifferenz proportional ist.*

---

*) Schreibt man diese Gleichungen in der Form:

$$(a x) + \lambda(b x) = 0, \quad (b x) + \lambda(c x) = 0, \quad (c x) + \lambda(d x) = 0, \quad (d x) + \lambda(e x) = 0,$$

so vermitteln sie eine *Erzeugung der Curve durch vier projectivische Büschel linearer Complexe* — ein Analogon der bekannten Erzeugung derselben durch 3 projectivische Ebenenbüschel.

**) Das Befremdende, welches in dem Auftreten eines bestimmten Zahlenwerthes liegt, verliert dieser Satz durch die einfache Bemerkung, *dass alle R_3 unter sich collinear verwandt sind.*

4) In den folgenden Betrachtungen werden wir uns vorzugsweise mit einem *Tangentenquadrupel der R_3* beschäftigen. Es mögen daher kurz die Beziehungen zwischen vier Geraden überhaupt erwähnt werden*).

Irgend vier Gerade x, y, z, w haben zwei gemeinsame Treffgeraden, die Axen der beiden speciellen Complexe des Büschels linearer Complexe, dem die Geraden angehören. *Das Doppelverhältniss k der vier Schnittpunkte auf beiden Geraden* (zugleich das der Ebenen, welche jenen dual entsprechen) ist bestimmt durch die quadratische Gleichung:

$$k^2(xy)(zw) - k[(xz)(yw) - (yz)(xw) + (xy)(zw)] + (xz)(yw) = 0.$$

Sind insbesondere zwei zusammenfallende Treffgerade vorhanden, so ist jenes Doppelverhältniss seinem absoluten Werthe nach gegeben durch:

$$(12) \qquad k = \sqrt{\frac{(xz)(yw)}{(xy)(zw)}} \text{ **)}.$$

Die beiden Treffgeraden sind aber conjugirte Gerade in Bezug auf jeden Complex des genannten Büschels, sie werden daher zusammenfallen, wenn sie irgend einem derselben angehören.

5) Diese Betrachtungen führen zunächst zu einer *geometrischen Deutung des Doppelverhältnisses von vier Parametern $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von Curventangenten.*

Den vier Parametern entsprechen vier Tangenten und deren Schmiegungsebenen. Die Hauptstrahlen in denselben haben die Coordinaten:

$$a_i + 3b_i\lambda_\nu + 3c_i\lambda_\nu^2 + d_i\lambda_\nu^3 + \mu_\nu[b_i + 3c_i\lambda_\nu + 3d_i\lambda_\nu^2 + e_i\lambda_\nu^3],$$

wo μ_ν einen Parameter bedeutet. Eine Tangente der Curve (6) trifft die vier Büschel von Hauptstrahlen in vier Geraden, deren Coordinaten sich ergeben, wenn man $\mu_\nu = \lambda$ setzt. Jene Tangente ist aber die einzige Treffgerade der vier Geraden, da sie dem linearen Complexe (ax) angehört, zu dessen Geraden auch alle Hauptstrahlen gehören. Da nun das Moment zweier dieser Geraden dem Ausdrucke:

$$(\lambda_0 - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)$$

proportional ist, so hat man nach (12) für das Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte der beliebigen Tangente (6) mit den 4 Schmiegungsebenen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ den unveränderlichen Werth:

$$\sigma = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_2} : \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}.$$

*) Vgl. Math. Annalen Bd. VIII, S. 60.

**) Gelegentlich habe ich diesen Ausdruck überhaupt als Doppel- oder Momentenverhältniss von vier beliebigen Geraden x, y, z, w bezeichnet.

Dieser Ausdruck zeigt, *dass das Doppelverhältniss der Parameter zugleich das Doppelverhältniss der vier Curvenpunkte selbst ist,* in denen die zugehörigen Tangenten berühren; eine Bemerkung, welche unmittelbar gestattet, die binäre Formentheorie auf der Geraden in eine solche auf der R_3 zu übertragen*).

6) Eine jede Gerade z trifft vier Tangenten der Curve. Dieselben sind bestimmt durch die *biquadratische Gleichung*:

$$(az) + 4\lambda(bz) + 6(cz)\lambda^2 + 4(dz)\lambda^3 + (ez)\lambda^4 = 0. \tag{14}$$

Die vier zugehörigen Tangenten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gehören dem linearen Complexe (αx) an, ausserdem aber noch einem anderen, dessen Gleichung in sehr einfacher Weise der Geraden z zugeordnet ist, und in der Form:

$$(\alpha x)(\alpha z) - (ae)(zx) = 0 \tag{15}$$

geschrieben werden kann. Denn die zweite Treffgerade des Tangentenquadrupels hat als conjugirte Polare der z in Bezug auf (αx) die Coordinaten**):

$$(ae)z_i + 2(\alpha z)\alpha_i,$$

so dass ein zweiter Complex des zu den vier Tangenten gehörigen Büschels die mit (15) wesentlich übereinkommende Form hat:

$$(zx)(ae) + 2(\alpha z)(\alpha x) = 0 \text{ ***}).$$

Das Doppelverhältniss der Berührungspunkte der vier Tangenten ist das der Wurzeln der Gleichung (14) und werde durch σ bezeichnet. *Dagegen ist das Doppelverhältniss k der vier Punkte auf der schneidenden Geraden z (und ihrer Conjugirten) durch die quadratische Gleichung:*

$$k^2 - k[1 - (1-\sigma)^4 + \sigma^4] + \sigma^4 = 0 \tag{16}$$

gegeben; das Momentenverhältniss der vier Tangenten selbst ist gleich σ^2.

§ II.

Der Strahlencomplex der R_3.

1) Soll die Gleichung § 1. (14) zwei gleiche Wurzeln haben, so muss ihre Discriminante:

$$\Delta = i^3 - 6j^2$$

---

*) Die 4 Curvenpunkte werden im Folgenden ebenfalls durch die Buchstaben $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezeichnet werden. Uebrigens hat schon Herr Cremona gezeigt, dass bei der Darstellung der Curvenpunkte durch rationale Functionen dritten Grades das Parameterdoppelverhältniss gleich dem der Punkte ist, wie es auch unter gleichen Umständen bei den Kegelschnitten der Fall ist.

**) Vgl. Math. Annalen Bd. X, S. 183.

***) Das Büschel

$$(\alpha x) + \mu(zx) = 0$$

ist überhaupt covariant zu der Geraden z und daher wichtig bei der Betrachtung der biquadratischen Form (14).

verschwinden. Dabei ist:

$$i = 2\,[(az)\,(ez) - 4\,(bz)\,(dz) + 3\,(cz)^2]\,,$$

$$\tfrac{1}{6}\,j = \tfrac{1}{2}\,i(cz) + 6\,(bz)\,(cz)\,(dz) - 4\,(cz)^3 - (az)\,(dz)^2 - (ez)\,(bz)^2.$$

Nach § I. (10) *ist also für alle Geraden des Raumes das Quadrat des linearen Ausdruckes* (αz) *gleich* i:

$$i = (\alpha z)^2. \tag{1}$$

Man hat demnach den Satz:

Alle Geraden des linearen Complexes, dem die R_3 *angehört, werden von den Tangenten derselben in Punkten eines äquianharmonischen Verhältnisses getroffen, welches zugleich das Doppelverhältniss der Berührungspunkte der Tangenten ist*).*

Zufolge der Gleichung (1) hat man:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta &= f_1 f_2\,, \\ f_1 &= (\alpha z)^3 - \sqrt{6}\,j\,, \\ f_2 &= (\alpha z)^3 + \sqrt{6}\,j\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ *stellen zwei specielle Complexe dritten Grades vor; die Geraden des einen sind die Strahlen der Curve, die des anderen die Tangenten ihrer Developpabelen.*

Bekanntlich stellt die Gleichung:

$$i^3 - kj^2 = 0$$

die Bedingung vor, unter der das Doppelverhältniss der Wurzeln der Gleichung § I. (14) einen Werth σ hat, der aus der Gleichung:

$$k = \frac{24\,(1 - \sigma + \sigma^2)^2}{(1 - \sigma)^2\,(2 - \sigma)^2\,(1 - 2\sigma)^2}$$

zu entnehmen ist. Aber auch diese Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen dritten Grades:

$$(\alpha z)^3 + \sqrt{k}\,j = 0\,, \quad (\alpha z)^3 - \sqrt{k}\,j = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

Die beiden Complexe $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ sind sich in der Weise zugeordnet, dass die Geraden des einen conjugirte Polaren in Bezug auf den Complex (αx) zu den Geraden des anderen sind. Trifft eine Gerade des einen vier Tangenten im bestimmten Schnittpunktsverhältnisse k, so bildet die entsprechende Gerade mit den nämlichen vier Tangenten vier Ebenen desselben Verhältnisses k. Dies giebt den Satz:

Die Geraden, welche von vier Tangenten der Curve in Punkten eines unveränderlichen Doppelverhältnisses getroffen werden, gehören einem Complexe dritten Grades an. Man kann denselben auch so aus-

*) In der That nimmt auch k in § I. (16) den Werth einer dritten Einheitswurzel an, wenn dies mit σ der Fall ist.

drücken, dass er sich auf die Constanz des Momentenverhältnisses von vier Tangenten oder des Doppelverhältnisses ihrer Berührungspunkte bezieht.

Insbesondere ergeben sich hieraus leicht die folgenden Sätze über ebene Curven vierter Ordnung mit drei Spitzen (Hypocykloiden). Denn der Schnitt einer Ebene mit der Developpabelen der R_3 ist eine solche Hypocykloide, deren drei Spitzentangenten sich in dem Mittelpunkte des Strahlbüschels in jener Ebene treffen, welches dem Complexe (αx) angehört, dem Centrum der Curve.

Alle Geraden durch das Centrum der Curven vierter Ordnung mit drei Spitzen treffen dieselbe äquianharmonisch. Dagegen umhüllen die Geraden, welche die Curve überhaupt in constantem Doppelverhältniss schneiden, eine Curve dritter Classe.

2) Wir betrachten ferner eines der Hyperboloide H, etwa dasjenige, welches zu zwei Tangenten x, y mit den Parametern μ_0, μ_1 covariant ist. Alle Geraden der anderen Erzeugung derselben sind Gerade des Complexes $(\alpha x) = 0$ und werden von den Tangenten äquianharmonisch getroffen. Dagegen sind die Geraden derjenigen Erzeugung, zu der jene beiden Tangenten selbst gehören, in der rationalen Form:

$$z_i = x_i + \sqrt{2}\,(\mu_0 - \mu_1)^2 \varrho\, \alpha_i + \varrho^2 y_i$$

mit dem Parameter ϱ darstellbar, und die Gleichung vierten Grades § I. (14) wird dann:

$$(\lambda - \mu_0)^4 + \varrho^2 (\lambda - \mu_1)^4 = 0.$$

Da für dieselbe $j = 0$ ist, so hat man:

Der Complex der Geraden, welche harmonische Punktsysteme auf der R_3 durch die vier Tangenten bestimmen, von denen sie getroffen werden, besteht aus den Erzeugenden der zweifach unendlichen Schaar von Hyperboloiden H.

3) Man kann dem Complexe $j = 0$ noch eine andere geometrische Bedeutung unterlegen, deren Ursprung auf einer allgemeineren Interpretation von Formen n. Grades an rationalen Curven beruht.

Einer Raumcurve, deren Tangentensystem überhaupt durch Gleichungen von der Form § I. (1) mit zwei homogenen Parametern λ, μ gegeben ist,

$$\varrho x_i = f_i(\lambda \mu),$$

kann man ein Büschel von rationalen Linienflächen $n-1$. Ordnung

$$\varrho y_i = \mu_1 \frac{\partial f_i}{\partial \mu} + \lambda_1 \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \tag{3}$$

zuordnen, welche die gegebene Curve zur Haupttangentencurve haben*). Jede dieser Flächen besitzt eine ausgezeichnete singuläre Erzeugende,

---

*) Math. Annalen Bd. VIII, S. 117.

(es ist die Tangente $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$), sie heisse die *Polarfläche* derselben. Schneidet man gleichzeitig das Tangentensystem der Curve und die Erzeugenden der Polarfläche durch eine Gerade z, so hat man die Gleichungen:

$$(zf) = 0\,, \qquad \mu_1\left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\, z\right) + \lambda_1\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\, z\right) = 0\,,$$

von denen die zweite die erste Polare der ersteren in Bezug auf das Element $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$ ist. Ferner wird jede Gerade des Raumes $2(n-2)$ Polarflächen berühren; den Berührungspunkten entspricht die Hesse'sche Covariante von $(zf) = 0$. Ebenso bilden die ∞^3 Haupttangenten und Doppeltangenten der Polarflächen Complexe, deren Gleichungen durch die beiden Invarianten ausgedrückt werden, deren Verschwinden anzeigt, dass erste Polaren mit einem dreifachen oder zwei doppelten Verschwindungslementen für eine Form vorhanden sind, u. s. w.

Für die Raumcurve R_3 finden diese Betrachtungen ohne Weiteres Anwendung auf die Berührungspunkte zugehöriger Tangenten. Die Polarfläche einer Tangente wird von den Geraden des Complexes (ax) gebildet, welche die Curve und jene Tangente treffen; sie ist eine Cayley'sche Linienfläche dritter Ordnung, deren Axe jene Tangente ist. Um also für die biquadratische Form λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 die erste Polare von λ zu construiren, durchschneide man die Cayley'sche Fläche zu der Tangente λ mit einer der Treffgeraden der vier Tangenten, die drei von derselben getroffenen Erzeugenden bestimmen auf der Curve die gesuchten Punkte. In ähnlicher Weise erhält man die Hesse'sche Form des Quadrupels vermöge der vier Cayley'schen Flächen, welche die (beiden) Treffgeraden berühren; die vier Erzeugenden, an denen die Berührung stattfindet, treffen die Curve in Punkten der Hesse'schen Form zu λ_0, λ_1, λ_2, λ_3.

Endlich bilden die Haupttangenten sämmtlicher Cayley'scher Flächen den Complex $j = 0$. *Jede Haupttangente der Polarflächen wird von vier Curventangenten so getroffen, dass das Doppelverhältniss der Berührungspunkte harmonisch ist*)*.

4) Wir betrachten endlich das *Sehnensystem der R_3*. Ein linearer Complex mit den Coefficienten z_i kann so beschaffen sein, dass zwei seiner Strahlbüschel zugleich Büschel von Hauptstrahlen der Curve sind. Die Coefficienten z_i sind dann gegeben durch die Gleichungen:

$$(4)\quad \varrho z_i = a_i - 2b_i(\mu+\nu) + c_i[(\mu+\nu)^2 + 2\mu\nu] - 2d_i\mu\nu(\mu+\nu) + e_i\mu^2\nu^2 + \alpha_i\lambda$$

mit drei nicht homogenen Parametern λ, μ, ν.

---

*) Die Geraden des Complexes $j = 0$ lassen sich also in ∞^2 Tangentensysteme von R_3 zusammenfassen.

Es giebt also ∞^3 solcher Complexe. Unter ihnen befinden sich ∞^2 specielle, deren Axen die Sehnen der Curve (resp. Doppeltangenten der Developpabelen) darstellen. Sie entstehen aus (4), wenn man setzt:

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(\mu - \nu)^2.$$

Um die Sehnen in irgend einer Weise zu einem *Hyperboloid* zusammenzufassen, setze man zwischen den Parametern μ, ν die Gleichung fest:

(5) $$\alpha(\mu\nu) + \beta(\mu + \nu) + \gamma = 0.$$

Man erhält so ∞^2 Sehnenhyperboloide. Die Form der Gleichung (5) zeigt, dass die Erzeugenden dieser Hyperboloide die Curve in Punkten einer Involution treffen, welche bestimmt ist, sowie zwei Paare entsprechender Werthe μ_1, ν_1; μ_2, ν_2, d. h. irgend zwei Sehnen gegeben sind.

Man betrachte nun μ, ν als Parameter der Punkte eines Kegelschnittes. Die Erzeugenden eines Sehnenhyperboloides bilden sich dann ab als die Geraden des Büschels, welches zu den Geraden gehört, welche die Punkte μ_1, ν_1; μ_2, ν_2 des Kegelschnittes verbinden. Ebenso vermitteln die Geradenpaare μ_1, ν_2; μ_2, ν_1, sowie μ_1, μ_2; ν_1, ν_2 zwei andere Hyperboloide. Betrachtet man die vier Punkte μ_1, ν_1, μ_2, ν_2 als eine biquadratische Form auf dem Kegelschnitte, so wird die Covariante sechsten Grades T bekanntlich gebildet durch die Berührungspunkte der Tangenten, welche von den Durchschnittspunkten der Gegenseiten des vollständigen Vierseits μ_1, ν_1, μ_2, ν_2 auslaufen*). Da diese Punkte ein harmonisches Polardreieck in Bezug auf den Kegelschnitt bilden, so gehen die Verbindungslinien der Punkte von T durch je zwei derselben. Ueberträgt man diese Verhältnisse auf die R_3, so hat man folgenden Satz:

Je vier Punkte λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 auf der R_3 bestimmen drei Sehnenhyperboloide H_1, H_2, H_3 durch die Paare der Gegenkanten des Tetraeders λ_0, λ_1, λ_2, λ_3. *Jene drei Hyperboloide schneiden durch ihre Erzeugenden* ∞^1 *analoge Tetraeder auf der Curve aus, deren Ecken das covariante Büschel von Formen vierter Ordnung zur gegebenen Form* λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 *bilden. Und die drei Paare von je zwei Punkten, in denen je eine der Erzeugenden von* H_1, H_2, H_3 *zur Curventangente wird, bilden die Covariante* T.

Die allgemeinere projectivische Beziehung

$$\alpha\mu\nu + \beta\mu + \gamma\nu + \delta = 0$$

vermittelt dagegen Linienflächen vierter Ordnung, für welche die R_3 Doppelcurve ist; diese Flächen sind nicht die allgemeinsten dieser Art, da nur zwei ihrer Erzeugenden von der Doppelcurve berührt werden,

---

*) Vgl. Salmon, Algebra, § 216.

sie sind dadurch ausgezeichnet, dass je vier Erzeugende derselben die Doppelcurve in zwei Gruppen von vier Punkten gleichen Doppelverhältnisses treffen. Die allgemeinsten Linienflächen vierten Grades, für welche die R_3 Doppelcurve ist, entstehen, wenn man aus der Sehnenschaar diejenigen Sehnen auswählt, welche einem linearen Complex angehören, d. h. wenn man den Gleichungen (4) die lineare Gleichung $(kz) = 0$ zufügt.

§ III.

Ueber eine Zuordnung der Geraden des Raumes in Bezug auf die speciellen Complexe f_1, f_2.

1) Bei einer anderen Gelegenheit wurde bereits gezeigt, dass in Bezug auf einen speciellen Complex zweiten Grades die zugeordnete Gerade einer Geraden deren conjugirte Polare in Bezug auf die von den Geraden des Complexes umhüllte Fläche zweiten Grades ist*). Wir untersuchen hier die Art der Zuordnung, welche der specielle Complex dritten Grades begründet.

Dabei genügt die Betrachtung einer der Formen f_1 oder f_2, da beide sich dual entsprechen; wir nehmen an, dass:

$$f = f_1 = \alpha^3 - \sqrt{6}\, j = 0$$

etwa die Strahlen der R_3 darstelle.

Vor allem ist die Gleichung $A\lambda - B = 0$ zu bilden. Dazu entwickeln wir die folgenden Identitäten.

Man findet zunächst:

$$(1) \qquad \frac{1}{36} \sum \left(\frac{\partial j}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{i^2}{4}\,(cc)\,,$$

d. h.: der Complex j hat zu singulären Geraden die Hauptstrahlen der Curve. Ferner ist:

$$(2) \qquad \sum \left(\alpha_k \frac{\partial j}{\partial x_k}\right) = 0, \qquad \sum \left(\alpha_k \frac{\partial i}{\partial x_k}\right) = 0\,,$$

Wird weiter $(\alpha e) = -(\alpha\alpha) = m$ gesetzt, so ist:

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 3\,\alpha_x^2\,\alpha_i - \sqrt{6}\,\frac{\partial j}{\partial x_k}\,,$$

$$(4) \qquad \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = MX, \qquad M = 9m^2\,[2(\alpha x)^2 + mX].$$

Es ist demnach f in der Normalform gegeben. Bezeichnet man ferner die Werthe der ersten Differentialquotienten für das Argument $x_k + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}$ mit $\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_\lambda$, so ist nach dem Taylor'schen Satze unter Benutzung der Identität (4):

*) Math. Annalen Bd. X, S. 166.

$$(5)\quad \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_\lambda = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda\left[x_i M + \frac{1}{2} X \frac{\partial M}{\partial x_i}\right] + \frac{\lambda^2}{2}\left[-M\frac{\partial f}{\partial x_i} + 3f\frac{\partial M}{\partial x_i}\right.$$
$$\left. + x_i \sum \frac{\partial M}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_l} + \frac{X}{2}\left\{\sum \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_l} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l}\frac{\partial M}{\partial x_l}\right\}\right].$$

Da ferner:

$$(6)\qquad \sum \frac{\partial M}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_l} = 9 m^3 [6f - 12(\alpha x)^3],$$

so ist für alle Geraden des Complexes selbst:

$$(7)\qquad \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_\lambda = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}M\right) + x_i\left(\lambda M - 54\, m^3 \lambda^2 (\alpha x)^3\right).$$

Hieraus hat man:

$$(8)\qquad \begin{cases} A = 18 m^2 \lambda (\alpha x)^2 [1 - 3\lambda m(\alpha x)], \\ B = [1 + 3\lambda m(\alpha x)]\,[1 - 3\lambda m(\alpha x)]. \end{cases}$$

Setzt man noch zur Abkürzung $3\lambda m(\alpha x) = z$, so ist die Gleichung dritten Grades:

$$(9)\qquad \lambda A - B = (1 - z)^2 (1 - 2z) = 0.$$

Sie hat die Doppelwurzel $z = 1$, die einfache $z = \frac{1}{2}$, und man kann dann leicht constatiren, dass:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_{\lambda = \frac{1}{3m(\alpha x)}} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_{\lambda = \frac{1}{6m(\alpha x)}} = \varrho x_i,$$

d. h. dass die Differentialquotienten von f für die Coordinaten einer Tangente der Curve verschwinden, für die einer Sehne dagegen der letzteren selbst proportional sind. Da das Doppelverhältniss der Curventangente zur Sehne in dem Büschel aus x und dem zugeordneten Strahle $\frac{\partial f}{\partial x}$ den Werth 2 hat, so liegen jene vier Geraden harmonisch und man hat den Satz:

Die zugeordnete Gerade zu einem beliebigen Strahle x, welcher der Curve in einem Punkte begegnet, dessen Tangente t ist, ist die vierte harmonische zu x und t und der in der Ebene von x und t gelegenen Sehne der Curve.

2) Man kann hieraus leicht eine Construction der einer beliebigen Geraden des Raumes 2 zugeordneten ζ ableiten. Da die Gleichung:

$$(10)\qquad \zeta_i = \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

die ζ_i als quadratische Functionen der z_i bestimmt, so entspricht einem Büschel von Geraden z_i ein Hyperboloid von Geraden ζ. Das Doppelverhältniss von vier Geraden des Büschels ist demnach gleich dem der entsprechenden Erzeugenden, die Transformation (10) hat in gewissem Sinne die Eigenschaft, die Doppelverhältnissbeziehungen ungeändert zu

lassen, wie dies überhaupt bei jeder Transformation der Fall sein wird, welche an Stelle der Liniencoordinaten quadratische Functionen derselben setzt*).

Setzt man statt z_i $y_i + \lambda z_i$, so ist:

$$(11) \qquad \zeta_i = \frac{\partial f}{\partial y_i} + 2\lambda \sum z_k \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} + \lambda^2 \sum z_k z_l \frac{\partial^3 f}{\partial y_i \partial y_k \partial y_l}.$$

Ist daher y_i eine Tangente der R_3, so verschwinden nach (9) die $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ und dem Büschel der Geraden $y_i + \lambda z_i$ entspricht wieder ein Büschel von Geraden ζ.

Allen Geradenbüscheln, in denen sich eine Tangente der R_3 befindet, ordnet demnach die Gleichung (10) *wieder lineare Büschel zu.*

Um nun die zugeordnete Gerade von z zu construiren, kann man demnach folgendermassen verfahren. Man bestimme die vier Tangenten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, welche z in den Punkten a_0, a_1, a_2, a_3 treffen. Ist nun etwa b_0 der Schnittpunkt der Ebene $\lambda_0 z$ mit der Curve, so suche man die zugehörige Gerade zu dem Strahle $a_0 b_0$. Diese trifft die Schmiegungsebene von λ_0 in einem Punkte α_0, dem Centrum des dem Büschel $\lambda_0 z$ zugeordneten Büschels. Die Wiederholung dieser Construction an den Punkten a_1, a_2, a_3 liefert drei weitere Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. *Alle diese Punkte α liegen in einer Geraden, nämlich in der zugeordneten ζ.*

Auf demselben Wege kann man die zugeordnete Gerade ζ' der zweiten Treffgeraden z' des Systems $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ erhalten. *Die Geraden ζ, ζ' werden von demselben Tangentensystem $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ geschnitten und liegen mit z, z' auf einem Hyperboloide.* Es mag noch hinzugefügt werden, *dass, wenn man an Stelle des sich auf die Curve beziehenden Complexes den der Developpabelen zu Grunde legt, sich durch die dualistische Construction dieselben beiden Geraden ζ, ζ' ergeben, nur so, dass jetzt der z die ζ' zugeordnet ist und umgekehrt.*

Die Gleichung (5) liefert für die Coordinaten der Geraden, welche wiederum der ζ zugeordnet ist:

$$\mathfrak{z}_i = \left[\frac{\partial f}{\partial z_i}\right]_{\lambda=\infty} = -\frac{\partial f}{\partial z_i} M + 3f \frac{\partial M}{\partial z_i} + z_i \sum \frac{\partial M}{\partial z_l} \frac{\partial f}{\partial z_l}.$$

Daher ist im Allgemeinen die Zuordnung z, ζ keine gegenseitige. Dies tritt, von dem speciellen Falle der Sehnen abgesehen, welche sich selbst zugeordnet sind, nur dann ein, wenn $(\alpha z) = 0$, d. h. wenn z dem linearen Complexe der Raumcurve angehört.

Alle Geraden des Complexes $(\alpha x) = 0$ sind sich daher eindeutig

*) Insbesondere gilt dies also auch von der Transformation, welche Herr Lie in seiner Arbeit: „Partielle Differentialgleichungen und Complexe", Math. Annalen Bd. V, p. 164, betrachtet hat.

umkehrbar zugeordnet in Bezug auf den Complex $j = 0$. Die Eindeutigkeit der Beziehung hört nur auf für die Hauptstrahlen der Curve; jedem derselben ist die zugehörige Curventangente zugeordnet, während letzterer umgekehrt *alle* Hauptstrahlen entsprechen. Man hat also gewissermassen eine *Cremona'sche Transformation des Complexes* $(\alpha x) = 0$ *in sich selbst, bei welcher die Hauptstrahlen einer* R_3 *als fundamentale Congruenz auftreten.* Es ist freilich leicht, beliebig viele solcher Transformationen anzugeben, wenn man den linearen Complex zuerst auf die Punkte des gewöhnlichen Raumes abbildet und in letzterem eine eindeutige Transformation ausführt.

Wir erwähnen noch die Construction der zugeordneten Geraden, wenn z dem Complexe $(\alpha x) = 0$ angehört. Die Gerade $a_0 b_0$ ist dann ein Hauptstrahl der Curve, dem die Tangente von b_0 zugeordnet ist, und der Punkt α_0 ist die vierte Ecke des Tetraeders U, welches zu den Punkten λ_0, b_0 gehört. Diese Construction lässt ohne Weiteres den eindeutig umkehrbaren Charakter der Zuordnung erkennen.

Dass die vier mehrfach erwähnten Punkte α_0, α_1, α_2, α_3 in einer Geraden liegen, ist ein an und für sich bemerkenswerther geometrischer Satz, den man in mehreren Formen aussprechen kann. Indem man andere Constructionen für die zugeordnete Gerade aufsucht, erhält man eine grosse Zahl von Theoremen über die R_3. Von diesen mag nur ein einziges erwähnt werden: Legt man durch eine Gerade z des Complexes $(\alpha x) = 0$ eine Ebene, so liegen in derselben drei Hauptstrahlen der R_3, welche sich in einem Punkte der z schneiden. Die zugehörigen Tangenten bestimmen ein Hyperboloid, *und die* ∞^1 *Hyperboloide, welche den Ebenen des Ebenenbüschels um* z *entsprechen, haben sämmtlich eine Erzeugende gemeinsam, nämlich die zugeordnete* ζ *von* z.

3) Ein besonderes Interesse erlangt endlich die Zuordnung der Geraden z, ζ durch den folgenden Satz: *Wird eine beliebige Gerade* z *von vier Tangenten* λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 *der* R_3 *getroffen, so wird die zugeordnete* ζ *von vier Tangenten* μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 *geschnitten, deren Berührungspunkte die Hesse'sche Covariante zu denen der vier ersten Tangenten bilden.*

Denn die vier Wurzeln λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 bestimmen sich aus der biquadratischen Gleichung:

$$(12) \qquad (az) + 4(bz)\lambda + 6(cz)\lambda^2 + 4(dz)\lambda^3 + (ez)\lambda^4 = 0.$$

Da nun:

$$\zeta_i = 3(\alpha z)^2 \alpha_i \pm \sqrt{6}\,\frac{\partial j}{\partial z_i},$$

so hat man:

$$(a\zeta) \equiv (az)(cz) - (bz)^2,$$

$$(b\zeta) \equiv \tfrac{1}{2}\left\{(az)(dz) - (bz)(ez\right\},$$

$$(c\zeta) \equiv \tfrac{1}{6}\left\{2(bz)(dz) + (az)(ez) - 3(cz)^2\right\},$$

$$(d\zeta) \equiv \tfrac{1}{2}\left\{(cz)(bz) - (dz)(bz)\right\},$$
$$(e\zeta) \equiv (ez)(cz) - (dz)^2.$$

Demnach bestimmt die Gleichung:

$$(13) \qquad (a\zeta) + 4(b\zeta)\mu + 6(c\zeta)\mu^2 + 4(d\zeta)\mu^3 + (e\zeta)\mu^4 = 0$$

die Hesse'sche Form von (12). Die vorigen Betrachtungen enthalten zugleich die Lösung der Aufgabe: Auf einer Raumcurve dritter Ordnung zu vier gegebenen Punkten die Punkte der Hesse'schen Covariante zu construiren.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, hiernach die folgenden geometrischen Sätze algebraisch zu interpretiren.

1) Die Zuordnung z, ζ ist reciprok, wenn z dem linearen Complexe (αx) angehört. Das heisst: die Hesse'sche Form der Hesse'schen Form ist wieder die ursprüngliche Form, wenn für die letztere die Invariante i verschwindet.

2) Die zugeordnete ζ eines Strahles der Curve ist wieder ein Strahl derselben, der von dem nämlichen Punkte ausläuft. Hat demnach die Form (12) eine Doppelwurzel, so ist dieselbe auch Doppelwurzel für ihre Hesse'sche Form.

3) Die Zugeordnete einer Sehne der Curve ist die Sehne selbst. Die Hesse'sche Form ist von der Originalform nur um einen constanten Factor verschieden, wenn letztere zwei Doppelwurzeln besitzt.

4) Weiter ergiebt sich unmittelbar: Die Hesse'sche Form einer Form mit dreifachem Wurzelfactor ist vierte Potenz desselben Wurzelfactors; sie verschwindet identisch, wenn die Form einen vierfachen Factor hat.

Wir betrachten noch das *Hyperboloid der Geraden* z, z', ζ, ζ'. Alle Geraden der anderen Erzeugung desselben werden von den Tangenten der Curve äquianharmonisch getroffen, weil sie dem Complexe (αx) angehören. *Die Erzeugenden der nämlichen Schaar dagegen werden von Tangenten der Curve getroffen, deren Berührpunkte die covariante Schaar* $f + kH = 0$ *bilden.* Unter diesen Erzeugenden finden sich drei Sehnen der Curve, welche, wie eine sehr einfache Rechnung zeigt, durch die drei Wurzeln der cubischen Resolvente:

$$\frac{i}{2}\lambda^2 - \frac{j}{3}\lambda^3 - 1 = 0$$

bestimmt sind, und die sechs Curvenpunkte auf diesen drei Sehnen bilden wieder die Form T.

Darmstadt, im November 1877.

Neuer Beweis eines Fundamentaltheorems aus der Theorie der Substitutionslehre.

Von

E. Netto in Berlin.

So einfach der Lagrange'sche Fundamentalsatz der Substitutionstheorie: *„dass die Ordnung einer Gruppe durch die Ordnung jeder in ihr enthaltenen Gruppe theilbar sei"* in seinem Beweise sich stellt, so versteckt liegt der Beweis für die durch Cauchy gegebene Umkehrung: *„dass wenn die Ordnung einer Gruppe durch eine Primzahl theilbar ist, die Gruppe eine Substitution jener Primzahlordnung enthalte."* Er stützt sich auf zwei Hülfssätze, von denen der eine die Beziehung zwischen zwei Gruppen untersucht, welche keine ähnlichen Substitutionen enthalten, während der zweite *die Existenz einer Gruppe der Ordnung p^f und des Grades n darlegt, wo p^f die höchste $n!$ theilende Potenz der Primzahl p ist.* In glücklicher Weise hat Herr Sylow*) den Cauchy'schen Satz dahin erweitert: *„dass wenn die Ordnung einer Gruppe durch eine Primzahlpotenz theilbar ist, die Gruppe eine andere von der Ordnung jener Primzahlpotenz enthalte."* Sein Beweis stützt sich auf den des Cauchy'schen Satzes; es schien daher wünschenswerth eine davon unabhängige und wenn möglich einfachere Darlegung dieses allgemeinen Theorems zu geben. Das soll im Folgenden geschehen. Der Beweis beruht allein auf dem zweiten oben angeführten Cauchy'schen Lemma, dessen Ableitung der Kürze halber übergangen ist. Es findet sich dieselbe z. B. in dem Traité des Substitutions etc. §. 41 des Herrn C. Jordan. —

Enthält die Gruppe G des Grades n und der Ordnung k eine andere Gruppe der Ordnung p^ω, so kann man diese so gewählt denken, dass in G keine andere Gruppe eines Grades p^β vorhanden ist, wo $\beta > \omega$ wäre. φ sei nun eine Function der n Elemente $x_1, \cdots x_n$, welche für alle Substitutionen von G und nur für diese ungeändert bleibt; dann wird für alle möglichen Substitutionen der Grössen x die Function φ im Ganzen $\frac{n!}{k}$ verschiedene Werthe $\varphi_1, \varphi_{s_1}, \varphi_{s_2}, \cdots$ an-

*) Siehe diese Zeitschrift. Bd. V, S. 584—594.

nehmen, wo φ_{s_1} aus φ durch Anwendung der Substitution s_1 entstanden sein möge. — Ist nun p^f die höchste Potenz von p, welche $n!$ theilt, so kann man eine Gruppe H der n Grössen x von der Ordnung p^f aufstellen. ψ sei eine nur für die Gruppe H unveränderliche Function; unter den möglichen Werthen von φ und ψ seien φ_1 und ψ_1 so gewählt, dass die Ordnung p^α der Gruppe Γ_1, welche diese beiden Functionen ungeändert lässt, möglichst gross ist.

Sind ferner a und b unbestimmte Constanten, so wird $a\varphi_1 + b\psi_1$ für die Substitutionen der x unter sich $\frac{n!}{p^\alpha}$ verschiedene Werthe annehmen, da es nur für die p^α Substitutionen von Γ_1, welche den Gruppen G_1 und H_1 gleichzeitig angehören, ungeändert bleibt. Giebt es nun unter den $\frac{n!}{k}\cdot\frac{n!}{p^f}$ möglichen Werthen $a\varphi_\lambda + b\psi_\mu$ $\left(\lambda = 1 \cdots \frac{n!}{k};\right.$ $\left.\mu = 1 \cdots \frac{n!}{p^f}\right)$ andere von den aus $a\varphi_1 + b\psi_1$ erlangten verschiedene, z. B. $a\varphi_{s_1} + b\psi_{s_2}$, so kommt unter denselben auch $a\varphi_{s_1, s_1^{-1}} + b\psi_{s_2, s_1^{-1}} = a\varphi_1 + b\psi_t$ nicht vor. Diese Function $a\varphi_1 + b\psi_t$ giebt für die Substitutionen der x $\frac{n!}{p^\beta}$ Werthe, wenn die Ordnung der Gruppe, welche φ_1 und ψ_t gemeinsam ungeändert lässt, p^β ist. Der Annahme nach ist $\beta \leq \alpha$. Giebt es ausser diesen $\frac{n!}{p^\alpha} + \frac{n!}{p^\beta}$ Ausdrücken noch andere $a\varphi_\lambda + b\psi_\mu$, so kann man in gleicher Weise fortfahren und erhält, da sich offenbar keiner der Ausdrücke wiederholen kann,

$$\frac{n!}{k}\cdot\frac{n!}{p^f} = \frac{n!}{p^\alpha} + \frac{n!}{p^\beta} + \cdots = \frac{n!}{p^\alpha}\cdot s,$$

wo s eine ganze Zahl ist, da $p^\alpha \geq p^\beta,\ p^\gamma, \cdots$ sein muss. Diese Gleichung ergiebt aber

$$p^\alpha \cdot n! = p^f \cdot k \cdot s.$$

Die höchste Potenz von p, die links vorkommt, ist $p^{\alpha+f}$, k kann daher höchstens durch p^α theilbar sein. Andrerseits muss k nach dem Lagrange'schen Satze mindestens durch p^α theilbar sein; daraus folgt, dass $k = p^\alpha \cdot \varkappa$ ist, wo $\varkappa$ zu p relativ prim ist. Folglich ist $\alpha = \omega$; was zu beweisen war.

Die weiteren von Herrn Sylow (l. c.) gezogenen Schlüsse über die Ordnung k von G ergeben sich unmittelbar in derselben Weise wie dort, nur mit der Vereinfachung, dass wir bereits wissen, $\varkappa$ habe keinen Factor p.

Berlin, 22. November 1877.

Notiz über Convergenz von Integralen mit nicht verschwindendem Argument.

Von

P. du Bois-Reymond in Tübingen.

Zwischen Reihenconvergenz und Convergenz von Integralen besteht der auffallende wenn auch unwesentliche Unterschied, dass das Glied einer convergenten Reihe schliesslich verschwinden muss, während ein Integral $\int^{\infty} d\alpha f(\alpha)$ convergent sein kann, ohne dass $f(\infty)$ Null ist.*) Lejeune-Dirichlet machte hierauf aufmerksam, und führte als Beispiele die Integrale

$$\int_0^{\infty} d\alpha \sin(\alpha)^2, \quad \int_0^{\infty} d\alpha \cos(\alpha)^2$$

an.**) Später wurde von Riemann***) ein Beispiel dafür gegeben, dass $f(\alpha)$ im Unendlichen sogar unendliche Werthe zulassen kann, ohne die Convergenz des Integrals auszuschliessen. Sein Beispiel lautet:

$$\int_0^{a} d\alpha \left(\cos e^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}} \sin e^{\frac{1}{\alpha}} \right) = \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} \frac{d\beta}{\beta^2} (\cos e^{\beta} + \beta e^{\beta} \sin e^{\beta}) = \Big|_0^a \alpha \cos e^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beide Beispiele sind aber Integrale, deren Convergenz nur durch die Zeichenwechsel der Function zu Stande kommt, wie dies beim zweiten u. A. offenbar wird, wenn man die Substitution $\alpha \log \gamma = 1$ einführt, durch die es in dies Integral

---

*) Auffallend ist dieser Unterschied nur, so lange man irrthümlicherweise das Glied u_p der Reihe $\sum^{\infty} u_p$ mit der Function $f(x)$ im Integral $\int^{\infty} d\alpha f(\alpha)$ vergleicht. Mit dem Gliede u_p sind nur Ausschnitte des Integrals wie $\int_p^{p+1} d\alpha f(\alpha)$ für ins Unendliche zunehmende ganzzahlige p zu vergleichen. Solche Ausschnitte müssen aber, falls das Integral convergiren soll, ebenso gut verschwinden, wie das Glied u_p der convergenten Reihe.

**) Crelle's Journ. Bd. 17, pag. 60, Anm.

***) Riemanns gesammelte Schriften, pag. 230.

$$\int_{\log\frac{1}{a}}^{\infty} d\gamma \left(\frac{\cos\gamma}{\gamma\log^2\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\log\gamma}\right)$$

übergeht, dessen zweiter Theil bedingt convergent ist.

Gleichwohl ist leicht einzusehen, dass die Function $f(\alpha)$ auch ohne Zeichenwechsel und bei unbedingter Convergenz des Integrals $\int^{\infty} d\alpha f(\alpha)$ nicht Null zu werden braucht. Es sei $f(\alpha)$ z. B. Null, ausser in den Intervallen $p - \delta_p \cdots p + \delta_p$, wo p die ganzen Zahlen, die δ_p gegen Null abnehmende Strecken vorstellen; in diesen Intervallen sei sie gleich h_p, so ist ihr Integral $\sum 2\delta_p h_p$. Hier kann man, unter Annahme der Convergenz der Reihe $\sum \delta_p h_p$, die h_p beliebig rasch wachsen und unendlich werden lassen, wenn die δ_p nur entsprechend abnehmen.

Theoretisch ist dies zwar sehr einleuchtend, dem Docenten pflegt es aber angenehm zu sein, für ein derartiges Verhalten übersichtliche Beispiele mit gewöhnlichen stetigen Functionen zur Verfügung zu haben. Leider ist ein Beispiel, das ich dafür gelegentlich angegeben, fehlerhaft*), und wird, berichtigt, ziemlich complicirt. Ich ziehe es daher vor, ein anderes übrigens viel einfacheres hier mitzutheilen.

Es lautet: *Das Integral*:

$$\int^{\infty} d\alpha\, \alpha e^{-\alpha^6 \sin^2\alpha}$$

ist convergent, während $\alpha e^{-\alpha^6\sin^2\alpha}$ *für positive* α *positiv ist und für ganzzahlige* $\frac{\alpha}{\pi}$ *den Werth* α *erhält, also mit* α *unendlich wird.*

Dies Integral ist ein besonderer Fall des allgemeineren Verhaltens:

Wenn, unter $\varphi(\alpha)$ *und* $\psi(\alpha)$ *Functionen gedacht, die mit* α *ohne Maxima unendlich werden, für hinreichend kleine Werthe von* a *das Integral:*

$$\int^{\infty} d\alpha \frac{\varphi(\alpha \pm a)}{\sqrt{\psi(\alpha)}}$$

convergirt, so convergirt auch das Integral:

$$\int^{\infty} d\alpha\, \varphi(\alpha) e^{-\psi(\alpha)\sin^2\alpha}.$$

Die vorstehende Bedingung ist erfüllt für $\varphi(\alpha) = \alpha^n$, $\psi(\alpha) = \alpha^{2n+4}$, und ergiebt das vorige Beispiel für $n = 1$.

*) Zeitschrift für Mathematik, herausgeg. von O. Schlömilch u. Cantor. Darauf, dass jenes Beispiel fehlerhaft sei, bin ich durch Herrn Thomä aufmerksam gemacht worden, welcher kürzlich ebenfalls ein schematisches Beispiel für die in Rede stehende Convergenzeigenthümlichkeit mitgetheilt hat. (Kleinere Mittheilungen in Schlömilch's Zeitschrift.)

Man beweist diesen Satz, auf den auch die Theorie der trigonometrischen Reihen führt, direct durch die gebräuchlichen Zerlegungen wie folgt:

Wenn $c \leqq \frac{2}{3}$, so ist im Intervall $-1 \leqq \alpha \leqq +1$

$$\sin^2\alpha > c\alpha^2.$$

Denn wenn für $-1 \leqq \alpha \leqq +1$ die Ungleichheit $1 - \frac{\alpha^2}{3!} + \cdots > \sqrt{c}$ stattfinden soll, so wird sie jedenfalls erfüllt sein, wenn $1 - \frac{1}{3!} > c$, umsomehr wenn $1 - \frac{1}{3} \geqq c$ ist.

Dies vorausgeschickt, zerlegen wir das Integral:

$$\int^{\infty} d\alpha\, \varphi(\alpha) e^{-\sin^2\alpha \,.\, \psi(\alpha)}$$

in Stücke der Formen:

$$j_p = \int_{p\pi - \varepsilon_p}^{p\pi + \varepsilon'_p}, \qquad j'_p = \int_{p\pi + \varepsilon'_p}^{(p+1)\pi - \varepsilon_{p+1}},$$

und setzen fest, dass ε_p und ε'_p eine beliebig klein anzunehmende Grösse ε nicht unterschreiten.

Es wird $\sum j'_p$ convergent sein, wenn

$$\int^{\infty} d\alpha\, \varphi(\alpha) e^{-\mu\, \psi(\alpha)}$$

convergent ist, unter μ eine beliebig kleine Zahl verstanden. Die Theile j_p unterwerfen wir folgenden Umformungen.

Wir setzen:

$$j_p = \int_{p\pi - \varepsilon_p}^{p\pi + \varepsilon'_p} d\alpha\, \varphi(\alpha)\, e^{-\sin^2\alpha \,.\, \psi(\alpha)} = \int_{-\varepsilon_p}^{+\varepsilon'_p} d\alpha\, \varphi(p\pi + \alpha) e^{-\sin^2\alpha \,.\, \psi(p\pi + \alpha)},$$

und wenn wir annehmen, dass ε_p und $\varepsilon'_p < 1$ sind, ist:

$$j_p < \int_{-\varepsilon_p}^{+\varepsilon'_p} d\alpha\, \varphi(p\pi + \alpha)\, e^{-c\alpha^2 \,.\, \psi(p\pi + \alpha)}.$$

Wenn ausserdem $\psi(\alpha)$ ohne Maxima wächst, so ist das Integral rechts, welches man schreiben kann:

$$\varphi(p\pi + \alpha_1) \int_{-\varepsilon_p}^{+\varepsilon'_p} d\alpha\, e^{-c\alpha^2 \,.\, \psi(p\pi + \alpha)}$$

kleiner, als wenn für $\psi(p\pi + \alpha)$ sein kleinster Werth $\psi(p\pi - \varepsilon_p)$ gesetzt wird, woraus folgt:

$$j_p < \frac{\varphi(p\pi + \alpha_1)}{\sqrt{c\psi(p\pi - \varepsilon_p)}} \int\limits_{-\varepsilon_p\sqrt{c\psi(p\pi-\varepsilon_p)}}^{+\varepsilon'_p\sqrt{c\psi(p\pi-\varepsilon_p)}} d\alpha\, e^{-\alpha^2} \quad ,$$

worin man, wenn auch φ nur wächst, statt $\varphi(p\pi + \alpha_1)$ schreiben darf $\varphi(p\pi + \varepsilon'_p)$.

Ist demnach:

$$u_p = \frac{\varphi(p\pi + \varepsilon'_p)}{\sqrt{\psi(p\pi - \varepsilon_p)}} \quad ,$$

das Glied einer convergenten Reihe, so ist auch $\sum j_p$ convergent, und mit der Summe der j_p ist auch die Summe der j'_p convergent.

Diese Bedingung lässt sich anders formuliren. Ist η der grösste Werth, den die ε_p, ε'_p überhaupt annehmen, so reicht es aus, dass

$$\frac{\varphi(p\pi + \eta)}{\sqrt{\psi(p\pi - \eta)}}$$

für einen beliebig kleinen Werth von η das Glied einer convergenten Reihe sei.

Das wird aber wiederum eintreten, wenn das Integral:

$$\int^{\infty} d\alpha \, \frac{\varphi(\alpha + \eta)}{\sqrt{\psi(\alpha - \eta)}} \, ,$$

convergent ist, und da η beliebig klein sein kann, so folgt (indem man unter dem Integral α statt $\alpha - \eta$ schreibt) die Bedingung, dass das Integral:

$$\int^{\infty} d\alpha \, \frac{\varphi(\alpha + a)}{\sqrt{\psi(\alpha)}} \, ,$$

convergent sein müsse für irgend ein von Null verschiedenes aber beliebig kleines a.

Setzen wir z. B.:

$$\psi(x) = x^{2n}, \qquad \varphi(x) = x^m,$$

so ist die Bedingung erfüllt, z. B. wenn:

$$\frac{(x+a)^m}{x^n} \lesssim \frac{1}{x^2},$$

$$\text{d. d. } n - m \geqq 2, \quad \text{oder } n \geqq m + 2,$$

so dass:

$$\int^{\infty} d\alpha \; \alpha^m \, e^{-\sin^2\alpha \, . \, \alpha^{2(m+2)}}$$

convergent ist, und für $m = 1$ kommt unser obiges Beispiel heraus.

Hinzuzufügen ist nur, dass die Function $\varphi(x)$ und mit ihr die unendlich werdenden Werthe der zu integrirenden Function beliebig stark unendlich werden können. Es wird sich stets eine Function $\psi(x)$ angeben lassen, für welche die Bedingung erfüllt ist.

Tübingen, December 1877.

Neumann's Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential. *)

Referat des Verfassers.

Alles was über die Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

heutzutage vorliegt, steht in engem Zusammenhang mit gewissen allgemeinen Untersuchungen über Gravitation, Elektricität und Magnetismus; basirt also auf der Betrachtung einer Materie, welche beliebig im *Raume* vertheilt werden kann, und welche, was ihre einzelnen Theilchen betrifft, dem Newton'schen Gesetz: $\frac{m\mu}{E^2}$, oder (was dasselbe) dem *Newton'schen Potential***):

$$(2)\qquad \frac{m\mu}{E}$$

sich subordinirt.

In ganz analoger Weise wird offenbar die Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y)$$

in Zusammenhang gebracht werden können mit der Theorie einer gewissen fingirten Materie, welche beliebig in der *Ebene* sich ausbreiten lässt, und deren einzelne Theilchen nach dem Gesetz: $\frac{m\mu}{E}$, d. i. nach Maassgabe des *Logarithmischen Potentials****):

---

*) Leipzig, im Verlag von Teubner, 1877.

**) Der Verf. des vorliegenden Werkes nennt das dem Newton'schen Gesetz entsprechende Potential kurzweg das *Newton'sche Potential.*

***) Die Potentiale (2) und (4) sind in ganz analoger Weise gebildet. Bezeichnet man nämlich die repulsive Kraft zwischen zwei Massentheilchen m und μ mit R, und das Potential der beiden Theilchen auf einander mit V, so ist

in der einen Theorie:	in der andern:
$R = \frac{m\mu}{E}$,	$R = \frac{m\mu}{E^2}$,
$V = m\mu \log \frac{1}{E}$,	$V = \frac{m\mu}{E}$, also im

(4) $$m\mu \log \frac{1}{E}$$

auf einander wirken.

Diesen beiden Theorien, welche man kurzweg die des *Newton'schen* und die des *Logarithmischen Potentials* nennen kann, ist das vorliegende Werk gewidmet. Dasselbe hat im Ganzen eine dreifache Tendenz, nämlich erstens eine strengere Begründung einzelner Theile aus der Theorie des Newton'schen Potentials, zweitens eine weitere Ausdehnung und Vervollständigung dieser Theorie, endlich drittens eine *analoge* Entwickelung der Theorie des Logarithmischen Potentials.

Man würde sehr irren, wenn man glauben wollte, dass diese beiden Theorien in aller Strenge einander *analog* seien, dass etwa jeder Satz der einen unmittelbar auf die andere sich übertragen lasse. *Bezeichnet z. B.*, um an einen bekannten Satz aus der Theorie des Newton'schen Potentials zu erinnern, σ *eine gegebene geschlossene Fläche, und V das Newton'sche Potential irgend welcher unbekannten innerhalb σ gelegenen Massen, so wird dieses Potential für alle Punkte ausserhalb σ eindeutig bestimmt sein, sobald nur seine Werthe auf σ selber gegeben sind.* Versucht man aber zu diesem Satz den analogen Satz der Ebene d. i. des Logarithmischen Potentials zu finden, so wird man auf nicht unerhebliche Schwierigkeiten stossen, — ja in Zweifel gerathen, ob ein solcher überhaupt existire*).

---

einen, wie im andern Falle:

$$R = -\frac{dV}{dE}.$$

Beiläufig sei bemerkt, dass der Verf. auf die Wichtigkeit der Theorie des Logarithmischen Potentials bereits im Jahre 1861 hingewiesen hat, in seiner Abhandlung im Borchardt'schen Journal, Bd. 59, Seite 335. In der That dürfte dieser Theorie unter den verschiedenen mathematischen Disciplinen eine hervorragende Stelle einzuräumen sein, theils in Folge ihrer Beziehung zur *allgemeinen Functionentheorie*, namentlich zum *Dirichlet'schen Princip* und zur Theorie der *conformen Abbildung*, theils in Folge ihrer Beziehung zu gewissen *hydrodynamischen Problemen* (Bewegung des Wassers in einer Röhre von gegebenem Querschnitt), theils in Folge ihrer Beziehung zu bekannten *elektrodynamischen Problemen* (Durchgang des elektrischen Stromes durch eine dünne Metallplatte von beliebiger Form), theils endlich in Folge von mancherlei Anregungen, die in ihr für die Weiterentwicklung der Theorie des *Newton'schen* Potentials enthalten sind.

*) So ist z. B. der Satz *falsch* für eine Kreislinie σ vom Radius *Eins*. Denkt man sich nämlich innerhalb eines solchen Kreises σ irgend welche Massen M in beliebiger Weise vertheilt, und im Centrum des Kreises einen Massenpunkt von der Grösse m, so werden die resp. von M und von M, m auf einen *äussern* Punkt a ausgeübten Potentiale V_a und W_a in der Beziehung stehen:

$$V_a + m \log \frac{1}{r} = W_a,$$

Hieraus geht hervor, dass die in Rede stehenden beiden Theorien *nicht* überall parallel laufen, sondern mancherlei Discrepanzen darbieten. Und gerade diese Discrepanzen sind es, welche den Verf. veranlasst haben, der so wichtigen Theorie des Logarithmischen Potentials eine besondere Sorgfalt zuzuwenden.

Bei der weiteren Besprechung des vorliegenden Werkes werden wir Gebrauch machen von den dort angewandten Collectivbezeichnungen h und T.

In der *Ebene*, d. h. in der Theorie des Logarithmischen Potentials mögen nämlich h und T die Bedeutung haben:

$$h = 1,$$

$$T = \log \frac{1}{E};$$

andererseits mögen im *Raume*, d. h. in der Theorie des Newton'schen Potentials h und T folgende Bedeutungen haben:

$$h = 2,$$

$$T = \frac{1}{E}.$$

Alsdann wird in der einen wie in der andern Theorie die *Kraft*, mit welcher zwei Massentheilchen m und μ auf einander wirken, gleich $\frac{m\mu}{E^h}$, und ihr *Potential* gleich $m\mu T$ sein.

Erstes Capitel.

Allgemeine Theorie des Potentials.

Die 30 ersten Seiten dieses Capitels enthalten eine kurze (meistentheils nur historisch gehaltene) Recapitulation der von Laplace, Green und Gauss in der Theorie des Newton'schen Potentials aufgestellten Sätze, unter Beifügung der analogen Sätze aus der Theorie des Logarithmischen Potentials.

Wichtiger sind die Untersuchungen des Verf. über die *extremen*

---

wo r den Abstand des Punktes a von m bezeichnet. Lässt man nun den äussern Punkt a nach irgend einer Stelle s der gegebenen Kreisperipherie σ hinrücken, und beachtet man, dass der Radius dieser Peripherie gleich *Eins* ist, so geht die vorstehende Beziehung über in $V_s + m \log (1) = W_s$, d. i. in:

$$V_s = W_s.$$

Diese Potentiale V und W haben also *auf σ einerlei* Werthe; auch rühren sie beide von Massen her, die *innerhalb* σ liegen; und dennoch findet zwischen ihren Werthen für einen *äusseren* Punkt a eine grosse Verschiedenheit statt. — Kurz, diese Potentiale V und W zeigen deutlich, dass der in Rede stehende Satz für eine Kreislinie vom Radius Eins *unrichtig* ist.

Im weitern Verlauf des Werkes zeigt der Verf., dass dieses Beispiel einer Kreislinie vom Radius Eins als ein ganz *singulärer* Fall anzusehen ist, und dass der in Rede stehende Satz, obwohl in diesem singulären Fall ungültig, im Allgemeinen dennoch besteht.

Werthe des Potentials innerhalb eines gegebenen massenleeren Gebietes $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{J}$, ferner über diejenigen Angaben, welche erforderlich sind, um das Potential innerhalb eines solchen Gebietes $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{J}$ *eindeutig* zu bestimmen. Um näher hierauf eingehen zu können, zerlegen wir

die unendliche Ebene durch eine *geschlossene Curve* σ in einen äussern Theil $\mathfrak{A}$ und einen innern Theil $\mathfrak{J}$,	den unendlichen Raum durch eine *geschlossene Fläche* σ in einen äusseren Theil $\mathfrak{A}$ und einen innern Theil $\mathfrak{J}$,

und bezeichnen die zu $\mathfrak{A}$ (excl. σ) gehörigen Punkte mit a oder α, ferner die zu $\mathfrak{J}$ (excl. σ) gehörigen mit i oder j, endlich die *auf* σ gelegenen mit s oder σ. Ausserdem bezeichnen wir die Werthe, welche eine Function Φ in diesen Punkten $a, \alpha, s, \sigma, i, j$ besitzt, resp. mit $\Phi_a, \Phi_\alpha, \Phi_s, \Phi_\sigma, \Phi_i, \Phi_j$. Solches festgesetzt, wollen wir nun die vom Verf. für die Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ aufgestellten Theoreme in möglichster Kürze und ohne weitere Begründung anzugeben suchen*).

Theoreme, welche das Gebiet $\mathfrak{A}$ betreffen.

Hülfssatz. — Bezeichnet V das Potential irgend welcher theils auf, theils innerhalb σ ausgebreiteter Massen, so ist

$V_\infty = 0$ *oder* $= \pm\infty$, *je nachdem die Summe der das Potential erzeugenden Massen Null oder von Null verschieden ist.*	V_∞ *stets* $= 0$.

Hier bezeichnet V_∞ den Werth des Potentiales V für einen unendlich weit entfernten Punkt.

Theorem A. — Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, so werden die beiden Extreme der Werthe V_a, V_s (d. h. der kleinste und grösste dieser Werthe) *unter*

---

*) All' diese Theoreme sind vom Verf. bereits im Jahre 1870 (wenn auch in etwas anderer Form) publicirt werden, in den Math Annalen, Bd. III. Vergl. daselbst namentlich Seite 340—344 und 430—434. Uebrigens wird der sachkundige Leser (auch ohne weitere Angabe) sofort erkennen, wie viel von diesen Theoremen dem Verf. zuzuschreiben, und wieviel davon schon früher gefunden ist. So z. B. findet man in Gauss' allgemeinen Lehrsätzen Art. 26 eine Stelle, welche übertragen in die hier angewandte Bezeichnungsweise folgendermassen lautet:

Wenn von Massen, die sich blos innerhalb des endlichen Raumes $\mathfrak{J}$, oder auch ganz oder theilweise nach der Stetigkeit vertheilt auf dessen Oberfläche σ befinden, das Potential in allen Punkten von σ einen constanten Werth $= C$ hat, so wird das Potential in einem Punkte a des äussern unendlichen Raumes $\mathfrak{A}$

erstlich, wenn $C = 0$ ist, gleichfalls $= 0$,

zweitens, wenn C nicht $= 0$ ist, kleiner als C, und mit demselben Zeichen wie C behaftet sein.

Man sieht, dass diese Gauss'schen Sätze specielle Fälle sind von dem Theorem *A.* des Verf.

*allen Umständen entweder auf σ, oder im Unendlichen, oder theils auf σ theils im Unendlichen anzutreffen sein**). Ist z. B. V auf σ constant, $= C$, befinden sich mithin auf σ und im Unendlichen im Ganzen nur *zwei* Werthe, nämlich C und V_∞, so müssen jene Extreme durch C und V_∞ dargestellt sein. Mit andern Worten: Es müssen in diesem Fall sämmtliche V_a ihrer Grösse nach zwischen C und V_∞ liegen.

*Theorem A'. — Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, und ist die Summe der das Potential erzeugenden Massen Null, so werden die beiden Extreme der Werthe V_a, V_s nothwendig auf σ anzutreffen sein***). Ist z. B. V auf σ constant, $= C$, befindet sich mithin auf σ im Ganzen nur der *eine* Werth C, so müssen beide Extreme durch C dargestellt sein. D. h. sämmtliche V_s, V_a, sowie auch das (zu den V_a gehörige) V_∞ müssen in diesem Fall zwischen C und C liegen, also mit C identisch sein. Aus der so erhaltenen Formel

$$V_s = V_a = V_\infty = C$$

folgt aber mit Rücksicht auf den vorhergehenden Hülfssatz sofort:

$$V_s = V_a = 0 = C.$$

---

*) Der Leser wird gebeten, genau auf den Wortlaut des Theorems zu achten. Dasselbe sagt nämlich aus, dass die beiden Extreme *mit voller Sicherheit* an den genannten Orten anzutreffen sind, *lässt aber völlig dahingestellt*, ob jene Extreme nicht vielleicht gleichzeitig noch an irgend welchen andern Orten anzutreffen seien. — Uebrigens ist zu bemerken, dass der Verf. in seinem Werke das Theorem mit grösserer Vollständigkeit hinstellt. Er sagt nämlich daselbst:

Ist V das Potential irgend welcher Massen, die theils auf theils innerhalb σ vertheilt sind, so müssen, was die beiden Extreme K, G der Werthe V_a, V_s betrifft, zwei Fälle unterschieden werden.

Erster Fall: V ist im Gebiete $\mathfrak{A}$ nicht überall $= 0$. Alsdann können jene extremen Werthe K, G nur auf σ und im Unendlichen sich vorfinden; so dass also für jeden endlichen Punkt a die Formel gilt:

(I.) $$K < V_a < G,$$

die Zeichen genommen in sensu rigoroso.

Zweiter Fall: V ist in $\mathfrak{A}$ überall $= 0$. Alsdann wird die Formel (I.) *nicht mehr gültig sein, indem die durch sie behaupteten Unterschiede der allgemeinen Gleichheit* (d. h. dem allgemeinen Nullsein) *Platz machen; so dass also an Stelle jener Formel folgende zu setzen ist:*

(II.) $$K = V_a = G = 0.$$

Dabei ist zu erinnern, dass, wie schon oben bemerkt, unter den a die Punkte des Gebietes $\mathfrak{A}$, *exclusive* σ zu verstehen sind.

In ähnlicher Vollständigkeit hat der Verf. in seinem Werk auch die weiter folgenden Theoreme angegeben. Bei dem gegenwärtigen Referat aber schien es angemessen von einer solchen Vollständigkeit zu Gunsten der grösseren Kürze und besseren Uebersichtlichkeit zu abstrahiren.

**) Wiederum wird der Leser gebeten, genau auf den Wortlaut zu achten, desgleichen bei den weiter folgenden Theoremen.

Tritt also zu den Bedingungen des Theorems A'. noch die hinzu, dass V auf σ constant sein soll, so werden die Werthe V_s, V_a sämmtlich $= 0$ sein.

Theorem A^{add}. — *Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, ist ferner die Summe dieser Massen gegeben, $= M$, und sollen die V_s von irgend welchen auf σ vorgeschriebenen Werthen f_s nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden; so werden hiedurch sämmtliche V_a eindeutig bestimmt sein, desgleichen auch der Werth jener Constanten.* Ist also z. B. die Summe jener Massen gegeben, $= M$, und soll V auf σ constant sein, so werden hiedurch sämmtliche V_a eindeutig bestimmt sein.

Schliesslich ergiebt sich, und zwar in unmittelbarem Anschluss an das Theorem A., noch ein letzter Satz, jedoch nur für das Newton'sche, nicht für das Logarithmische Potential. Dieser Satz, welcher vom Verf. als das Theorem A^{abs}. bezeichnet wird*), lautet folgendermassen:

Theorem A^{abs}. . . . . . . *Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, und soll V auf σ irgend welche vorgeschriebenen Werthe f_s besitzen, so werden hierdurch sämmtliche V_a eindeutig bestimmt sein.* (Vgl. d. *Nm.* Werk, Pag. 35, Nr. 14.)

Die hier in der Theorie des Logarithmischen Potentials vorhandene Lücke, auf welche bereits zu Anfang dieses Referates hingewiesen wurde, ist der Verf. erst *später*, im dritten Capitel, zu beseitigen im Stande.

Theoreme, welche das Gebiet $\mathfrak{J}$ betreffen.

Theorem J. — *Ist V das Potential irgend welcher theils auf theils ausserhalb σ gelegenen Massen, so werden die beiden Extreme der Werthe V_i, V_s unter allen Umständen auf σ anzutreffen sein.* Ist z. B. V auf σ constant, $= C$, ist mithin auf σ im Ganzen nur der *eine* Werth C vorhanden, so müssen jene Extreme beide $= C$ sein. Mit andern Worten: Es müssen in diesem Falle sämmtliche V_a zwischen C und C liegen, also mit C identisch sein.

Theorem J^{abs}. — *Ist V das Potential irgend welcher auf oder ausserhalb σ ausgebreiteter Massen, und soll V auf σ irgend welche*

*) Der Verf. hat absichtlich Bezeichnungen gewählt, welche an den *Inhalt* der betreffenden Theoreme einigermassen erinnern. So bezieht sich z. B. das Theorem A^{add}. auf den Fall, dass die Werthe von V auf σ bis auf eine *additive Constante* gegeben sind, während das Theorem A^{abs}., wie auch das weiterfolgende Theorem J^{abs}., den Fall betreffen, dass die Werthe von V auf σ *absolut*, d. h. vollständig gegeben sind.

vorgeschriebenen Werthe f_i besitzen, so werden hierdurch sämmtliche V_i eindeutig bestimmt sein. (Vergl. das *Nm.* Werk, Pag. 41, No. 31.)

Erweiterung der genannten Theoreme.

Das bis jetzt betrachtete (der Ebene oder dem Raum angehörende) Gebiet $\mathfrak{J}$ besitzt nur *eine* Begrenzungscurve resp. Begrenzungsfläche. Denkt man sich von diesem Gebiete $\mathfrak{J}$ irgend ein in seinem Innern befindliches Stück abgesondert, so wird das zurückbleibende Gebiet *zwei* Begrenzungscurven resp. Begrenzungsflächen haben. Aus diesem Gebiete kann durch Wiederholung desselben Processes ein Gebiet mit *drei* Begrenzungscurven resp. Begrenzungsflächen abgeleitet werden. U. s. w. Wir wollen all' diese Gebiete mit $\mathfrak{J}$, genauer etwa mit $\mathfrak{J}^{(n)}$ bezeichnen, der Art, dass $\mathfrak{J}^{(n)}$ im Ganzen n Begrenzungscurven resp. Begrenzungsflächen besitzt.

In ganz derselben Weise kann man das Gebiet $\mathfrak{A}$ behandeln, indem man von demselben ein in seinem Innern liegendes Stück absondert; u. s. w. Die so entstehenden Gebiete bezeichnen wir sämmtlich mit $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}^{(n)}$, der Art, dass $\mathfrak{A}^{(n)}$ im Ganzen n Begrenzungscurven resp. Begrenzungsflächen besitzt.

Solches festgesetzt, ergiebt sich leicht, dass die im Vorhergehenden für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ oder (genauer ausgedrückt) für $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{J}^{(1)}$ aufgestellten Theoreme übertragbar sind auf die allgemeineren Gebiete $\mathfrak{A}^{(n)}$ und $\mathfrak{J}^{(n)}$.

Anwendung der Theoreme.

Um nun die Nützlichkeit dieser Theoreme (theils in ihrer engeren theils in ihrer erweiterten Gestalt) an einem Beispiele zu demonstriren, wendet sich der Verf. zur Betrachtung eines *ringförmigen* resp. *schaalenförmigen* Gebietes $\mathfrak{E}$, also eines Gebietes $\mathfrak{E}$, welches z. B. begrenzt sein kann

von zwei concentrischen Kreisen, oder von zwei confocalen Ellipsen, oder zwei in einander geschachtelten Quadraten, u. s. w.;

von zwei concentrischen Kugelflächen, oder zwei confocalen Ellipsoidflächen, u. s. w.;

und gelangt dabei zu folgendem merkwürdigen Satz:

Sind M *und* M *zwei Massensysteme, welche ausserhalb* $\mathfrak{E}$ *liegen und durch* $\mathfrak{E}$ *von einander getrennt sind*), und sollen die beiden Massensysteme* M *und* M *zusammengenommen in allen Punkten des Ge-*

---

*) Repräsentirt also z. B. $\mathfrak{E}$ eine ellipsoidische Schaale, so wird vorausgesetzt, dass von jenen beiden Massensystemen M und M das eine im innern Hohlraum der Schaale, das andere in dem die Schaale umgebenden äussern Raum sich befinde.

bietes 𝔈 *ein constantes Potential besitzen, so muss jedes der beiden Massensysteme, einzeln genommen, diese Eigenschaft haben.* (Man findet diesen Satz in etwas anderer Gestalt in dem Neumann'schen Werk ausgesprochen auf Seite 46 und 47.)

Zweites Capitel.

Einige Anwendungen der Green'schen Sätze.

Das eben besprochene *erste* Capitel enthält, ausser dem Angeführten, noch mancherlei Anderes, so z. B. eine kurze Recapitulation der bekannten *Green'schen Sätze*, so wie auch eine Uebertragung dieser Sätze auf den Fall der Ebene d. i. auf die Theorie des Logarithmischen Potentials.

Das nun folgende *zweite* Capitel, welches speciell über einige Anwendungen dieser Green'schen Sätze sich verbreitet, ist im Ganzen von sehr untergeordneter Bedeutung. Doch mögen folgende Sätze erwähnt sein:

Bezeichnet i einen beliebig gegebenen Punkt innerhalb einer *Kreislinie* σ, und a den conjugirten äussern Punkt, und ist ferner auf σ eine gegebene Masse M in solcher Weise ausgebreitet, dass ihre Dichtigkeit mit den *Quadraten* der von i nach σ gelegten Strahlen oder (was auf dasselbe hinauskommt) mit den Quadraten dar von a nach σ gelegten Strahlen umgekehrt proportional ist, so wird das (Logarithmische) Potential dieser Belegung auf *äussere* Punkte ebenso gross sein, als wäre die Masse M in i concentrirt; und gleichzeitig wird ihr Potential auf *innere* Punkte, abgesehen von einer *additiven Constanten*, ebenso gross sein, als wäre die Masse M in a concentrirt. (Vgl. das Neumann'sche Werk, Seite 62.)

Bezeichnet i einen beliebig gegebenen Punkt innerhalb einer *Kugelfläche* σ, und a den conjugirten äussern Punkt, und ist ferner auf σ eine gegebene Masse M in solcher Weise ausgebreitet, dass ihre Dichtigkeit mit den *Cuben* der von i nach σ gelegten Strahlen oder (was auf dasselbe hinauskommt) mit den Cuben der von a nach σ gelegten Strahlen umgekehrt proportional ist, so wird das (Newton'sche) Potential dieser Belegung auf *äussere* Punkte ebensogross sein, als wäre die Masse M in i concentrirt; und gleichzeitig wird ihr Potential auf *innere* Punkte, abgesehen von einem *constanten Factor*, ebensogross sein, als wäre die Masse M in a concentrirt. (Vergl. das *N.* Werk, Seite 68.)

Die Entdeckung dieser überaus einfachen und eleganten Sätze dürfte, soweit dieselben die *Kugel* betreffen, *Thomson* zuzuschreiben sein*).

*) Doch sei bemerkt, dass der Verf., unabhängig von *Thomson*, zu denselben Sätzen im Jahre 1861 gelangt ist in seiner kleinen Schrift: „*Lösung des*

Drittes Capitel.

Ueber die Theorie der elektrischen Vertheilung und über das Princip der sogenannten natürlichen Belegung.

Nachdem der Verf. in diesem Capitel zunächst einige elektrostatische Sätze aufgestellt hat, die vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein dürften, gelangt er (gewissermassen geleitet durch diese physikalischen Betrachtungen) zu einem *neuen Princip*, vermittelst dessen er die allgemeine Theorie des Potentials weiter zu vervollständigen, und namentlich auch die im ersten Capitel offen gebliebene Lücke auszufüllen im Stande ist. Dieses Princip besteht in der sogenannten *natürlichen Belegung* der zu betrachtenden Curve oder Fläche. — Wir wollen bei dem gegenwärtigen Referat jene elektrostatischen Sätze mit möglichster Kürze angeben, sodann aber mit grösserer Ausführlichkeit handeln über das in Rede stehende Princip und dessen Anwendung.

Einige elektrostatische Sätze.

Nach einem bekannten schon von *Gauss* aufgestellten Satz ist die elektrische Vertheilung auf einem gegebenen Conductor (falls keine äusseren Kräfte influiren) stets ein *gleichartige.*

Wollte man dieser Gauss'schen Ausdrucksweise sich anschliessen, nämlich die elektrische Schicht an der Oberfläche des Conductors *gleichartig* oder *ungleichartig* nennen, je nachdem das Vorzeichen ihrer Dichtigkeit überall dasselbe oder an verschiedenen Stellen ein verschiedenes ist, so könnten leicht Missverständnisse entstehen. Denn wollte man z. B. von *zwei* Conductoren mit *gleichartigen* Belegungen sprechen, so würde unwillkührlich die Vorstellung erweckt werden, als sollten die beiden Conductoren unter einander verglichen werden; während man doch nur auszudrücken beabsichtigt, dass das Vorzeichen auf jedem der beiden Conductoren constant sei, unbekümmert darum, ob diese beiden constanten Vorzeichen mit einander übereinstimmen oder nicht. — Zur Vermeidung solcher Missverständnisse hat der Verf. die Worte *gleichartig* und *ungleichartig* durch die Griechischen Ausdrücke *monogen* und *amphigen* ersetzt.

---

allg. Problems über den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel ohne Hülfe von Reihenentwickelungen nebst einigen Sätzen zur Theorie der Anziehung," Halle, bei Schmidt, 1861. Auch sei bemerkt, dass der Verf. zu jener Zeit (oder sogar noch früher) die analogen Sätze über den *Kreis* gefunden hatte, ohne darüber etwas zu publiciren. Endlich sei bemerkt, dass eine über diesen Gegenstand in späterer Zeit in den Math. Annalen (Bd. II, Seite 514) veröffentlichte kurze Note leider mit *Fehlern* behaftet, und nach dem vorstehenden Text zu corrigiren ist.

Ueber die Frage der Monogenität oder Amphigenität existirt nun, wie der Verf. zeigt, eine grosse Reihe einfacher allgemeiner Sätze, von denen jener zu Anfang genannte Gauss'sche Satz nur das erste Glied ist. Von diesen Sätzen, welche mit grosser Leichtigkeit aus den im ersten Capitel aufgestellten Theoremen sich ergeben, mögen namentlich folgende genannt werden:

Die elektrische Vertheilung auf einem gegebenen Conductor ist (falls keine äusseren Kräfte influiren) *stets monogen.*

Sind zwei Conductoren beliebig geladen, so wird (falls keine äusseren Kräfte influiren) *immer wenigstens auf einem derselben eine monogene Vertheilung anzutreffen sein. Haben insbesondere die Conductoren entgegengesetzte Ladungen*), so finden auf beiden monogene Vertheilungen statt, und zwar von entgegengesetzten Vorzeichen. Hat endlich der eine Conductor eine beliebige Ladung, der andere die Ladung Null, so entsteht auf dem erstern eine monogene, auf dem letztern eine amphigene Vertheilung.*

Sind beliebig viele Conductoren mit beliebigen Ladungen gegeben, so wird (falls keine äusseren Kräfte influiren) *immer wenigstens auf einem derselben eine monogene Vertheilung stattfinden. Sind insbesondere jene Ladungen der Art, dass ihre Summe* $= 0$ *ist, so werden mindestens zwei Conductoren mit monogenen Vertheilungen anzutreffen sein.*

Die auf einem gegebenen Conductor durch einen äussern elektrischen Massenpunkt inducirte Belegung ist stets monogen, falls der Conductor zur Erde abgeleitet ist, hingegen stets amphigen, falls derselbe isolirt und mit der Ladung Null versehen ist.

Befindet sich ein Conductor C im Hohlraum eines schaalenförmigen Conductors S, so werden auf der äusseren Begrenzungsfläche von C und auf der innern von S stets monogene Vertheilungen vorhanden sein, und zwar von entgegengesetzten Vorzeichen.

Ausserdem dürfte unter mancherlei anderen Sätzen, die der Verf. über elektrische Vertheilung aufstellt, etwa noch folgender hervorzuheben sein:

Ist in einem Conductor elektrisches Gleichgewicht eingetreten unter der Einwirkung beliebig gegebener äusserer Kräfte, so wird die an seiner Oberfläche vorhandene elektrische Dichtigkeit auf keinem noch so kleinen Theile der Oberfläche Null sein können, — es sei denn, dass sie daselbst allenthalben Null wäre. Ist der Conductor von mehreren Flächen begrenzt (was z. B. stattfindet bei einem schaalenförmigen Conductor), *so gilt derselbe Satz für jede einzelne Fläche.* Dabei ist

*) Unter der *Ladung* eines Conductors ist die Gesammtmasse der auf ihm vorhandenen Elektricität zu verstehen. Demgemäss sind die Ladungen zweier Conductoren *entgegengesetzt* zu nennen, sobald die elektrische Gesammtmasse auf dem einen $= M$, auf dem andern $= -M$ ist.

es gleichgültig, ob der Conductor zur Erde abgeleitet, oder ob er isolirt und mit einer beliebigen Elektricitätsmenge geladen ist. (Vergl. das Neumann'sche Werk Seite 77, Satz III.)

Die natürliche Belegung einer gegebenen Curve oder Fläche.

Die Vertheilung, welche die Elektricitätsmenge *Eins* auf einem isolirten Conductor ohne Einwirkung äusserer Kräfte annimmt, wird offenbar lediglich abhängen von der *geometrischen Beschaffenheit* seiner Oberfläche. Diese Vertheilung, welche der Verf. kurzweg *die natürliche Belegung der gegebenen Oberfläche* nennt, bildet ein wichtiges Instrument für die weiter folgenden Untersuchungen. Und nicht minder wichtig ist für die Theorie des Logarithmischen Potentials der analoge Begriff in der Ebene, d. i. *die natürliche Belegung einer gegebenen Curve*. Die betreffenden Definitionen lauten folgendermassen:

In der Ebene.

Unter der natürlichen Belegung einer geschlossenen Curve σ ist eine auf σ ausgebreitete Massenvertheilung zu verstehen, deren Logarithmisches Potential in allen Punkten innerhalb σ einen constanten Werth hat, und deren Gesammtmasse Eins ist.

Im Raume.

Unter der natürlichen Belegung einer geschlossenen Fläche σ ist eine auf σ ausgebreitete Massenvertheilung zu verstehen, deren Newton'sches Potential in allen Punkten innerhalb σ einen constanten Werth hat, und deren Gesammtmasse Eins ist.

Die (im Allgemeinen von Stelle zu Stelle variirende) Dichtigkeit dieser Belegung mag mit γ, ihr Potential auf einem variablen Punkt mit Π, und der constante Werth dieses Potentials für *innere* Punkte mit Γ bezeichnet sein. Alsdann ergeben sich z. B. für eine Kreislinie oder Kugelfläche folgende Formeln.

Für eine Kreislinie vom Radius A:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi A},$$

$$\Gamma = \log\frac{1}{A},$$

$$\Pi = \log\frac{1}{r},$$

wo r die Centraldistanz desjenigen variablen Punktes vorstellt, auf welchen sich Π bezieht.

Für eine Kugelfläche vom Radius A:

$$\gamma = \frac{1}{4\pi A^2},$$

$$\Gamma = \frac{1}{A},$$

$$\Pi = \frac{1}{r},$$

wo r die Centraldistanz desjenigen variablen Punktes vorstellt, auf welchen sich Π bezieht.

Leicht kann man auch die natürliche Belegung für eine Ellipse oder eine Ellipsoidfläche bestimmen, und gelangt dabei zu folgenden Sätzen und Formeln*):

*) Diese Formeln, welche im vorliegenden Werk *nicht* angegeben sind, wurden vom Verf. theilweise schon bei früheren Gelegenheiten mitgetheilt, so z. B. in Poggend. Annal. Bd. 113, ferner in den Matth. Annalen, Bd. III, S. 620.

Bei einer *Ellipse* ist die Dichtigkeit γ der natürlichen Belegung in jedem Punkt proportional dem Abstande des Punktes von einer zweiten Ellipse, welche der gegebenen *ähnlich*, und von derselben unendlich wenig verschieden ist.

Repräsentirt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der gegebenen Ellipse, so ergiebt sich für die Dichtigkeit γ im Punkte (x, y) die Formel:

$$\frac{1}{\gamma} = 2\pi ab \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}.$$

Diese Formel kann man auch so darstellen:

$$\frac{1}{\gamma} = \pi\Delta,$$

oder auch so:

$$\frac{1}{\gamma} = 2\pi \sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{R},$$

wo Δ die Länge desjenigen *Ellipsendurchmessers* bezeichnet, welcher der im Punkte (x, y) construirten Tangente parallel ist, während R den *Krümmungsradius* der Ellipse in jenem Punkt vorstellt. — Endlich kann man die Formel auch so schreiben:

$$\frac{1}{\gamma} = 2\pi \sqrt{SS'},$$

wo S, S' die nach dem Punkt (x, y) hinlaufenden *Brennstrahlen* bezeichnen.

Bei einer *Ellipsoidfläche* ist die Dichtigkeit der natürlichen Belegung in jedem Punkt proportional dem Abstande des Punktes von einer zweiten Ellipsoidfläche, welche der gegebenen *ähnlich*, und von derselben unendlich wenig verschieden ist.

Repräsentirt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung der gegebenen Ellipsoidfläche, so ergiebt sich für die Dichtigkeit γ im Punkt (x, y, z) die Formel:

$$\frac{1}{\gamma} = 4\pi abc \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Diese Formel kann man auch so schreiben:

$$\frac{1}{\gamma} = 4\Omega,$$

oder auch so:

$$\frac{1}{\gamma} = 4\pi \sqrt{abc}\sqrt[4]{RR'},\text{*)}$$

wo Ω den Flächeninhalt desjenigen *Diametralschnittes* bezeichnet, welcher der im Punkte (x, y, z) construirten Tangentialebene parallel ist, während R, R' die *Hauptkrümmungsradien* der Ellipsoidfläche in jenem Punkte vorstellen. — Endlich kann man, falls das Ellipsoid ein Rotations-Ellipsoid ist, die Formel auch so schreiben:

$$\frac{1}{\gamma} = 4\pi a \sqrt{SS'}$$

wo a den Radius des Aequators bezeichnet, während S, S' die beiden *Brennstrahlen* des Punktes (x, y, z) vorstellen**).

*) Diese Formel ist, soweit dem Referenten bekannt, zum ersten Mal von *Paolo Pagi* aufgestellt worden (Nuovo Cimento Ser. 2, Vol. XV Fasc. di Marzo, Aprile e Maggio 1876).

**) Ist das Rotationsellipsoid ein *abgeplattetes*, so hat man diejenige Ellipse zu betrachten, in welcher das Ellipsoid von der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Meridianebene geschnitten wird, und unter S, S' die Entfernungen des Punktes von den Brennpunkten dieser Ellipse zu verstehen.

Um nun den Begriff der natürlichen Belegung weiterhin mit Erfolg und Sicherheit anwenden zu können, ist offenbar zweierlei erforderlich, nämlich erstens die Kenntniss der *allgemeinen Eigenschaften* dieser Belegung, und zweitens der Nachweis ihrer *Existenz*. In ersterer Beziehung giebt der Verf. folgende Sätze:

I. *Die einer gegebenen Curve oder Fläche entsprechende Dichtigkeit γ ist allenthalben positiv, und kann auf keinem noch so kleinen Theil derselben Null sein.*

II. *Die einer Curve entsprechende Constante Γ kann, je nach Beschaffenheit der Curve, bald positiv, bald Null, bald negativ sein.* So z. B. ist (wie aus den vorhergehenden Formeln folgt) die Constante Γ für eine Kreislinie positiv oder Null oder negativ, je nachdem der Radius der Kreislinie kleiner als Eins, gleich Eins oder grösser als Eins ist. — *Hingegen wird die einer Fläche entsprechende Constante Γ stets positiv und stets verschieden von Null sein.*

III. *Das einer Curve entsprechende Potential Π hat für unendlich ferne Punkte den Werth $-\infty$, hingegen das einer Fläche entsprechende den Werth* 0.

Was andererseits die *Existenz* der natürlichen Belegung betrifft, so giebt der Verf. hiefür zwei Beweise; zunächst einen provisorischen Beweis vermittelst der schon von Gauss benutzten Variationsmethode (am Schluss des Capitels); sodann später (im fünften Capitel) einen strengeren Beweis, der indessen leider nicht allgemein gilt, sondern auf eine gewisse Kategorie von Curven und Flächen*) sich beschränkt.

Der sogenannte singuläre Fall.

γ und Π sind (nach ihrer Definition) zwei der gegebenen Curve oder Fläche σ eigenthümlich zugehörige Functionen, ebenso Γ ein ihr zugehöriger constanter Parameter.

Nun existiren gewisse Curven, deren Parameter Γ den Werth *Null* hat. Diese Curven, welche den weiteren Betrachtungen besondere Schwierigkeiten bereiten und in der zu entwickelnden allgemeinen Theorie einen besonderen Ausnahmefall zu constituiren scheinen, nennt der Verf. *singuläre Curven*, und spricht, sobald die zur Behandlung vorgelegte Curve dieser singulären Classe angehört, kurzweg vom Vorhandensein des *singulären Falles*. — Eine solche singuläre Curve ist z. B. eine Kreislinie vom Radius Eins, ebenso jede Ellipse, deren Halbaxen-Summe den Werth Zwei hat.

Was den Raum betrifft, so ist zu bemerken, dass *singuläre Flächen*, d. i. Flächen, deren Parameter Γ gleich Null ist, *nicht* existiren

*) Man vgl. hierüber Seite 287 dieses Referates.

können. Denn der Parameter Γ einer gegebenen Fläche hat, wie vor wenig Augenblicken angeführt wurde, stets einen positiven und von Null verschiedenen Werth.

Erweiterung des Gauss'schen Satzes des arithmetischen Mittels.

Die Functionen γ, Π nebst der Constante Γ bieten die Mittel dar zur Erweiterung eines gewissen Gauss'schen Satzes. Um näher hierauf einzugehen, bezeichne σ (nach wie vor) eine geschlossene Curve oder Fläche von beliebiger Gestalt; ferner bezeichne V das Logarithmische resp. Newton'sche Potential eines beliebig gegebenen Massensystems, dessen einzelne Massenelemente theils mit m, theils mit μ benannt sein mögen, je nachdem sie *ausserhalb* oder *innerhalb* σ liegen; demgemäss sei der Werth dieses Potentials in irgend zwei Punkten x und σ ausgedrückt durch*):

(1) $$V_x = \sum m T_{mx} + \sum \mu T_{\mu x},$$

(2) $$V_\sigma = \sum m T_{m\sigma} + \sum \mu T_{\mu\sigma};$$

und zwar sei x ein ganz beliebiger Punkt, hingegen σ ein auf der gegebenen Curve oder Fläche σ befindlicher.

Denkt man sich nun die der Curve oder Fläche σ zugehörigen Functionen γ, Π, sowie auch die Constante Γ gebildet, und bezeichnet man den Werth der Function γ im Punkte σ mit γ_σ, ferner ein bei diesem Punkte abgegrenztes unendlich kleines Element der gegebenen Curve oder Fläche mit $d\sigma$, so folgt aus (2) durch Multiplication mit $\gamma_\sigma d\sigma$ und Integration:

$$\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \sum \left(m \int T_{m\sigma}\gamma_\sigma d\sigma\right) + \sum \left(\mu \int T_{\mu\sigma}\gamma_\sigma d\sigma\right).$$

Nach der Definition von Γ, Π ist aber (weil m ausserhalb und μ innerhalb der Curve resp. Fläche liegt):

$$\int T_{m\sigma}\gamma_\sigma d\sigma = \Pi_m,$$

$$\int T_{\mu\sigma}\gamma_\sigma d\sigma = \Gamma,$$

wo Π_m den Werth der Function Π im Punkte m bezeichnet. Somit folgt:

(3) $$\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \sum (m\Pi_m) + \sum (\mu\Gamma),$$

oder was dasselbe:

---

*) Vgl. die für T gegebene Definition, Seite 257 dieses Referates.

$$(4)\qquad \int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \sum (m\Pi_m) + \mathsf{M}\Gamma,$$

wo $\mathsf{M} = \sum \mu$ die Gesammtmasse der Elemente μ vorstellt.

Für den speciellen Fall, dass σ eine *Kreisfläche* resp. *Kugelfläche* vom Radius A ist, sind die Werthe von γ, Γ, Π sofort angebbar*). Durch Substitution dieser Werthe in (4) ergiebt sich:

$$(5)\qquad \frac{\int V_\sigma d\sigma}{2\pi \mathsf{A}} = \sum \left(m \log \frac{1}{r}\right) + \mathsf{M} \log \frac{1}{\mathsf{A}}, \qquad \Bigg| \qquad \frac{\int V_\sigma d\sigma}{4\pi \mathsf{A}^2} = \sum \left(\frac{m}{r}\right) + \frac{\mathsf{M}}{\mathsf{A}},$$

wo die r die Centraldistanzen der einzelnen m vorstellen.

Der Verf. nennt die Formeln (5), von welchen diejenige rechter Hand schon in Gauss' allgemeinen Lehrsätzen Art. 20 sich vorfindet, den *Gauss'schen Satz des arithmetischen Mittels*; und demgemäss bezeichnet er die allgemeinere Formel (4) als den *erweiterten Gauss'schen Satz des arithmetischen Mittels.*

Jene allgemeine Formel (4) gewinnt, falls die Elemente des gegebenen Massensystems sämmtlich innerhalb σ, resp. auf σ liegen, mithin sämmtlich zu den μ gezählt werden dürfen, folgende Gestalt:

$$(6)\qquad \int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \mathsf{M}\Gamma,$$

oder (was dasselbe) folgende:

$$(7)\qquad \mathsf{M} = \frac{\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma}{\Gamma}.$$

Ist also die der gegebenen Curve oder Fläche σ zugehörige Function γ nebst der Constante Γ *bekannt*, so wird man vermittelst der Formel (7) die Gesammtmasse M berechnen können, falls die Werthe V_σ gegeben sind; — es sei denn, dass $\Gamma = 0$ wäre. Sollte nämlich zufälliger Weise $\Gamma = 0$ sein, so könnte jene Formel möglicher Weise die Gestalt $\mathsf{M} = \frac{0}{0}$ annehmen, mithin zur Berechnung von M unbrauchbar werden. — Somit ergiebt sich der Satz:

Befinden sich theils auf, theils innerhalb einer gegebenen geschlossenen Curve oder Fläche σ irgend welche unbekannte Massen, und sind die Werthe gegeben, welche das Potential dieser Massen auf σ besitzt, so wird hiedurch die Summe M jener Massen eindeutig bestimmt sein, — ausser im sogenannten singulären Falle (d. i. im Falle $\Gamma = 0$).

Bringt man endlich die Formel (6) auf den noch specielleren Fall in Anwendung, dass $\mathsf{M} = 0$ ist, so folgt:

$$(8)\qquad \int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = 0.$$

---

*) Sie sind bereits angeführt auf Seite 265 dieses Referates.

Beachtet man, dass die Werthe γ_σ überall positiv und auf keinem noch so kleinen Theil der Curve oder Fläche Null sind (vgl. pag. 267 dieses Referates), so erkennt man aus (8) sofort, dass die V_σ *theils* positiv, *theils* negativ sein müssen, und gelangt daher zu folgendem Satz:

Befinden sich theils auf, theils innerhalb einer gegebenen geschlossenen Curve oder Fläche σ irgend welche Massen, deren Summe $= 0$ ist, so können die Werthe, welche das Potential dieser Massen auf σ besitzt, nicht alle von einerlei Vorzeichen sein, — es sei denn, dass sie sämmtlich $= 0$ wären.

Ausfüllung der im ersten Capitel offen gebliebenen Lücke.

Einer noch völlig unbekannten Function V mögen folgende Bedingungen auferlegt werden:

(9. α) V soll das Potential von Massen sein, die *auf* oder *innerhalb* σ liegen*),

(9. β) die V_σ sollen vorgeschriebene Werthe haben.

Legt man sich nun die Frage vor, ob die V_a durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt sind, so ist zuvörderst zu bemerken, dass man die Summe M der das Potential V erzeugenden Massen auf Grund der vorgeschriebenen Werthe V_σ sofort berechnen kann vermittelst der Formel (7):

$$\mathsf{M} = \frac{\int V_\sigma \gamma_\sigma d\sigma}{\Gamma},$$

und dass man also zu den Bedingungen (9. α, β), als unmittelbare Consequenz derselben, noch folgende dritte Bedingung hinzufügen darf:

(9. γ) die Summe M der das Potential V erzeugenden Massen soll einen gegebenen Werth haben.

Solches vorangeschickt, lässt sich leicht zeigen, dass die V_a durch die Bedingungen (9. α, β) oder, was dasselbe, durch die Bedingungen (9. α, β, γ) eindeutig bestimmt sind.

Existirten nämlich *zwei* den Bedingungen (9. α, β, γ) entsprechende Potentiale V und V',

(10. α) so müsste offenbar die Differenz $U = V - V'$ das Potential von Massen sein, die *auf* oder *innerhalb* σ liegen,

(10. β) ferner müssten alsdann die U_σ sämmtlich $= 0$ sein,

(10. γ) endlich müsste alsdann die Summe der das Potential U erzeugenden Massen $= 0$ sein.

---

*) Alle hier angewendeten Bezeichnungen σ, a, etc. etc. sollen dieselbe Bedeutung haben wie früher (vgl. Seite 258 dieses Referates).

Beachtet man nun, dass diesen Anforderungen (10. α, β, γ) genügt wird, falls man die das Potential U erzeugenden Massenelemente sämmtlich $= 0$, mithin die U_a ebenfalls $= 0$ setzt, und beachtet man andererseits, dass die U_a, zufolge des Theorems A^{add}., durch die Anforderungen (10. α, β, γ) *eindeutig* bestimmt sind, so erkennt man sofort, dass die U_a, jenen Anforderungen zufolge, *nothwendiger Weise* $= 0$ sein müssten; q. e. d.

Doch werden diese Ueberlegungen *defect* für den *singulären Fall:* $\mathsf{\Gamma} = 0$; weil die zur Bestimmung von M benutzte Formel

$$\mathsf{M} = \frac{\int V_a \gamma_a d\sigma}{\mathsf{\Gamma}}$$

für den Fall $\mathsf{\Gamma} = 0$ nicht mehr brauchbar ist. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Theorem A^{abs}. — *Ist V das Potential irgend welcher auf oder innerhalb σ ausgebreiteter Massen, und soll V auf σ irgend welche vorgeschriebenen Werthe f_s besitzen, so werden hierdurch sämmtliche V_a eindeutig bestimmt sein. — ausser im singulären Fall.* — — — Hiermit ist endlich die im ersten Capitel offen gebliebene Lücke (vgl. Seite 260 dieses Referates) ausgefüllt.

Viertes Capitel.

Theorie der sogenannten Doppelbelegungen.

Die im ersten Capitel und am Schlusse der vorhergehenden aufgestellten Theoreme A^{add}., A^{abs}., J^{abs}. sagen aus, dass gewisse Functionen durch die ihnen auferlegten Bedingungen *eindeutig* bestimmt sind, geben aber keinerlei Aufschluss über die wirkliche *Existenz* dieser Functionen. Auch wird heut zu Tage kein Zweifel darüber obwalten, dass die von Gauss und Dirichlet zur Beseitigung dieses Uebelstandes angegebenen Variationsmethoden im Allgemeinen wenig Zutrauen verdienen, dass vielmehr die einzig strenge Methode zur Beseitigung des genannten Uebelstandes in der *wirklichen Aufstellung* jener Functionen besteht.

Eine derartige Methode ist die vom Verf. angegebene *Methode des arithmetischen Mittels*, deren Wurzeln in der *Theorie der Doppelbelegungen* zu suchen sind. Somit war der Verf. genöthigt, zunächst diese letztere Theorie darzulegen, um sodann im folgenden Capitel zur Exposition seiner Methode des arithmetischen Mittels übergehen zu können.

Einige geometrische Definitionen.

Bei einer gegebenen Curve oder Fläche pflegt man eine bestimmte Seite als *positiv* festzusetzen, indem man alsdann gleichzeitig die auf

dieser Seite errichtete Normale die *positive* Normale nennt. Und umgekehrt: Hat man eine bestimmte Normale als *positiv* festgesetzt, so pflegt man mit demselben Namen auch die entsprechende Seite zu benennen*).

Ausserdem sind für die nachfolgenden Expositionen noch gewisse andere Festsetzungen erforderlich mit Bezug auf solche Curven oder Flächen, welche mit Ecken resp. Ecken und Kanten behaftet sind. Will man diese Festsetzungen der Art einkleiden, dass sie nicht speciell auf jene Eck- und Kantenpunkte beschränkt, sondern ganz allgemein für jeden *beliebigen* Punkt s der Curve resp. Fläche gültig sind, so kann man sich etwa folgendermassen ausdrücken:

Die von s nach den Nachbarpunkten der Curve σ hinlaufenden und über dieselben hinaus verlängerten Strahlen bilden einen *Winkel*, durch welchen eine mit dem Radius Eins um s beschriebene *Kreislinie* in zwei Theile zerlegt wird. Von diesen beiden Theilen mag der auf der positiven Seite der Curve liegende *das Winkelmaass der Curve im Punkte* s genannt, und mit ϖ_s bezeichnet werden.

Ist z. B. σ die Peripherie eines gleichseitigen Dreiecks, und setzt man als positive Seite die innere fest, so wird für jeden Punkt s

$$\varpi_s = \pi, \text{ oder } = \frac{\pi}{3}$$

sein, je nachdem der Punkt s in einer *Seite*, oder in einer *Ecke* des Dreiecks liegt.

Die mit ϖ_s durch die Relation

$$\varpi_s + \vartheta_s = \pi$$

verbundene Grösse ϑ_s mag das *Supplement* des Winkelmaasses, oder kürzer das *supplementare Winkelmaass* heissen.

Die von s nach den Nachbarpunkten der *Fläche* σ hinlaufenden und über dieselben hinaus fortgesetzten Strahlen bilden einen *Kegelmantel*, durch welchen eine mit dem Radius Eins um s beschriebene *Kugelfläche* in zwei Theile zerlegt wird. Von diesen beiden Theilen mag der auf der positiven Seite der Fläche liegende *das Winkelmaass der Fläche im Punkte* s genannt, und mit ϖ_s bezeichnet werden.

Ist z. B. σ die Oberfläche eines Würfels, und setzt man als positive Seite die innere fest, so wird für jeden Punkt s

$$\varpi_s = 2\pi, \text{ oder } = \frac{2\pi}{2}, \text{ oder } = \frac{2\pi}{4}$$

sein, je nachdem der Punkt s in einer *Seite*, oder in einer *Kante*, oder in einer *Ecke* des Würfels liegt.

Die mit ϖ_s durch die Relation

$$\varpi_s + \vartheta_s = 2\pi$$

verbundene Grösse ϑ_s mag das *Supplement* des Winkelmaasses, oder kürzer das *supplementare Winkelmaass* heissen.

*) Dabei sei sogleich bemerkt, dass bei *geschlossenen* Curven oder Flächen vom Verf. stets die *innere* Seite zur *positiven* auserwählt ist.

Aus diesen Definitionen geht hervor, dass ε_s *gewöhnlich* $= 0$ ist, dass nämlich eine Abweichung von diesem gewöhnlichen Werthe nur dann stattfindet, wenn der Punkt s in einer Ecke oder Kante liegt*).

Definition der Doppelbelegungen.

Denkt man sich in allen Punkten der gegebenen Curve oder Fläche σ die *positive* Normale ν errichtet, und auf all' diesen Normalen ein und dieselbe *unendlich kleine* Strecke λ aufgetragen, so entsteht eine neue mit σ *parallel* laufende Curve oder Fläche σ'. Correspondirende Punkte von σ und σ' sind alsdann solche zu nennen, die auf derselben Normale liegen, und correspondirende Elemente solche, die aus correspondirenden Punkten bestehen. — Werden nun σ und σ' in continuirlicher Weise mit Masse belegt, und zwar in solcher Art, dass die auf je zwei correspondirenden Elementen $d\sigma$ und $d\sigma'$ vorhandenen Massen einander *entgegengesetzt gleich* sind, so entsteht eine sogenannte *Doppelbelegung*. Ist $(-\zeta)$ die Dichtigkeit der auf σ ausgebreiteten einfachen Belegung, ferner λ (wie schon festgesetzt wurde) der unendlich kleine constante Abstand zwischen σ, σ', so heisst (nach Helmholtz):

$$\lambda\zeta = \mu$$

das *Moment* der Doppelbelegung**). Unter Anwendung dieses Momentes

---

*) Man kann den Buchstaben ε ein *Omikron-Ypsilon* oder kürzer ein *Omikron* nennen. Letzteres ist nicht ganz richtig, empfiehlt sich aber als das Bequemere.

**) Bekannt ist ein kleiner Aufsatz von *Weyr* (Berichte der Wiener Akad. LVI (2), Seite 669—682), in welchem derselbe nachweist, dass in der Theorie der Doppelbelegungen häufig gewisse Glieder in unerlaubter Weise vernachlässigt würden, so z. B. in Beer's Einleitung in die Elektrostatik (Seite 286), ferner in Karsten's Encyklopädie (XIX, Seite 711).

Das Neumann'sche Werk ist von solchen Vernachlässigungen frei, und befindet sich mit den Weyr'schen Expositionen in voller Uebereinstimmung. Es wird nämlich von Neumann ausdrücklich festgesetzt, dass die *Massen* auf correspondirenden Elementen entgegengesetzte Werthe haben sollen, nicht aber die *Dichtigkeiten*. Sind also $d\sigma$ und $d\sigma'$ zwei solche correspondirende Elemente, und $(-\zeta d\sigma)$ und $(+\zeta' d\sigma')$ die auf diesen Elementen vorhandenen Massen, so soll

$$(\alpha) \qquad \zeta d\sigma = \zeta' d\sigma'$$

sein. Hieraus ergiebt sich für die absoluten Werthe ζ und ζ' der Dichtigkeiten die Formel:

$$(\beta) \qquad \frac{\zeta}{\zeta'} = \frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{R_1' R_2'}{R_1 R_2},$$

wo R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche σ, und R_1', R_2' diejenigen der Fläche σ' vorstellen. Bezeichnet man nun den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der beiden Krümmungskreise (R_1) und (R_1') mit M_1, setzt man ferner fest, dass die Radien R_1 und R_1' beide positiv oder beide negativ zu rechnen sind, je nachdem M_1 auf der positiven oder negativen Seite von σ liegt, und trifft man endlich die analoge Festsetzung für die Rechnung der Radien R_2 und R_2', so ist:

μ lautet das Logarithmische resp. Newton'sche Potential der Doppelbelegung auf einen beliebig gegebenen Punkt x folgendermassen:

$$W_x = \int \frac{\partial\left(\log \frac{1}{E}\right)}{\partial \nu} \mu\, d\sigma, \qquad = \int \mu \frac{\cos \vartheta\, d\sigma}{E}, \qquad = \int \mu\, (d\sigma)_x,$$

$$W_x = \int \frac{\partial\left(\frac{1}{E}\right)}{\partial \nu} \mu\, d\sigma, \qquad = \int \mu \frac{\cos \vartheta\, d\sigma}{E^2}, \qquad = \int \mu\, (d\sigma)_x.$$

Hier bezeichnet E die Entfernung des Punktes x vom Elemente $d\sigma$, ferner ϑ den Winkel der Linie E ($d\sigma \rightarrow x$) gegen die Normale ν; und demgemäss repräsentirt der Ausdruck:

$$(d\sigma)_x = \frac{\cos \vartheta \cdot d\sigma}{E} = \frac{\partial\left(\log \frac{1}{E}\right)}{\partial \nu} d\sigma \qquad \Bigg| \qquad (d\sigma)_x = \frac{\cos \vartheta \cdot d\sigma}{E^2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{E}\right)}{\partial \nu} d\sigma$$

die mit ε multiplicirte *scheinbare Grösse* des Elementes $d\sigma$ für einen in x befindlichen Beobachter, wobei $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ ist, je nachdem jener Beobachter die positive oder negative Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat.

Diese Formeln linker und rechter Hand (d. i. für Ebene und Raum) können unter Anwendung der schon früher (Seite 257 dieses Referates) festgesetzten Collectivbezeichnungen in folgende zusammengezogen werden:

$$W = \int \mu (d\sigma)_x,$$

$$(d\sigma)_x = \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma = \frac{\cos \vartheta \cdot d\sigma}{E^h}.$$

Das Potential einer Doppelbelegung ist also $= \int \mu (d\sigma)_x$, d. i. gleich der Summe der scheinbaren Grössen der einzelnen Curven- resp. Flächen-

---

$$(\gamma) \qquad R_1' = R_1 - \lambda, \quad R_2' = R_2 - \lambda;$$

denn es ist zu beachten, dass σ' auf der positiven Seite von σ liegen soll. Durch Substitution der Werthe (γ) in (β) folgt:

$$(\delta) \qquad \frac{\zeta}{\zeta'} = \frac{d\sigma'}{d\sigma} = 1 - \lambda\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \lambda^2 \frac{1}{R_1 R_2},$$

oder weil λ unendlich klein ist:

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\zeta}{\zeta'} = \frac{d\sigma'}{d\sigma} = 1 - \lambda\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

oder umgekehrt:

$$(\zeta) \qquad \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{d\sigma}{d\sigma'} = 1 + \lambda\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Diese letzte Formel (ζ) ist aber identisch mit der von *Weyr* a. a. O. gegebenen.

elemente, jede solche scheinbare Grösse noch multiplicirt mit dem zugehörigen Werthe des Momentes, und ferner noch multiplicirt mit ε (wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, wie vor wenig Augenblicken näher angegeben wurde).

Es verhält sich mit dem Potential W einer Doppelbelegung ähnlich wie mit den Differentialquotienten einer gegebenen Function $f(\alpha)$. Um nämlich den Begriff des Differentialquotienten $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$ zu *erklären*, sind *zwei* Punkte α und $\alpha + d\alpha$ erforderlich, während bei Angabe seines *fertigen* Werthes [der nach Lagrange mit $f'(\alpha)$ bezeichnet wird] nur *ein* Punkt α in Betracht kommt. Hiermit analog sind zur *Erklärung* jenes Potentials W *zwei* Flächen σ und σ' erforderlich, während bei Angabe seines *fertigen* Werthes nur *eine* Fläche σ in Betracht kommt.

Die vorstehenden Formeln repräsentiren diesen *fertigen* Werth von W, und enthalten demgemäss nur die *eine* Fläche σ. *Ueberhaupt wird im Folgenden nur von diesem fertigen Begriff die Rede sein.*

Doppelbelegungen vom Momente Eins.

Versteht man unter σ eine *geschlossene* Curve oder Fläche mit positiver innerer Seite, ferner unter

$$W_x = \int (d\sigma)_x$$

das Potential einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente *Eins*, so ist (wie zum Theil schon von Gauss nachgewiesen wurde; vgl. die allg. Lehrsätze Art. 22):

$$\begin{aligned} W_a &= 0, \\ W_s &= h\pi - \vartheta_s, \\ W_i &= 2h\pi, \end{aligned}$$

wo a, s, i Punkte bezeichnen, welche resp. *ausserhalb*, *auf* und *innerhalb* σ liegen. Lässt man also den variablen Punkt x in der Richtung von Aussen nach Innen die gegebene Curve oder Fläche an irgend einer Stelle s durchschreiten, so wird das Potential W_x zwei kurz auf einander folgende sprungweise Veränderungen erleiden; denn es wird in *dem* Augenblick, wo der von Aussen kommende Punkt die Curve oder Fläche erreicht, plötzlich von 0 auf $h\pi - \vartheta_s$, und unmittelbar darauf in *dem* Augenblick, wo der Punkt, nach Aussen strebend, die Curve oder Fläche verlässt, von $h\pi - \vartheta_s$ auf $2h\pi$ anwachsen. Mithin ist der eine Sprung von der Grösse $h\pi - \vartheta_s$, der andere von der Grösse $h\pi + \vartheta_s$; wobei zu erinnern, dass die Grösse ϑ_s im Allgemeinen (nämlich für jeden Punkt s, der weder Eck- noch Kantenpunkt ist) den Werth Null hat. —

Doppelbelegungen von beliebig gegebenem Moment.

Ist das Moment μ der Doppelbelegung eine beliebig gegebene Function des Ortes auf σ, so besitzt das zugehörige Potential

$$W_x = \int \mu (d\sigma)_x ,$$

wie der Verf. zeigt, analoge Discontinuitäten. Lässt man nämlich wiederum den variablen Punkt x die betrachtete Curve oder Fläche σ an irgend einer Stelle s durchschreiten, und bezeichnet man den Werth der Function μ an dieser Stelle mit μ_s, so wird das Potential in *dem* Augenblick, wo der von Aussen kommende Punkt die Curve oder Fläche erreicht, plötzlich um $(h\pi - \vartheta_s)\mu_s$ wachsen, und unmittelbar darauf in *dem* Augenblick, wo der Punkt, nach Innen strebend, die Curve oder Fläche verlässt, nochmals und zwar um $(h\pi + \vartheta_s)\mu_s$ anwachsen. — Es besitzt also das Potential auf der Curve oder Fläche σ im Ganzen *dreierlei* Werthsysteme, nämlich ein erstes auf der *äusseren* Seite von σ, ein zweites direct auf σ *selber*, endlich ein drittes auf der *innern* Seite von σ.

Benennt man sämmtliche Punkte der Ebene oder des Raumes, je nachdem sie *ausserhalb*, *auf* oder *innerhalb* σ liegen, resp. mit a, s, und i, und die in diesen Punkten vorhandenen Potentialwerthe resp. mit W_a, W_s und W_i, so besteht offenbar das erste jener drei Werthsysteme aus den Grenzwerthen der W_a, das zweite direct aus den W_s selber, endlich das dritte aus den Grenzwerthen der W_i. Bedient man sich nun, was die genannten Grenzwerthe betrifft, der Symbole W_{as} und W_{is}, indem man unter W_{as} den Werth in einem Punkte a versteht, welcher dem Punkte s *unendlich nahe* liegt, andererseits unter W_{is} den Werth in einem Punkte i, der ebenfalls *unendlich nahe* an s liegt, so kann man offenbar die vorhin angegebenen sprungweisen Aenderungen oder (was dasselbe ist) die Beziehungen zwischen den dreierlei Werthsystemen W_a, W_s, W_i durch folgende Formeln ausdrücken:

$$W_{as} = W_s - (h\pi - \vartheta_s)\mu_s ,$$
$$W_{is} = W_s + (h\pi + \vartheta_s)\mu_s ;$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$W_{is} - W_{as} = 2h\pi\mu_s .$$

In grösserer Vollständigkeit lauten die Resultate, zu denen der Verf. im gegenwärtigen Capitel gelangt, folgendermassen:

Bezeichnet σ eine geschlossene Curve oder Fläche mit positiver innerer Seite, und denkt man sich auf σ eine Doppelbelegung ausge-

breitet, deren Moment μ überall stetig ist, so wird das von dieser Doppelbelegung auf einen variablen Punkt x ausgeübte Potential:

$$W_x = \int \mu (d\sigma)_x$$

folgende Eigenschaften haben.

Erste Eigenschaft: Die von s abhängende Function:

$$W_s + \varepsilon_s \mu_s \tag{1}$$

ist auf σ überall stetig.

Zweite Eigenschaft: Die Werthe W_a bilden ein stetig zusammenhängendes System, dessen Grenzwerthe W_{as} mit den directen Werthen W_s durch die Relation verknüpft sind:

$$W_{as} = (W_s + \varepsilon_s \mu_s) - h\pi\mu_s. \tag{2}$$

Dritte Eigenschaft: Die Werthe W_i bilden ein stetiges System, dessen Grenzwerthe W_{is} mit den directen Werthen W_s durch die Relation verbunden sind:

$$W_{is} = (W_s + \varepsilon_s \mu_s) + h\pi\mu_s. \tag{3}$$

Vierte Eigenschaft: Bezeichnet p eine beliebig gegebene Richtung, so sind die Grenzwerthe von $\frac{\partial W_a}{\partial p}$ und $\frac{\partial W_i}{\partial p}$ unter einander identisch, was angedeutet werden mag durch die Formel:

$$\frac{\partial W_{as}}{\partial p} = \frac{\partial W_{is}}{\partial p}. \tag{4}$$

Beiläufig werden vom Verf. noch folgende Sätze mitgetheilt, als gültig für eine beliebig gegebene geschlossene Curve oder Fläche σ.

Erster Satz. — Die Gesammtmasse einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung ist stets $= 0$.

Zweiter Satz. — Ist das Potential W einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung für alle Punkte *a constant* (mithin $= 0$), so wird ihr Moment ebenfalls durch eine *Constante*, und zwar durch eine Constante von ganz *un*bestimmtem Werthe dargestellt sein.

Dritter Satz. — Ist das Potential W einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung für alle Punkte *i constant*, etwa $= K$, so wird ihr Moment ebenfalls *constant*, und zwar $= \frac{K}{2h\pi}$ sein.

Vierter Satz. — Soll eine Doppelbelegung von σ der Art sein, dass ihr Potential auf der *äussern* Seite von σ *vorgeschriebene* Werthe f besitzt, so ist hierdurch ihr Moment bis auf eine additive Constante *eindeutig* bestimmt; — ausser im singulären Fall.

Fünfter Satz. — Soll eine Doppelbelegung von σ der Art sein, dass ihr Potential auf der *innern* Seite von σ *vorgeschriebene* Werthe f besitzt, so ist hierdurch ihr Moment *eindeutig* bestimmt.

Beiläufige Bemerkungen, betreffend den erweiterten Gauss'schen Satz des arithmetischen Mittels*).

Es sei σ eine gegebene geschlossene Curve oder Fläche mit positiver innerer Seite, deren positive oder innere Normale ν heissen mag, ferner:

$$W_x = \int \mu_\sigma (d\sigma)_x = \int \mu_\sigma \frac{\partial T_{\sigma x}}{\partial \nu} d\sigma \tag{5}$$

das Potential einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente μ. Ferner seien γ, Γ, Π die bekannten der natürlichen Belegung von σ zugehörigen Grössen.

Daneben sei provisorisch eingeführt eine zweite geschlossene Curve oder Fläche s, welche entweder *vollständig ausserhalb* oder *vollständig innerhalb* σ liegt. Und für diese zweite Curve oder Fläche s mögen c, C, P dieselbe Bedeutung haben wie γ, Γ, Π für σ.

Bezeichnet s irgend einen Punkt der Curve oder Fläche s, ferner ds ein bei diesem Punkt markirtes unendlich kleines Element derselben, so folgt aus (5):

$$W_s = \int \mu_\sigma \frac{\partial T_{\sigma s}}{\partial \nu} d\sigma , \tag{6}$$

und hieraus durch Multiplication mit $c_s ds$ und Integration:

$$\int W_s c_s ds = \int d\sigma \mu_\sigma \left(\int ds\, c_s \frac{\partial T_{s\sigma}}{\partial \nu} \right). \tag{7}$$

Erster Fall: s liegt vollständig *ausserhalb* σ. Alsdann ist offenbar:

$$\int ds\, c_s T_{s\sigma} = C,$$

mithin:

$$\int ds\, c_s \frac{\partial T_{s\sigma}}{\partial \nu} = 0;$$

wodurch die Formel (7) übergeht in:

$$\int W_s c_s ds = 0. \tag{8}$$

Denkt man sich nun jene äussere Curve oder Fläche s näher und näher an σ herangezogen, bis sie schliesslich mit σ identisch wird, so nimmt die Formel (8) folgende Gestalt an:

$$\int W_{a\sigma} \gamma_\sigma d\sigma = 0. \tag{9}$$

Denn c verwandelt sich in γ, und gleichzeitig verwandeln sich die Werthe W_s in diejenigen Werthe $W_{a\sigma}$, welche W auf der *äussern* Seite von σ besitzt.

---

*) Diese Bemerkungen sind in dem Neumann'schen Werk *nicht* enthalten.

Zweiter Fall: s liegt vollständig *innerhalb* σ. Alsdann ist offenbar:

$$\int ds\, c_s T_{s\sigma} = P_\sigma ,$$

mithin:

$$\int ds\, c_s \frac{\partial T_{s\sigma}}{\partial \nu} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial \nu} = - \frac{\partial P_\sigma}{\partial \mathsf{N}} ,$$

wo N die *äussere* Normale von σ bezeichnet. Somit folgt aus (7):

$$\int W_s c_s ds = - \int d\sigma \mu_\sigma \frac{\partial P_\sigma}{\partial \mathsf{N}} , \tag{10}$$

und hieraus, falls man jene innere Curve oder Fläche s näher und näher an σ heranzieht und sie schliesslich mit σ identisch werden lässt:

$$\int W_{i\sigma} \gamma_\sigma d\sigma = - \int d\sigma \mu_\sigma \frac{\partial \Pi_\sigma}{\partial \mathsf{N}} , \tag{11}$$

oder weil $\frac{\partial \Pi_\sigma}{\partial \mathsf{N}} = - 2 h\pi \gamma_\sigma$ ist:

$$\int W_{i\sigma} \gamma_\sigma d\sigma = 2 h\pi \int \mu_\sigma \gamma_\sigma d\sigma . \tag{12}$$

Zusammenfassung. Aus (9) und (12) ergiebt sich folgender Satz: *Bezeichnet σ eine geschlossene Curve oder Fläche mit positiver innerer Seite, ferner γ die Dichtigkeit ihrer natürlichen Belegung, endlich W das Potential einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente μ, so ist:*

$$\begin{aligned} &\int W_{a\sigma} \gamma_\sigma d\sigma = 0 , \\ &\int W_{i\sigma} \gamma_\sigma d\sigma = 2 h\pi \int \mu_\sigma \gamma_\sigma d\sigma , \end{aligned} \tag{13}$$

mithin:

$$\int (W_{i\sigma} - W_{a\sigma}) \gamma_\sigma d\sigma = 2 h\pi \int \mu_\sigma \gamma_\sigma d\sigma . \tag{14}$$

Letztere Formel steht in vollem Einklang mit den allgemeinen Eigenschaften (2), (3). Denn nach (2), (3) ist $W_{i\sigma} - W_{a\sigma} = 2 h\pi \mu_\sigma$.

Fünftes Capitel.

Die Methode des arithmetischen Mittels.

Es handelt sich hier (wie schon zu Anfang des vorhergehenden Capitels näher ausgeführt wurde) um den Existenzbeweis derjenigen Functionen, von welchen in den Theoremen A^{add}., A^{abs}., J^{abs}. die Rede war, sowie auch um den Existenzbeweis der sogenannten *natürlichen Belegung:*

Der Verf. giebt die genannten Existenzbeweise nur unter der Voraussetzung, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges*

und *keine zweisternige* sei; und wir werden daher, bevor wir auf jene Beweise näher eingehen können, uns zunächst mit dieser Ausdrucksweise (zweiter Rang, zweisternig) näher bekannt zu machen haben. Auch wird es zweckmässig sein, einige einleitende Betrachtungen vorangehen zu lassen, welche den Weg, auf dem der Verf. zu seinen Existenzbeweisen gelangt ist, einigermassen andeuten.

Einleitende Betrachtungen.

Es sei σ eine gegebene geschlossene Curve oder Fläche, und

$$(15) \qquad W_x = \int \mu_\sigma (d\sigma)_x$$

das Potential einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente μ. Beschränken wir uns bei diesen einleitenden Betrachtungen auf den besondern Fall, dass σ *frei von Ecken und Kanten* ist, mithin die ε_s sämmtlich $= 0$ sind, so gewinnen die Formeln (2), (3) die einfachere Gestalt:

$$(16) \qquad \begin{aligned} W_{as} &= W_s - h\pi\mu_s, \\ W_{is} &= W_s + h\pi\mu_s. \end{aligned}$$

Setzt man der grösseren Bequemlichkeit willen:

$$(17) \qquad h\pi\mu = f,$$

so gehen die Formeln (15), (16) über in:

$$(18) \qquad W_x = \frac{1}{h\pi} \int f_\sigma (d\sigma)_x,$$

respective in:

$$(19) \qquad \begin{aligned} W_{as} &= W_s - f_s, \\ W_{is} &= W_s + f_s. \end{aligned}$$

Nunmehr bilde man ein Potential W_x', welches zu den Werthen W_σ in derselben Beziehung steht, wie W_x zu den f_σ, sodann ein Potential W_x'', welches zu den W_σ' wieder in der nämlichen Beziehung steht; u. s. w. Mit andern Worten, man bilde nach dem Schema der Formel (18) die auf einander folgenden Functionen:

$$(20) \qquad \begin{aligned} W_x &= \frac{1}{h\pi} \int f_\sigma (d\sigma)_x, \\ W_x' &= \frac{1}{h\pi} \int W_\sigma (d\sigma)_x, \\ W_x'' &= \frac{1}{h\pi} \int W_\sigma' (d\sigma)_x, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Alsdann gelten nach (19) die Relationen:

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
W_{as} &= W_s - f_s,\\
W'_{as} &= W'_s - W_s,\\
W''_{as} &= W''_s - W'_s,\\
W'''_{as} &= W'''_s - W''_s,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

woraus z. B. folgt:

$$
(22)\qquad -(W_{as} + W'_{as} + W''_{as} + W'''_{as}) = f_s - W'''_s.
$$

Nimmt man für den Augenblick an, die Function W'''_s sei auf σ allenthalben ausserordentlich klein, und es differire also der in (22) auf der rechten Seite stehende Ausdruck $(f_s - W'''_s)$ überall nur ausserordentlich wenig von f_s, so wird offenbar

$$
(23)\qquad -(W_a + W'_a + W''_a + W'''_a)
$$

eine Function des variablen Punktes a sein, deren Werthe *auf* σ von den f_s nur äusserst wenig abweichen. Zugleich aber repräsentirt diese Function (ebenso wie ihre einzelnen Glieder W_a, W'_a, etc. etc.) ein Potential, dessen erzeugende Massen *auf* σ ausgebreitet sind. Folglich wird diese Function (23) mit grosser Annäherung all' denjenigen Anforderungen entsprechen, welche im Theorem A^{abs}. (vgl. Seite 271 dieses Referates) an das Potential V_a gestellt wurden.

Aus diesen Ueberlegungen geht mit einiger Wahrscheinlichkeit hervor, dass ein jenen Anforderungen in *voller Strenge* entsprechendes Potential durch die unendliche Reihe:

$$
(24)\qquad V_a = -(W_a + W'_a + W''_a + W'''_a + \cdots \textit{ in inf.})
$$

dargestellt sein wird, falls sich nur nachweisen lässt, dass die auf σ ausgebreitete Function

$$
(25)\qquad W_s^{(n)}
$$

mit wachsendem n gegen *Null* convergirt.

In der That weist der Verf. nach, dass die Function (25), wenn auch nicht gegen *Null*, so doch gegen eine *Constante* convergirt; und gleichzeitig weist er nach, dass die Reihe (24) eine *convergente* ist. In letzterer Beziehung zeigt er, dass die genannte Reihe im Wesentlichen eine geometrische ist, welche fortschreitet nach den Potenzen eines gewissen der gegebenen Curve oder Fläche σ zugehörigen *Parameters* λ*),

---

*) Diesen Parameter λ nennt der Verf. die *Configurationsconstante* der gegebenen Curve oder Fläche. Beispielsweise zeigt er, dass diese Constante λ für einen Kreis $= \frac{1}{2}$, ferner für eine Ellipse $\leqq \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$ ist, falls a die grosse und b die kleine Axe der Ellipse bezeichnet.

und dass dieses λ ein *ächter Bruch* ist. Andererseits zeigt er in ersterer Beziehung, dass sämmtliche Werthe der Function $W_s^{(n)}$ (25) in das Intervall einschliessbar sind*):

$$(26) \qquad C-(G-K)\lambda^{n+1} \leqq W_s^{(n)} \leqq C+(G-K)\lambda^{n+1},$$

wo C, G, K gewisse der vorgeschriebenen Function f eigenthümliche *Constanten* bezeichnen, und dass also sämmtliche Werthe jener Function $W_s^{(n)}$ mit wachsendem n gegen die Constante C convergiren. Jedoch sind all' diese Demonstrationen des Verf. nur von *beschränkter Gültigkeit*, nämlich an die Bedingung geknüpft, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* sei. Was diese Ausdrucksweise besagen will, soll sogleich erläutert werden.

Ueber den Rang einer Curve oder Fläche.

Man kann zwischen *Punkt* und *Stelle* unterscheiden, indem man z. B. von der Ellipse sagt, dass dieselbe mit ihrer Tangente *zwei* Punkte (nämlich zwei einander unendlich nahe Punkte), aber nur *eine* Stelle gemein habe, ferner von der Lemniscate, dass dieselbe mit ihrer Doppeltangente *vier* Punkte, aber nur *zwei* Stellen gemein habe. Ebenso kann man auch, was die Peripherie eines regulären Polygons betrifft, sagen, dass dieselbe mit derjenigen unendlich langen geraden Linie, welche durch zwei aufeinanderfolgende Ecken geht, *unendlich viele* Punkte (nämlich sämmtliche Punkte der betreffenden Seite), aber nur *eine* Stelle gemein habe.

In der That bedient sich der Verf. dieser Ausdrucksweise, indem er jedes *Continuum von Punkten* (einerlei, ob die Anzahl der darin enthaltenen Punkte endlich oder unendlich gross ist) kurzweg als *Stelle* bezeichnet. Gleichzeitig nennt er eine gegebene Curve oder Fläche vom *R^{ten} Range*, wenn sie mit einer unendlich langen geraden Linie, welche Lage man dieser Linie auch zuertheilen mag, niemals mehr als *R Stellen* gemein hat, oder (genauer ausgedrückt) wenn die *grösste Zahl* von Stellen, welche sie mit einer solchen Linie gemein haben kann, $= R$ ist.

Von besonderer Wichtigkeit für die Untersuchungen des Verf. ist der Specialfall $R = 2$. Eine Curve oder Fläche *zweiten* Ranges kann offenbar niemals einspringende Ecken oder Kanten, überhaupt keine einspringenden Theile haben. Oder genauer ausgedrückt:

---

*) Diese Formel (26) ist identisch mit der Formel des Neumann'schen Werkes Seite 188, Nr. 44. Denn bei einer Curve oder Fläche σ, welche (wie hier vorläufig vorausgesetzt wurde) *frei* von Ecken und Kanten ist, wird die Function $W_s^{(n)}$ identisch sein mit $f_s^{(n+1)}$; vgl. das Neumann'sche Werk Seite 166.

Welche Tangente man an eine Curve *zweiten* Ranges auch legen mag, stets werden sämmtliche Punkte der Curve auf *derselben* Seite der Tangente liegen.

Welche Tangentialebene man an eine Fläche *zweiten* Ranges auch legen mag, stets werden sämmtliche Punkte der Fläche auf *derselben* Seite der Tangentialebene liegen.

Als Beispiele von Curven oder Flächen *zweiten* Ranges würden zu erwähnen sein:

die Kreislinie, die Ellipse, die Peripherie eines Rechtecks*), die Peripherie eines regulären Polygons, die Peripherie eines Kreissegmentes, welches theils von einem Kreisbogen, theils von einer geraden Linie begrenzt ist.

die Kugelfläche, die Ellipsoidfläche, die Oberfläche eines Tetraeders, Würfels, Dihexaeders, Granatoeders, Ikosaeders u. s. w., ferner die Oberfläche eines Kugelsegmentes, welches theils von einer Kugelcalotte, theils von einer Kreisfläche begrenzt wird.

Eine geschlossene Curve oder Fläche *zweiten* Ranges würde man zur Noth als eine *überall convexe* Curve oder Fläche bezeichnen können**), nur müsste man alsdann hinzufügen, dass einzelne Theile der Curve oder Fläche *geradlinig*, resp. *eben* sein dürfen.

Die mit sogenannten Sternen behafteten Curven und Flächen.

Einsternige Curven und Flächen.

Lässt sich auf einer gegebenen Curve ein Punkt M markiren von solcher Lage, dass sämmtliche Tangenten der Curve durch M gehen, so mag die Curve einsternig, und M ihr Stern heissen.

Eine einsternige Curve wird daher stets ein *Winkel* sein, nämlich dargestellt sein durch zwei von demselben Punkt auslaufende (begrenzte oder unbegrenzte) gerade Linien.

Lässt sich auf einer gegebenen Fläche ein Punkt M markiren von solcher Lage, dass sämmtliche Tangentialebenen der Fläche durch M gehen, so mag die Fläche einsternig, und M ihr Stern heissen.

Eine einsternige Fläche wird daher stets ein *Kegelmantel* sein, nämlich dadurch erhalten werden, dass man einen von einem gegebenen Punkt ausgehenden (begrenzten oder unbegrenzten) Strahl um seinen Ausgangspunkt in beliebiger Weise sich drehen lässt.

---

*) Ein *beliebiges Viereck* darf *nicht* als Beispiel aufgeführt werden. Denn denken wir uns z. B. ein Viereck mit einspringendem Winkel, so wird die Peripherie dieses Vierecks eine Curve *vierten* Ranges sein.

**) Dieser Bezeichnung hat sich der Verf. früher bedient, namentlich z. B. in den Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., April 1870, Seite 56.

Zweisternige Curven und Flächen.

Lassen sich auf einer gegebenen Curve zwei Punkte M, N markiren von solcher Lage, dass jedwede Tangente der Curve durch einen dieser beiden Punkte geht, so mag die Curve **zweisternig** *heissen, und M, N ihre* **Sterne**.

Ein zweisternige Curve wird daher stets aus *zwei Winkeln* zusammengesetzt, mithin ein *Viereck* sein. Doch kann der eine Winkel des Vierecks 180^0 betragen, wodurch sich alsdann dasselbe in ein *Dreieck* verwandelt. — Beim Viereck liegen die Sterne in zwei gegenüberliegenden Ecken, während beim Dreieck der eine Stern in einer Ecke, der andere in einem beliebigen Punkt der gegenüberliegenden Seite sich befindet.

Lassen sich auf einer gegebenen Fläche zwei Punkte M, N markiren von solcher Lage, dass jedwede Tangentialebene der Fläche durch einen dieser beiden Punkte geht, so mag die Fläche **zweisternig** *heissen, und M, N ihre* **Sterne**.

Eine zweisternige Fläche wird daher stets aus *zwei Kegelmänteln* zusammengesetzt sein. Als Beispiele würden anzuführen sein die Oberfläche desjenigen Körpers, der durch Rotation eines Rhombus um eine Diagonale entsteht, ferner die Oberflächen des *Dihexaeders*, des *Octaeders*, des *Rhomboeders*, des *Parallelepipedums*, des *Würfels*, und endlich auch diejenige des *Tetraeders*. Bei der letzteren Fläche befindet sich der eine Stern in einer Ecke, der andere in einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Seite.

Vielsternige Curven und Flächen.

In ähnlicher Weise könnte man allgemein n-sternige Curven und Flächen definiren. Doch ist solches für unsere Zwecke von keinem Belang.

Der Existenzbeweis für diejenige Function, von welcher das Theorem A^{add}. handelt.

Indem wir nach den eben besprochenen geometrischen Definitionen den eigentlichen Faden unserer Betrachtungen wieder aufnehmen, haben wir uns zunächst des Theorems A^{add}. zu erinnern. Dasselbe lautet: *Sollen die ein Potential U_a erzeugenden Massen* **auf** *oder* **innerhalb** *σ liegen, und eine* **gegebene** *Summe M haben, und sollen ferner die U_s von irgend welchen auf σ vorgeschriebenen Werthen F_s nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden:*

$$U_s = F_s + Const., \tag{27}$$

*so sind hierdurch sämmtliche U_a eindeutig bestimmt**).

---

*) Die hier auftretende additive Constante — sie mag B heissen — kann sofort bestimmt werden mit Hülfe des *erweiterten* **Gauss'schen** *Satzes des arithmetischen Mittels*. Setzt man nämlich in der Formel (27)

Um nun zu zeigen, dass ein diesen Anforderungen entsprechendes Potential U wirklich existire, markiren wir irgendwo *innerhalb* σ einen festen Punkt, denken uns in demselben die *gegebene* Masse M concentrirt, und führen an Stelle von U ein neues Potential V ein, indem wir setzen:

(28) $$V_a = U_a - MT_a;$$

dabei soll MT_a das Potential jenes festen Massenpunktes M auf den variablen Punkt a vorstellen. Hierdurch gewinnt die Anforderung (27) folgende Gestalt:

$$V_s = (F_s - MT_s) + Const.,$$

oder, falls wir zur Abkürzung $F_s - MT_s = f_s$ setzen, folgende:

(29) $$V_s = f_s + Const.$$

Auch die übrigen an U gestellten Forderungen sind auf das neue Potential V leicht übertragbar. So z. B. sollte die Summe der das Potential U erzeugenden Massen den gegebenen Werth M haben. Folglich wird die Summe der das neue Potential V erzeugenden Massen [wie aus (28) ersichtlich] den Werth $M - M$, d. i. den Werth *Null* haben müssen. Jene an U gestellten Anforderungen werden daher, übertragen auf das neue Potential V, folgendermassen lauten:

V_a soll das Potential irgend welcher Massen sein, die auf oder innerhalb σ liegen, und deren Summe Null ist; ferner sollen die Werthe V_s, welche V_a auf σ besitzt, von den daselbst vorgeschriebenen Werthen f_s nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden, d. h. V_a soll der Bedingung

(29) $$V_s = f_s + Const.$$

entsprechen.

Der Verf. zeigt nun, dass man ein diesen Anforderungen entsprechendes Potential V_a wirklich aufzustellen im Stande sei, falls die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* ist, und falls ausserdem die vorgeschriebenen Werthe F oder (was auf

---

$$U_s = F_s + \mathrm{B}$$

für s irgend einen Punkt σ des Elementes $d\sigma$, so erhält man durch Multiplication mit $\gamma_\sigma \, d\sigma$ und Integration:

$$\int U_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \int F_\sigma \gamma_\sigma d\sigma + \mathrm{B} \int \gamma_\sigma d\sigma.$$

Die linke Seite dieser Formel ist aber nach dem genannten Satze $= M\Gamma$, wo M die gegebene Summe der das Potential U_a erzeugenden Massen bezeichnet. Ausserdem ist bekanntlich $\int \gamma_\sigma d\sigma = 1$. Somit folgt:

$$M\Gamma = \int F_\sigma \gamma_\sigma d\sigma + \mathrm{B},$$

mithin:

$$\mathrm{B} = M\Gamma - \int F_\sigma \gamma_\sigma d\sigma.$$

dasselbe hinauskommt) die neu eingeführten Werthe f auf σ *überall stetig* sind. Seine Methode (die wir hier ohne weiteren Beweis mittheilen) ist folgende:

Man nehme die *innere* Seite von σ zur *positiven* und bilde, von den vorgeschriebenen Werthen f ausgehend, gewisse aufeinanderfolgende Functionen $W^{(n)}$, $f^{(n)}$, indem man zur Bildung der $W^{(n)}$ die Formeln der Columne I., andererseits zur Bildung der $f^{(n)}$ ganz nach Belieben die Columne II. oder III. verwendet*):

(30)

I.	II.	III.
$h\pi W_x = \int f_\sigma (d\sigma)_x,$	$W_{as} = f'_s - f_s,$	$W_{is} = f'_s + f_s,$
$h\pi W'_x = \int f'_\sigma (d\sigma)_x,$	$W'_{as} = f''_s - f'_s,$	$W'_{is} = f''_s + f'_s,$
$h\pi W''_x = \int f''_\sigma (d\sigma)_x,$	$W''_{as} = f'''_s - f''_s,$	$W''_{is} = f'''_s + f''_s,$
etc. etc.	etc. etc.	etc. etc.

Die in solcher Weise entstehenden Functionen $f^{(n)}$ oder $f_s^{(n)}$ haben die Eigenschaft, mit wachsendem n gegen eine Constante zu convergiren, was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$f_s^{(\infty)} = C. \tag{31}$$

Nachdem in solcher Weise die Functionen $W^{(n)}$, $f^{(n)}$, sowie die Constante C gefunden sind, kann man nun das gesuchte Potential V augenblicklich angeben. Denn es wird, wie der Verf. nachweist, allen an das Potential V gestellten Anforderungen Genüge geleistet, sobald man setzt:

$$V_a = -(W_a + W'_a + W''_a + W'''_a + \cdots \mathit{in\ inf.}); \tag{32}$$

während gleichzeitig für die in jenen Anforderungen [Formel (29)] auftretende additive *Const.* der Werth resultirt:

$$\mathit{Const} = -C, \tag{33}$$

wo C die in (31) genannte Bedeutung hat.

Auf diese Weise wird also vom Verf. die Existenz des Potentiales V nachgewiesen durch seine wirkliche Aufstellung, jedoch immer nur unter der Voraussetzung, dass die Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges*

---

*) In den Formeln (30) dient x als Collectivbezeichnung für sämmtliche Punkte a, s, i, d. i. für sämmtliche Punkte der Ebene resp. des Raumes. Auch ist daselbst in üblicher Weise $(d\sigma)_x$ für $\frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma$ gesetzt, wo ν die positive Normale von σ bezeichnet. Diese positive Normale ν ist, weil wir als positive Seite von σ die *innere* festgesetzt haben, identisch mit der *innern* Normale.

und *keine zweisternige* sei, und dass die auf σ vorgeschriebenen Werthe f daselbst *stetig* sind.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass das Potential V durch die Reihe (32) als das Potential einer auf σ ausgebreiteten *Doppelbelegung* dargestellt ist, dass man dasselbe aber, vermöge einer Transformation jener Reihe, auch als das Potential einer auf σ ausgebreiteten *einfachen Belegung* darzustellen im Stande ist, und dass sich einfache Formeln ergeben sowohl für das *Moment* jener Doppelbelegung, als auch für die *Dichtigkeit* der einfachen Belegung. (Vgl. das Neumann'sche Werk, Seite 206. Für V ist dort der Buchstabe Φ gebraucht.)

Der Existenzbeweis für die sogenannte natürliche Belegung.

Ein specieller Fall des Theorems A^{add}. lautet: *Sollen die ein Potential Π_a erzeugenden Massen a u f oder i n n e r h a l b σ liegen, und die Summe E i n s haben, und sollen ferner die Π_s constant sein:*

$$\Pi_s = Const., \tag{34}$$

so sind hierdurch sämmtliche Werthe Π_a eindeutig bestimmt.

Dieses specielle Potential Π_a, welches nach Vorschrift der allgemeinen Formeln (30), (31), (32) sofort berechnet werden kann, ist offenbar nichts Anderes als Potential der sogenannten natürlichen Belegung. *Folglich kann die Existenz dieses Potentiales Π, sowie auch die der natürlichen Belegung selber keinem weiteren Zweifel unterliegen*, falls nur die gegebene Curve oder Fläche σ den vorher genannten Bedingungen entspricht, nämlich *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* ist.

Beiläufig sei hier noch aufmerksam gemacht auf einen andern Specialfall des Theorems A^{add}., nämlich auf folgenden: Sollen die ein Potential P_a erzeugenden Massen *auf* oder *innerhalb* σ liegen, und die *gegebene* Summe M haben, und sollen ferner die P_s constant sein:

$$P_s = \text{Const.}, \tag{35}$$

so sind hierdurch sämmtliche Werthe P_a eindeutig bestimmt.

Gleichzeitig bemerkt man, dass dieses eindeutig bestimmte Potential P_a durch das vorhergehende Potential Π_a ausdrückbar ist, nämlich den Werth besitzt:

$$P_a = M\Pi_a. \tag{36}$$

Somit ergiebt sich der Satz:

Es existiren unendlich viele Potentiale P_a, deren erzeugende Massen a u f oder i n n e r h a l b σ liegen, und deren Werthe auf σ c o n s t a n t sind; doch sind all' diese Potentiale von der Form:

$$P_a = M\Pi_a, \tag{37}$$

wo M eine willkührliche Constante bezeichnet, während Π_a das Potential der natürlichen Belegung vorstellt.

Der Existenzbeweis für diejenige Function, von welcher das Theorem A^{abs}. handelt.

Man kann das Theorem A^{abs}. so aussprechen: *Sollen die ein Potential W_a erzeugenden Massen auf oder innerhalb σ liegen, und sollen ferner die W_s vorgeschriebene Werthe F_s besitzen:*

(38) $$W_s = F_s,$$

so sind hierdurch sämmtliche Werthe W_a eindeutig bestimmt, — ausser im singulären Fall.

Um zu zeigen, dass ein diesen Anforderungen entsprechendes Potential W_a stets existirt, setze man:

(39) $$W_a = U_a - K\Pi_a,$$

wo U_a, Π_a die bereits berechneten Potentiale (27), (34) sein sollen, während K eine noch disponible Constante vorstellt. Alsdann wird:

(40) $$W_s = U_s - K\Pi_s.$$

Nun haben aber U_s, Π_s nach (27), (34), falls man die in jenen Formeln enthaltenen Constanten mit B, Γ bezeichnet, die Werthe:

$$U_s = F_s + \mathsf{B},$$
$$\Pi_s = \Gamma.$$

Somit erhält man:

(41) $$W_s = F_s + \mathsf{B} - K\Gamma.$$

Folglich wird W allen gestellten Anforderungen Genüge leisten, sobald man jene noch disponible Constante $K = \frac{\mathsf{B}}{\Gamma}$ setzt, was nur im singulären Fall: $\Gamma = 0$ zu Unzuträglichkeiten führen könnte. — Somit ist dargethan, *dass, abgesehen von diesem singulären Fall*), ein den gestellten Anforderungen entsprechendes Potential W stets existirt,*

---

*) Der *singuläre Fall:*

(I.) $$\Gamma = 0, \text{ d. i. } \Pi_s = 0,$$

erheischt eine besondere Betrachtung. Nach unseren Untersuchungen bei (27) existirt ein Potential U_a, dessen erzeugende Massen *auf* oder *innerhalb* σ liegen, und dessen Werthe *auf* σ der Bedingung entsprechen:

(II.) $$U_s = F_s + \mathsf{B},$$

wo die F_s vorgeschriebene Werthe bezeichnen, während B eine *nicht* gegebene Constante vorstellt. Auch haben wir [vgl. die Note zu (27)] gefunden, dass diese Constante B vermittelst der F_s durch eine Formel darstellbar ist, welche im gegenwärtigen Fall (I.) so lautet:

(III.) $$\mathsf{B} = -\int F_\sigma \gamma_\sigma d\sigma.$$

Wir wollen nun annehmen, das Potential U_a nebst der Constanten B wäre berechnet, und von Neuem uns die Frage vorlegen, ob ein den Anforderungen (38) entsprechendes Potential W_a wirklich existire. Dabei unterscheiden wir zwei Möglichkeiten.

immer vorausgesetzt, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* ist, und dass die vorgeschriebenen Werthe F auf σ *stetig* sind.

Der Existenzbeweis für diejenige Function, von welcher das Theorem J^{abs}. handelt.

Das Theorem J^{abs}. lautet: *Sollen die ein Potential V_i erzeugenden Massen auf oder ausserhalb σ liegen, und sollen ferner die V_s irgend welche vorgeschriebenen Werthe f_s besitzen:*

(42) $$V_s = f_s,$$

so sind hierdurch sämmtliche Werthe V_i eindeutig bestimmt.

Erstens: B *ist Null*, also nach (II.):

$$U_s = F_s.$$

Alsdann wird offenbar das gesuchte Potential W_a direct durch U_a selber, oder allgemeiner durch

(IV.) $$W_a = U_a + K\Pi_a$$

dargestellt sein, wo K eine willkührliche Constante bezeichnet. Denn lässt man a nach s rücken, so verschwindet der letzte Term der Formel (IV.), wie aus (I.) ersichtlich.

Zweitens: B *ist nicht Null*, also nach (II.):

$$U_s = F_s + \mathsf{B},$$

während

$$W_s = F_s$$

sein soll. Hieraus ergiebt sich:

(V.) $$U_s - W_s = \mathsf{B}.$$

Folglich muss $U_a - W_a$ ein Potential sein, dessen erzeugende Massen *auf* oder *innerhalb* σ liegen, und dessen Werthe *auf* σ constant sind. Sämmtliche Potentiale dieser Art sind aber nach Satz (37) von der Form:

$$M\Pi_a,$$

und haben also, wie aus (I.) ersichtlich, *auf σ den Werth Null*, was der zu erfüllenden Bedingung (V.) widerspricht. Folglich existirt *kein* Potential W_a, welches den gestellten Anforderungen Genüge leistet.

Zusammenfassung. Die eben angestellten Ueberlegungen führen mit Rücksicht auf (III.) zu folgendem Satz:

Im singulären Fall: $\Gamma = 0$ existiren je nach Beschaffenheit der vorgeschriebenen Werthe F_s entweder unendlich viele Potentiale W_a, welche den im Theoreme A^{abs}. genannten Anforderungen (38) *entsprechen, oder gar kein solches Potential. Ersteres findet statt, wenn das Integral*

(VI.) $$\int F_\sigma \gamma_\sigma d\sigma$$

Null ist, letzteres, wenn dasselbe einen von Null verschiedenen Werth hat. Letzteres wird, weil γ überall positiv ist, stets eintreten, wenn die vorgeschriebenen Werthe F sämmtlich von einerlei Vorzeichen sind. Auch ist zu bemerken, dass jene im erstern Fall vorhandenen unendlich vielen Potentiale W_a alle nur um Grössen von der Form $M\Pi_a$ verschieden sind, wo M eine willkührliche Constante und Π_a das Potential der natürlichen Belegung vorstellt. [Vgl. Satz (37.)].

Um die Existenz dieses Potentiales nachzuweisen, sind, von den vorgeschriebenen Werthen f aus, wiederum die in (30) angegebenen Functionen $W^{(n)}$, $f^{(n)}$ zu bilden, so wie auch die in (31) angegebene Constante C. *Alsdann wird*, wie der Verf. zeigt, *allen an das Potential V gestellten Anforderungen entsprochen, sobald man setzt:*

$$(43) \quad V_i = C + (W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + (W_i^{IV} - W_i^{V}) + \cdots \text{ in inf.},$$

immer vorausgesetzt, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *zweiten Ranges* und *keine zweisternige* ist, und dass ausserdem die vorgeschriebenen Werthe f auf σ *überall stetig* sind.

Das Potential V ist durch (43) dargestellt als das Potential einer *Doppelbelegung*, deren Moment sich leicht angeben lässt. Beiläufig zeigt der Verf., dass man dieses Potential, *abgesehen von der Constanten C*, auch ausdrücken kann als das Potential einer auf σ ausgebreiteten *einfachen* Belegung, und giebt eine Formel für die betreffende Dichtigkeit (vgl. das Nm. Werk pag. 209; statt V ist dort der Buchstabe Ω gebraucht).

Einige elektrostatische und elektrodynamische Aufgaben.

Dass die oben exponirten Methoden von Bedeutung sind für die bekannten *elektrostatischen* Aufgaben, bedarf keiner Erläuterung. Doch zeigt der Verf., dass dieselben auch von Belang sind für gewisse *elektrodynamische* Aufgaben, dass man nämlich vermittelst jener Methoden folgende beiden Probleme zu lösen vermag:

I. *Auf oder **ausserhalb** σ sollen irgend welche Massen ausgebreitet werden, deren Potential U auf der **innern** Seite von σ der Bedingung entspricht:*

$$(44) \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = f,$$

*wo die f **vorgeschriebene** Werthe bezeichnen, und ν die **innere** Normale von σ vorstellt.* (Vgl. das N. Werk, pag. 216.)

II. *Auf oder **innerhalb** σ sollen irgend welche Massen ausgebreitet werden, deren Potential U auf der **äussern** Seite von σ der Bedingung entspricht:*

$$(45) \quad \frac{\partial U}{\partial \mathsf{N}} = f,$$

*wo die f vorgeschriebene Werthe bezeichnen, und N die **äussere** Normale von σ repräsentirt.* (Vgl. das N. Werk, pag. 218.)

In der einen wie in der andern Aufgabe ist unter σ nach Belieben entweder eine geschlossene *Curve* in der Ebene, oder eine geschlossene *Fläche* im Raum zu verstehen.

Sechstes Capitel.

Ueber die von Beer gegebenen approximativen Methoden.

Schon im Jahre 1856 (Pogg. Annal. Bd. 98, pag. 137) hat *Beer* gewisse Reihenentwicklungen gegeben zur Berechnung derjenigen Functionen, von welchen in den Theoremen $A^{add}.$, $A^{abs}.$, $J^{abs}.$ die Rede ist, ohne indess die Convergenz und Brauchbarkeit dieser Entwicklungen einer weiteren Discussion zu unterziehen. Der Verf. gelangt nun zu dem Resultat, dass diese Entwicklungen in der That convergent und gültig sind, falls nur die gegebene Curve oder Fläche *σ zweiten Ranges* und *keine zweisternige* ist.

Um den Unterschied der Beer'schen Entwicklungen — gegenüber den Neumann'schen — einigermasen zu charakterisiren, sei zunächst bemerkt, dass es sich bei Beer — ebenso wie bei Neumann — wesentlich um zwei Aufgaben handelt, nämlich:

I. um die Aufstellung einer Function, welche den Bedingungen des Theorems $A^{add}.$, oder (was ziemlich auf dasselbe hinauskommt) denen des Theorems $A^{abs}.$ entspricht;

II. um die Aufstellung einer Function, welche den Bedingungen des Theorems $J^{abs}.$ Genüge leistet.

Vermittelst der *Beer*'schen Methoden ist man *eines* dieser Probleme (gleichgültig welches) zu lösen im Stande, sobald die Lösung des *andern* Problemes bereits vorliegt*); so dass also diese Methoden keine wirkliche Lösung der beiden Probleme, sondern immer nur eine Reduction des einen Problems auf das andere darbieten.

Das Problem der magnetischen Induction.

Die vom Verf. zur Lösung dieses Problems gegebene Methode, welche der betreffenden *Beer*'schen Methode nahe verwandt sein dürfte, basirt ebenfalls auf der Theorie der Doppelbelegungen. Ohne hierauf näher einzugehen, sei nur mitgetheilt, was der Verf. über das Gültigkeitsgebiet seiner Methode bemerkt. Er sagt:

Ist der gegebene inducirte Körper begrenzt von einer Fläche $(2N)^{ten}$ Ranges, so wird die in Rede stehende Methode stets convergent und gültig sein, falls nur die Magnetisirungsconstante K des Körpers zur Zahl N in der Beziehung steht:

$$K < \frac{1}{4\pi(N-1)}.$$

Ist mithin $N = 1$, die Fläche also zweiten Ranges, so wird die Methode gültig sein für jeden beliebigen Werth von K.

*) Speciell bei den *elektrostatischen* Problemen, welche *Beer* hauptsächlich im Auge hatte, wird allerdings diese Voraussetzung in der Regel *erfüllt* sein.

Dabei ist zu beachten, dass die vom Verf. benutzte Magnetisirungsconstante K zu der ursprünglich von *Poisson* eingeführten Magnetisirungsconstanten k in der Beziehung steht:

$$K = \frac{3k}{4\pi(1-k)}.$$

Siebentes Capitel.

Weitere Entwicklung der Theorie der Doppelbelegungen.

Bezeichnet σ eine Curve oder Fläche mit festgesetzter positiver Seite, und denkt man sich auf σ eine Doppelbelegung vom Momente μ ausgebreitet, so wird, wie schon erwähnt, das Potential dieser Belegung auf irgend einen Punkt x durch folgende Formel dargestellt:

(1) $$W_x = \int \mu (d\sigma)_x,$$

(vgl. dieses Referat pag. 274). Nachdem im vierten Capitel der Verf. die Theorie solcher Doppelbelegungen für *geschlossene* Curven und Flächen behandelt hat, geht er gegenwärtig zu dem Fall über, dass dieselben *ungeschlossen* sind.

Will man, wenn σ eine *ungeschlossene Curve* ist, über die Gesammtheit der Potentialwerthe (1) eine anschauliche Vorstellung gewinnen, so hat man vor allen Dingen *zweierlei* Werthsysteme zu unterscheiden, das der W_s und das der W_t, indem man sämmtliche Punkte der ganzen unendlichen Ebene, je nachdem sie *auf* oder *ausserhalb* σ liegen, resp. mit s oder t bezeichnet. Denn diese beiden Systeme sind, wie der Verf. zeigt, so gut wie *ohne Zusammenhang*, indem sie fast überall in *unstetiger* Weise zusammenstossen.

Das System der W_s ist, wie der Verf. zeigt, längs der gegebenen Curve überall von stetigem Zusammenhang, ausser in den Eckpunkten derselben. Denkt man sich nämlich eine Function f einerseits für die *Endpunkte* g, h der Curve, andererseits für *alle übrigen* Punkte s der Curve durch die Formeln definirt:

(2) $$\begin{aligned} f_g &= W_g, \\ f_s &= W_s + a_s \mu_s, \\ f_h &= W_h, \end{aligned}$$

so wird diese Function f auf σ *allenthalben* stetig sein. Dabei bezeichnet a_s das supplementare Winkelmass der Curve im Punkte s, und μ_s den daselbst vorhandenen Werth von μ.

Um von dem unstetigen Zusammenstoss der beiden Systeme W_s und W_t eine deutliche Vorstellung zu gewinnen, sind die *Grenzwerthe* der W_t, d. i. diejenigen Werthe in Betracht zu ziehen, welche W_t annimmt, sobald der variable Punkt t der Curve σ unendlich nahe

rückt. Diese Grenzwerthe zerfallen in verschiedene Kategorien. Wir können nämlich erstens den Punkt t einem der beiden *Endpunkte* g, h der Curve sich nähern lassen; die in solcher Weise entstehenden Grenzwerthe seien bezeichnet mit W_{tg} resp. mit W_{th}. Und andererseits können wir den Punkt t irgend einem *intermediären* s (d. i. einem Punkte s, der von den Endpunkten durch irgend welche, wenn auch noch so kleine, Entfernungen getrennt ist) sich nähern lassen; die in solcher Weise entstehenden Grenzwerthe mögen bezeichnet werden mit W_{ts}.

Der Verf. zeigt, dass, entsprechend den unendlich vielen Richtungen, in welchen die Annäherung von t an g erfolgen kann, unendlich viele Grenzwerthe W_{tg} sich ergeben, die aber sämmtlich von der Form sind:

$$W_{tg} = A + B\Delta, \tag{3}$$

wo A, B Constanten sind, während Δ das *Azimuth der Annäherung*, d. i. denjenigen Winkel bezeichnet, unter welchem die unendlich kleine Linie gt im Punkte g gegen die positive Seite der Curve σ geneigt ist. Eine ähnliche Formel gilt natürlich für die W_{th}:

$$W_{th} = A' + B'\Delta', \tag{4}$$

wo A', B', Δ' analoge Bedeutungen haben.

Was andererseits die den *intermediären* Punkten s entsprechenden Grenzwerthe W_{ts} betrifft, so ergiebt sich, dass dieselben an einer gegebenen Stelle s im Ganzen nur *zwei* Werthe haben, von welchen der eine oder andere zur Geltung kommt, je nachdem die in Rede stehende Annäherung von der *negativen* oder *positiven* Seite (der Curve) erfolgt. Der Verf. bezeichnet diese beiden Werthe mit

$$W_{as} \text{ und } W_{is},$$

indem er den Punkt t, je nachdem derselbe von der *negativen* oder *positiven* Seite sich nähert, respective mit a oder i benennt.

Die Resultate, zu denen der Verf. hinsichtlich all' dieser Grenzwerthe W_{tg}, W_{th} und W_{ts} gelangt, lassen sich schliesslich zusammenfassen in folgenden Sätzen:

Lässt man den variablen Punkt t irgend einem intermediären Punkt s von der negativen oder positiven Seite sich nähern, und bezeichnet man denselben im erstern Fall mit a, im letztern mit i, so gelten für die betreffenden Grenzwerthe W_{as} und W_{is} die Formeln:

$$\begin{aligned} W_{as} &= (W_s + \vartheta_s \mu_s) - \pi \mu_s, \\ W_{is} &= (W_s + \vartheta_s \mu_s) + \pi \mu_s, \\ \frac{\partial W_{as}}{\partial p} &= \frac{\partial W_{is}}{\partial p}, \end{aligned} \tag{5}$$

wo p eine beliebig gegebene Richtung vorstellt.

Lässt man ferner den variablen Punkt t einem der beiden Endpunkte, z. B. dem Punkte g sich nähern, so gilt für den betreffenden Grenzwerth W_{tg} die Formel:

$$W_{tg} = W_g + \mu_g(\pi - \Delta), \tag{6}$$

wo Δ das Azimuth der Annäherung, d. i. denjenigen Winkel bezeichnet, unter welchem die unendlich kleine Linie gt im Punkte g gegen die positive Seite der Curve geneigt ist.

Auf die analogen Betrachtungen im *Raume* (über ungeschlossene Flächen) geht der Verf. nicht näher ein.

Achtes Capitel.

Theorie der kanonischen Potentialfunctionen.

Man kann von den „*Potentialfunctionen eines gegebenen Gebietes*" sprechen, indem man — nach dem Vorgange von *Lipschitz* und auch wohl anderer Mathematiker — unter einer solchen Function das Potential irgend welcher Massen versteht, die theils *ausserhalb* theils *auf der Grenze* des gegebenen Gebietes ausgebreitet sind. Diese Potentialfunctionen bilden das eigentliche Thema, um welches alle bisherigen Capitel mehr oder weniger sich drehen. So z. B. wird durch die Methode des arithmetischen Mittels (wenigstens in vielen Fällen) die Berechnung derjenigen Potentialfunction eines gegebenen Gebietes ermöglicht, welche auf der Grenze desselben mit daselbst vorgeschriebenen Werthen entweder vollständig oder bis auf eine additive Constante übereinstimmt. Während nun aber bisher jene vorgeschriebenen Werthe immer als *stetig* vorausgesetzt wurden, mag gegenwärtig angenommen werden, dass dieselben *unstetig* seien, und in Ueberlegung gezogen werden, ob vielleicht dieser zweite Fall auf den ersten sich reduciren lasse. Um die Frage genauer zu formuliren, betrachtet der Verf. ein bestimmtes Beispiel.

Es sei σ eine stetig gebogene geschlossene Curve, ferner $\mathfrak{J}$ das Gebiet innerhalb σ, und es sei irgend welche Methode $\mathfrak{M}$ bekannt*), mit Hülfe deren man die Potentialfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$ für *stetig* gegebene Grenzwerthe wirklich zu berechnen vermag. — Es fragt sich, ob man alsdann jene Potentialfunctionen auch für solche Grenzwerthe f zu bilden im Stande ist, welche auf σ in einzelnem Punkte mit *endlichen Differenzen* behaftet, sonst aber stetig sind.

Bildet man, um näher hierauf einzugehen, das diesen f entsprechende Integral:

$$U_x = \frac{1}{\pi}\int f\,(d\sigma)_x,$$

*) Eine solche Methode $\mathfrak{M}$ wird z. B. die *Methode des arithmetischen Mittels* sein, falls die Curve σ zweiten Ranges und keine zweisternige ist.

d. i. das Potential einer auf σ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente $\frac{f}{\pi}$, so erkennt man leicht, dass die Werthe U_s von der Unstetigkeit der f_s in keinerlei Weise afficirt, sondern trotzdem *stetig* sind*). Auch erkennt man, dass die U_i zu den U_s in der Beziehung stehen:

$$U_{is} = U_s + f_s; \quad \text{(vgl. dieses Referat, Seite 277).}$$

so dass also die Stetigkeit der U_s sich unmittelbar überträgt auf die $(f_s - U_{is})$. Folglich wird man mit Hülfe der Methode $\mathfrak{M}$ diejenige Potentialfunction V_i des Gebietes $\mathfrak{J}$ zu berechnen im Stande sein, welche auf σ die Werthe $(f_s - U_{is})$ besitzt, also der Relation

$$V_{is} = f_s - U_{is}$$

entspricht. Giebt man aber dieser Relation die Gestalt:

$$V_{is} + U_{is} = f_s,$$

so erkennt man sofort, dass $(V_i + U_i)$ die eigentlich gesuchte Potentialfunction repräsentirt, nämlich diejenige, deren Grenzwerthe mit den vorgeschriebenen f identisch sind.

Die vorhin aufgeworfene Frage ist also bejahend zu beantworten. Mit andern Worten: *Bezeichnet σ eine überall stetig gebogene geschlossene Curve, ferner $\mathfrak{J}$ das Gebiet innerhalb σ, und ist man im Besitz irgend welcher Methode zur Bildung der Potentialfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$ für vorgeschriebene stetige Grenzwerthe, so wird man diese Functionen auch für solche Grenzwerthe zu bilden im Stande sein, welche auf σ in einzelnen Punkten mit endlichen Differenzen behaftet, sonst aber stetig sind.* — Uebrigens hat der Verf. diesen Satz im gegen-

---

*) Um diese Behauptung zu rechtfertigen, bemerke man zunächst, dass das Integral U_x, ausführlicher geschrieben, so lautet:

$$U_x = \frac{1}{\pi} \int \frac{f \cos \vartheta \cdot d\sigma}{E}, \quad \text{(vgl. dieses Referat, Seite 274).}$$

Sodann beschreibe man um irgend einen Punkt s_0 der Curve σ eine kleine Kreislinie, durch welche σ in einen innern Theil σ' und einen äussern Theil σ'' zerfällt, von welchen der erstere, bei hinreichender Kleinheit der Kreislinie, als *geradlinig* betrachtet werden kann; denn die Curve σ ist nach gemachter Voraussetzung überall von *stetiger Biegung*. Bildet man nun das Integral U_x für irgend einen auf σ, und zwar auf σ' gelegenen Punkt s, so zerfällt dasselbe in zwei Theile, entsprechend den Theilen σ' und σ'':

$$U_s = U_s' + U_s''.$$

Da σ' als *geradlinig* betrachtet werden darf, so erkennt man sofort, dass der Winkel ϑ in allen Elementen des Integrals U_s' gleich 90^0, mithin U_s' selber gleich 0 ist; und erhält also:

$$U_s = U_s'';$$

woraus ersichtlich, dass U_s bei einer kleinen Bewegung des Punktes s in *stetiger* Weise variirt. W. z. z. w.

wärtigen Capitel mit grösserer Strenge und zugleich auch mit grösserer Allgemeinheit bewiesen, nämlich gezeigt, dass derselbe auch dann in Kraft bleibt, wenn die gegebene Curve σ *nicht* stetig gebogen, sondern mit irgend welchen Ecken behaftet ist.

Vor allen Dingen fragt es sich, ob die behandelte Aufgabe eine völlig bestimmte ist, ob also eine Potentialfunction W_i des Gebietes $\mathfrak{J}$ durch Angabe ihrer Grenzwerthe f *eindeutig* bestimmt sei, — immer verausgesetzt, dass diese f keine anderen Unstetigkeiten haben, als solche, die in einzelnen Differenzpunkten bestehen. Der Verf. zeigt, dass solches der Fall ist, sobald man noch gewisse den einzelnen Differenzpunkten entsprechende Bedingungen hinzufügt. Diese *accessorischen* Bedingungen sind leicht angebbar. Bezeichnet nämlich g irgend einen der in Rede stehenden Differenzpunkte, und sind f_1 und f_2 die in g zusammenstossenden Werthe von f, so besteht die dem Punkte g entsprechende *accessorische* Bedingung darin, dass alle innerhalb eines um g beschriebenen kleinen Kreises befindlichen Werthe W_i durch Verkleinerung dieses Kreises theils in das Intervall $f_1 \cdots f_2$ hinein, theils beliebig nahe an dasselbe heranziehbar sind.

Analoges ist zu bemerken für das *ausserhalb* σ gelegene Gebiet $\mathfrak{A}$. Um die Behandlung des Gebiets $\mathfrak{A}$ mit der des Gebiets $\mathfrak{J}$ möglichst *conform* zu machen, empfiehlt es sich, den Begriff der Potentialfunction ein wenig zu modificiren. Für diesen modificirten Begriff benutzt der Verf. das Epitheton: „*kanonisch*". Und zwar versteht er unter einer *kanonischen Potentialfunction* des Gebietes $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{J}$ eine solche, welche abgesehen von einer *additiven Constanten* das Potential irgend welcher ausserhalb oder auf der Grenze des gegebenen Gebiets ausgebreiteter Massen von der Summe *Null* ist.

Neuntes Capitel.

Ueber gewisse combinatorische Methoden.

Murphy hat bekanntlich eine combinatorische Methode angegeben, durch welche die elektrostatischen Probleme für ein System von beliebig vielen Conductoren auf diejenigen Probleme reducirt werden, welche den *einzelnen* Conductoren entsprechen. Diese Methode beruht im Wesentlichen auf zwei Sätzen, von denen der eine darin besteht,

(1) *dass die auf einem zur Erde abgeleiteten Conductor durch einen elektrischen Massenpunkt* (—1) *inducirte Vertheilung stets* ***monogen*** *und zwar positiv ist*;

während der andere dahin lautet,

(2) *dass die eben genannte Belegung ihrer Gesammtmasse nach stets* ***kleiner*** *als* 1 *ist*.

Um an diese *Murphy*'sche Methode kurz zu erinnern, mag folgende

Aufgabe in Betracht gezogen werden: Zwei resp. von den Flächen α und β begrenzte Conductoren sind in solcher Weise mit Elektricität geladen, dass das elektrische Gesammtpotential V auf α den constanten Werth A, andererseits auf β den Werth *Null* hat. Es sollen für diesen Fall die elektrischen Belegungen der beiden Conductoren, sowie auch diejenigen Werthe ermittelt werden, welche das Potential V in beliebigen Punkten des Raumes besitzt.

Um diese Aufgabe nach der Murphy'schen Methode zu behandeln, betrachte man zunächst den Conductor α für sich allein, und bestimme diejenige Belegung Δ_α dieses Conductors, deren Potential U auf α den vorgeschriebenen constanten Werth A hat, was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$U_\alpha = A.$$

Sodann bestimme man diejenige Belegung Δ'_β, welche die Belegung Δ_α auf den Conductor β induciren würde, falls derselbe zur Erde abgeleitet wäre. Das Potential U' dieser Belegung Δ'_β wird alsdann auf β, abgesehen von entgegengesetzten Vorzeichen, identisch sein mit U, was angedeutet werden mag durch

$$U'_\beta = - U_\beta,$$

Hierauf bestimme man diejenige Belegung Δ''_α, welche durch die Belegung Δ'_β auf dem Conductor α hervorgerufen werden würde, falls derselbe zur Erde abgeleitet wäre. Das Potential U'' dieser Belegung Δ''_α wird alsdann auf α, abgesehen vom entgegengesetzten Vorzeichen, identisch mit U' sein, also der Formel entsprechen:

$$U''_\alpha = - U'_\alpha.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergiebt sich folgendes System von Formeln:

$$(3)\qquad \begin{array}{ll} U_\alpha = A, & U'_\beta = - U_\beta, \\ U''_\alpha = - U'_\alpha, & U'''_\beta = - U''_\beta, \\ U^{\text{IV}}_\alpha = - U'''_\alpha, & U^{\text{V}}_\beta = - U^{\text{IV}}_\beta, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Und mit Hülfe dieser Formeln erkennt man leicht, dass das *eigentlich gesuchte Potential* V den Werth hat:

$$(4)\qquad V = U + U' + U'' + U''' + \cdots \text{ in inf.};$$

denn aus jenen Formeln (3) folgt sofort, dass V auf α den Werth A, andererseits auf β den Werth *Null* hat. Zugleich erkennt man, dass die *gesuchten Belegungen* E_α und E_β der beiden Conductoren die Werthe haben:*)

*) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass die Grössen Δ, E die *Dichtigkeiten* der in Rede stehenden Belegungen sein sollen.

$$(5)\qquad \begin{aligned} E_\alpha &= \Delta_\alpha + \Delta_\alpha'' + \Delta_\alpha^{\text{IV}} + \cdots \text{ in inf.},\\ E_\beta &= \Delta_\beta' + \Delta_\beta''' + \Delta_\beta^{\text{V}} + \cdots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Auch erkennt man, und zwar mit Hülfe der Sätze (1), (2), dass die Reihen (5) unter allen Umständen *convergent* sind, und dass also Gleiches auch gilt von der Reihe (4).

Diese Murphy'sche Methode ist auf die analogen Probleme der Ebene nicht mehr anwendbar, weil die Sätze (1), (2), wie der Verf. zeigt, *daselbst unrichtig werden.* Aus diesem Grunde entwickelt der Verf. eine etwas andere Methode, welche von diesem Uebelstande frei ist, nämlich in ganz conformer Weise Anwendung findet auf die Probleme des Raumes, wie auf die der Ebene.

Ausserdem giebt der Verf. eine im Ganzen ähnliche Methode (oder vielmehr *zwei* solche Methoden) für den Fall an, dass die beiden Flächen α und β *einander schneiden.* Es handelt sich alsdann, falls z. B. α und β Kugelflächen sind, um die Lösung der elektrischen Probleme für den von diesen beiden Kugelflächen begrenzten *linsen*förmigen Körper.

Anhang.

Erweiterung einiger Untersuchungen von Green und Thomson.

Dieser Anhang enthält, wie schon aus der Ueberschrift hervorgeht, zwei ziemlich differente Betrachtungen.

Die Green'sche Function und die Green'sche Massenbelegung.

Repräsentirt σ eine geschlossene Curve oder Fläche, und j einen festen Punkt *innerhalb* σ, so versteht man bekanntlich unter der *Green'schen Massenbelegung* von σ diejenige, welche mit Bezug auf alle *äussere* Punkte äquipotential ist mit einer in j concentrirten Masse Eins. Gleichzeitig versteht man unter der *Green'schen Function* das Potential der genannten Massenbelegung auf irgend welchen innern Punkt i. Der Verf. bezeichnet die Dichtigkeit jener Belegung in irgend einem Punkt σ und den Werth der Green'schen Function für den Punkt i respective mit η_σ und G_i oder (weil beide Grössen abhängig sind von dem anfangs gewählten festen Punkt j) mit η_σ^j und G_i^j.

In analoger Weise kann man von derjenigen *Green'schen Belegung* und *Green'schen Function* sprechen, welche einem festen Punkt a *ausserhalb* σ entsprechen. In diesem Falle bezeichnet der Verf. den Werth der Dichtigkeit in einem Punkte σ, und den Werth der genannten Function in irgend einem *äussern* Punkte a resp. mit η_σ^a und G_a^α.

Solches festgesetzt, ist bekanntlich (wie wenigstens für den Fall des Newton'schen Potentials schon Green gezeigt hat):

$$(1) \qquad G_i^j = G_j^i \quad \text{und} \quad G_a^\alpha = G_\alpha^a;$$

so dass man diese Functionen einfacher mit G_{ij} und $G_{a\alpha}$ benennen kann.

Der Verfasser zeigt nun, dass für die *Green'schen* Belegungen η_σ^j und η_σ^α gewisse Sätze gelten, die vollständig analog demjenigen sind, der früher — unter dem Namen des erweiterten Gauss'schen Satzes — von ihm aufgestellt wurde mit Bezug auf die *natürliche* Belegung γ_σ.

Um näher hierauf einzugehen, sei V das Potential eines beliebigen Massensystemes, dessen einzelne Massenelemente, je nachdem sie *ausserhalb* oder *innerhalb* σ liegen, respective mit m oder μ bezeichnet werden mögen. Es sei also für einen beliebigen Punkt x:

$$(2) \qquad V_x = \sum(\mu T_{\mu x}) + \sum(m T_{m x}),$$

wo T die früher (Seite 257 dieses Referates) festgesetzte Bedeutung hat. Alsdann drückt jener erweiterter Gauss'sche Satz (vgl. Seite 268 dieses Referates) sich durch die Formel aus:

$$(3) \qquad \int V_\sigma \gamma_\sigma \, d\sigma = \sum(m \Pi_m) + \sum(\mu \Gamma).$$

Und in analoger Weise stellen die neuen Sätze für die *Green'schen* Belegungen sich durch folgende Formeln dar:

$$(4) \qquad \int V_\sigma \eta_\sigma^\alpha \, d\sigma = \sum(m G_{m\alpha}) + \sum(\mu T_{\mu\alpha}),$$

$$(5) \qquad \int V_\sigma \eta_\sigma^j \, d\sigma = \sum(m T_{mj}) + \sum(\mu G_{\mu j}).$$

Sind die m sämmtlich *Null*, so verschwindet in Gleichung (4) auf der rechten Seite das erste Glied, während das zweite mit Rücksicht auf (2) in V_α übergeht; so dass man zu der bekannten Formel gelangt:

$$(4.\text{a}) \qquad \int V_\sigma \eta_\sigma^\alpha \, d\sigma = V_\alpha .$$

Und sind andererseits die μ sämmtlich *Null*, so verschwindet in Gleichung (5) auf der rechten Seite das zweite Glied, während das erste, mit Rücksicht auf (2), in V_j übergeht; so dass man die ebenfalls bekannte Formel erhält:

$$(5.\text{a}) \qquad \int V_\sigma \eta_\sigma^j \, d\sigma = V_j .$$

Uebrigens sind die Eigenschaften der Green'schen Belegungen in der *Ebene* und im *Raume* d. h. in der Theorie des Logarithmischen und des Newton'schen Potentials *nicht* durchweg einander entsprechend. So sind z. B. sämmtliche Werthe der Function η_σ^α im *Raume* positiv, *nicht* aber in der *Ebene*. Ferner ist die Gesammtmasse der Belegung η_σ^α (welche sich ausdrückt durch das Integral $\int \eta_\sigma^\alpha \, d\sigma$) im

Raume stets kleiner als Eins, höchstens gleich Eins, *nicht* aber in der *Ebene*.

Andererseits sind die Werthe der Function η_σ^j, im Raume wie in der Ebene, sämmtlich positiv. Auch ist die Gesammtmasse der Belegung η_σ^j (d. i. das Integral $\int \eta_\sigma^j \, d\sigma$), im Raume wie in der Ebene, stets gleich Eins.

Thomson's Methode der reciproken Radien.

Der Verf. zeigt, dass diese Methode nicht nur für das Newton'sche Potential im Raume, sondern ebenso auch für das Logarithmische Potential in der Ebene wichtige Resultate ergiebt. Auch theilt der Verf. beiläufig einen neuen Satz über *correspondirende Kugelflächen* mit.

Um auf diesen letztern näher einzugehen, bezeichne (o, H) eine gegebene Kugelfläche vom Centrum o und Halbmesser H. Lässt man nun von o einen Strahl ausgehen, und markirt auf demselben irgend zwei der Relation

$$(1) \qquad (o\,x)\,(o\,\xi) = H^2$$

entsprechende Punkte x, ξ, so heisst bekanntlich jeder von diesen beiden Punkten das *Spiegelbild* des andern in Bezug auf die Kugel (o, H). Auch pflegt man zwei solche Punkte kurzweg *correspondirende* oder *conjugirte* Punkte zu nennen. — Sind zwei Paare correspondirender Punkte x, ξ und y, η gegeben, so ist nach (1):

$$(2) \qquad (ox)\,(o\xi) = (oy)\,(o\eta) = H^2,$$

und folglich

$$(3) \qquad \Delta(oxy) \backsim \Delta(o\eta\xi).$$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt sofort:

$$(4) \qquad \frac{(xy)}{(\xi\eta)} = \frac{(ox)}{(o\eta)} = \frac{(oy)}{(o\xi)} = \sqrt{\frac{(ox)\,(oy)}{(o\xi)\,(o\eta)}}.$$

Der Verf. zeigt nun, dass diese Relationen (4) gültig bleiben, wenn man die Punkte y, η durch zwei *einander correspondirende Kugelflächen* s, σ ersetzt, dass nämlich die Formeln gelten:

$$(5) \qquad \frac{(xs)}{(\xi\sigma)} = \frac{(ox)}{(o\sigma)} = \frac{(os)}{(o\xi)} = \sqrt{\frac{(ox)\,(os)}{(o\xi)\,(o\sigma)}};$$

nur sind in diesem Fall unter (os), (xs) und $(o\sigma)$, $(\xi\sigma)$ die von den Punkten o, x, ξ an s resp. σ gelegten *Tangenten* zu verstehen, jede Tangente gerechnet von ihrem Ausgangspunkt bis zum Berührungspunkt.

Ueber die Polar-Hexaeder bei den Flächen dritter Ordnung.

Von

L. Cremona in Rom.

(Am 19. September 1877 der Naturforscherversammlung in München vorgelegt.)

Wenn

(1) $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0,$$

so folgt aus der Identität:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)\,[(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_4 + x_5 + x_6)^2 - (x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6)]$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^3 + (x_4 + x_5 + x_6)^3$$
$$= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3$$
$$+ 3(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + 3(x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4),$$

dass man die Gleichung:

(2) $$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0$$

in jede der *zehn* Formen setzen kann:

(3) $$(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + (x_4 + x_5)(x_5 + x_6)(x_6 + x_4) = 0,$$

. . . .

. . . .,

welche den Combinationen (123) (456) etc. entsprechen.

Die Fläche dritter Ordnung also, welche durch die Gleichung (2) dargestellt ist, besitzt als dreifache Tangentenebenen folgende *fünfzehn*:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 = 0, \quad \cdots, \quad x_5 + x_6 = 0.$$

Dieselben lassen sich zu *zehn* Paaren conjugirter Trieder gruppiren und schneiden sich in den *fünfzehn* Geraden:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_5 + x_6 = 0,$$
$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_5 = 0, \quad x_4 + x_6 = 0,$$

. . . .

. . . .,

von denen jedesmal drei in einer der fünfzehn Ebenen liegen.

Die sechs Ebenen

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 0,\quad x_4 = 0,\quad x_5 = 0,\quad x_6 = 0$$

bilden ein vollständiges *Hexaeder*, dessen paarweis gegenüberstehende *zwanzig* Ecken die Scheitel der soeben genannten zwanzig Trieder sind. Diese zwanzig Scheitel sind also zu vier und vier auf *fünfzehn* Geraden gelegen (den Kanten des Hexaeders), und durch jede dieser Geraden geht eine der dreifachen Tangentialebenen. Durch die nämlichen Kanten verlaufen noch fünfzehn weitere Ebenen:

$$x_1 - x_2 = 0,\quad x_1 - x_3 = 0,\quad \cdots\cdots,\quad x_5 - x_6 = 0,$$

welche, zusammen mit den dreifachen Tangentenebenen, die von den Flächen des Hexaeders eingeschlossenen Winkel harmonisch theilen. Diese fünfzehn neuen Ebenen verlaufen zu drei und drei durch *zwanzig*, paarweise conjugirte, gerade Linien und schneiden sich überdies zu sechs und sechs in *fünfzehn* Punkten; diese zwanzig Geraden und diese fünfzehn Punkte sind den Ecken und den Kanten des Hexaeders einzeln zugeordnet*).

Das Hexaeder ist *polar*, das heisst, es gehört zur Classe der *Polsechsflache*, die Hr. Reye entdeckt und in einer Abhandlung: *Geometrischer Beweis des Sylvester'schen Satzes etc.***) (Nr. 15), beschrieben hat. In der That, man weiss, dass von den Scheiteln zweier conjugirter Trieder jeder der Pol ist für einen Polarkegel, dessen Mittelpunkt der andere Scheitel ist. Aber unser Hexaeder besitzt überdies die Eigenschaft, dass man es unmittelbar construiren kann, wenn man von den 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung solche fünfzehn kennt, welche nach Ablösung einer *Doppelsechs* übrig bleiben.

Nun bilden die 27 Geraden *sechsunddreissig* Doppelsechse. Daher existiren für eine allgemeine Fläche dritter Ordnung 36 Hexaeder, die dem von den Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\cdots$, $x_6 = 0$ gebildeten analog sind, und jedes Hexaeder gehört zu einer Doppelsechs. Das heisst, die 36 Doppelsechse geben die Lösung des folgenden Problems: *man will die Gleichung der allgemeinen Fläche dritter Ordnung unter der Bedingung* (1) *auf die Form* (2) *transformiren.*

Sind $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $U = 0$ die Ebenen zweier conjugirter Trieder, so dass also:

$$PQR + kSTU = 0 \tag{4}$$

die Gleichung der Fläche ist, und will man das Polar-Hexaeder finden, dem die Scheitel der beiden Trieder angehören, so hat man einfach:

---

*) Vgl. meine Abhandlung: Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal (R. Accademia dei Lincei, Roma, 8. April 1877).

**) Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 78.

$$P' = pP\,,\quad Q' = qQ\,,\quad R' = rR\,,$$
$$S' = sS\,,\quad T' = tT\,,\quad U' = uU,$$

zu setzen und nun p, q, $\cdots$ in der Art zu bestimmen, dass identisch

$$P' + Q' + R' + S' + T' + U' = 0 \tag{5}$$

ist, während die Gleichung der Fläche folgende wird:

$$P'Q'R' + S'T'U' = 0.$$

Es sei zu dem Zwecke:

$$T = aP + bQ + cR + dS\,,$$
$$U = a'P + b'Q + c'R + d'S;$$

dann bestimmen sich die Coefficienten p, q, $\cdots$ durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{ll} p + ta + ua' &= 0\,,\\ q + tb + ub' &= 0\,,\\ r + tc + uc' &= 0\,,\\ s + td + ud' &= 0\,,\\ kpqr + stu &= 0\,. \end{array}\right. \tag{6}$$

Eliminirt man hier p, q, r, s, so erhält man eine cubische Gleichung in $\frac{t}{u}$, von deren Wurzeln jede eine Lösung des Problems liefert. Denn

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 = Q' + R' - P', & x_2 = R' + P' - Q', & x_3 = P' + Q' - R',\\ x_4 = T' + U' - S', & x_5 = U' + S' - T', & x_6 = S' + T' - U' \end{array}\right. \tag{7}$$

wird eins der gesuchten Hexaeder sein.

Ein Paar conjugirter Trieder gehört also zu *drei* verschiedenen Hexaedern. In der That, zwei Doppelsechse haben entweder *sechs* oder *vier* gerade Linien gemein. Nennt man nun zwei Doppelsechse *associirt*, wenn sie *sechs* Gerade gemein haben, so ist jede Doppelsechs zu *zwanzig* Doppelsechsen associirt, die unter einander wieder paarweise associirt sind. Drei Doppelsechse, die paarweise associirt sind, enthalten zusammen 18 gerade Linien; die neun übrigen geraden Linien gehören einem Paar conjugirter Trieder an, und dieses findet sich also in drei Hexaedern, welche den drei associirten Doppelsechsen entsprechen. Man hat in dieser Weise **120** Tripel paarweise associirter Doppelsechse, welche zu den 120 Paaren conjugirter Trieder zugehören.

Die Formeln (7) zeigen, dass die Ebenen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 den andern P, Q, R, S, T, U einzeln entsprechen und dass die Trieder $x_1 x_2 x_3$ und PQR mit Bezug auf die Ebene $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ perspectivisch sind. Vermöge der Identität (5) oder (1) unterscheidet sich diese Ebene nicht von $x_4 + x_5 + x_6 = 0$; man hat also nur *zehn* solche Ebenen etc. Es folgt also, dass bei zwei associirten Hexaedern, vermöge der gemeinsamen conjugirten Trieder, die Seitenflächen paar-

weise zusammengeordnet sind. Und aus den Gleichungen (6) schliesst man, dass die drei Ebenen:

$$q_1 Q + r_1 R - p_1 P = 0,$$
$$q_2 Q + r_2 R - p_2 P = 0,$$
$$q_3 Q + r_3 R - p_3 P = 0,$$

welche den drei Wurzeln der cubischen Gleichung für $t : u$ entsprechen, ein Büschel bilden: eine Bemerkung, die selbstverständlich ebenso für die anderen Tripel zusammengehöriger Seitenflächen der drei associirten Hexaeder gilt.

Unsere Hexaeder führen jetzt für die allgemeine Fläche dritter Ordnung, auf der die 27 Geraden bekannt sein sollen, zu einer Construction des *Sylvester'schen Pentaeders.* In der That, betrachten wir zwei Hexaeder, die zwei beliebigen Doppelsechsen entsprechen. Die Developpable dritter Classe, welche die sechs Ebenen des ersten Hexaeders zu Tangentenebenen hat, und die analoge Developpable, welche die Ebenen des anderen Hexaeders berührt, haben nach einem Theorem des Hrn. Reye *fünf* gemeinsame Tangentenebenen, und diese eben sind die Seitenflächen des Sylvester'schen Pentaeders. Man führt die Construction dieser Ebenen auf diejenige der fünf isolirten Schnittpunkte zweier ebener Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt zurück, von denen jede durch den Doppelpunkt der anderen hindurchläuft.

Ueber cyklisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume.

Von J. Lüroth in Karlsruhe.

In einer Arbeit, die im XI. Bande dieser Annalen erschienen ist, habe ich auf geometrischem Wege einige Eigenschaften der cyklisch-projectivischen Punktgruppen auf einer geraden Linie abgeleitet. Die gegenwärtige Abhandlung behandelt die allgemeinere Frage nach den cyklisch-projectivischen Punktgruppen in der Ebene und im Raume und löst die Aufgabe: *in der Ebene (oder im Raume) n reelle Punkte $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ so zu bestimmen, dass es projectivische Transformationen der Ebene (resp. des Raumes) giebt, welche a_1 in a_2, a_2 in a_3, $\cdots a_n$ in a_1 überführen.* Ich werde eine projectivische Transformation der Ebene oder des Raumes (und nur von projectivischen Transformationen ist im Folgenden die Rede), welche die Punkte $abc \cdots$ in die Punkte $a'b'c' \cdots$ überführt, künftig als die Transformation $|abc \cdots; a'b'c' \cdots|$ bezeichnen. Statt des Zeichens $|a_1 a_2 \cdots; a_{p+1} a_{p+2} \cdots|$ werde ich aber auch die einfacheren $|a_i, a_{i+p}|$ oder $|i, i+p|$ benützen. Hier, wie im Folgenden stets, ist unter einem Index, der $> n$ ist, sein Rest nach dem Modul n zu verstehen. Ich benutze bei den Ableitungen auch imaginäre Elemente, die ich aber stets als solche ausdrücklich bezeichne.

1) Haben die n Punkte $a_1 a_2 \cdots a_n$ eine solche Lage, dass eine Transformation $|i, i+1| = T$ existirt und man wendet dieselbe zweimal an, so entsteht die Transformation $|i, i+2| = T^2$, eine weitere Anwendung liefert die Umformung $|i, i+3| = T^3$, u. s. w., so dass allgemein die Punkte eine Transformation $T^p = |i, i+p|$ zulassen. Die Transformation $T^n = |i, i+n| = |i, i|$ lässt jeden der Punkte $a_1, a_2 \cdots a_n$ unverändert und folglich überhaupt jeden Punkt in der Ebene oder im Raume, wenn man von besonderen, nachher auszuschliessenden, Lagen der Punkte absieht. Gesetzt aber es gäbe eine Potenz von T mit einem Exponenten $q < n$, welche $= |i, i|$ wäre; dann müssten die Punkte $a_{q+1} a_{q+2} \cdots a_q$, welche durch T^q aus $a_1 a_2 \cdots a_n$

hervorgehen, der Reihe nach mit $a_1 a_2 \cdots a_n$ identisch sein, und es könnten also die Punkte $a_1 \cdots a_n$ nicht alle unter sich verschieden sein. Vielmehr würden dann nur die Punkte $a_1 a_2 \cdots a_q$ in der That verschieden sein, und die übrigen mit diesen zusammenfallen, so dass $a_{q+1} = a_1$, $a_{q+2} = a_2$, $\cdots a_n = a_q$ wäre. Dies verlangt, dass q ein Theiler von n und $n = pq$ ist. Seien umgekehrt von der Gruppe nur die Punkte $a_1 a_2 \cdots a_q$ von einander verschieden. Durch T gehen aus ihnen die $a_2 a_3 \cdots a_{q+1}$ hervor. Wäre nun a_{q+1} nicht mit a_1, sondern mit einem andern der q Punkte z. B. a_{i+1} identisch, so müssten beide vermöge T aus demselben Punkte hervorgegangen sein d. h. es müssten, gegen die Annahme, a_q und a_i identisch sein. Es muss also $a_{q+1} = a_1$ sein und daraus folgt, dass $a_{q+2} = a_2 \cdots$ allgemein $a_{rq+s} = a_s$ sein muss, und dass die Punkte, deren Indices Vielfache von q sind, die einzigen sind, welche durch T in a_1 übergeführt werden. Da dies von a_n angenommen ist, muss n durch q theilbar sein; es hat demnach T die Eigenschaft, dass $T^q = | i, i |$ ist. Dann ist aber $T = | a_1 a_2 \cdots a_q ; a_2 a_3 \cdots a_1 |$ und die Punkte $a_1 a_2 \cdots a_q$ bilden eine cyklisch-projectivische Gruppe. Diese letzteren Betrachtungen gelten ebenso, wenn $a_1 a_2 \cdots a_n$ Punkte einer Punktreihe, oder Strahlen eines Strahlenbüschels oder Ebenen eines Ebenenbüschels vorstellen, und in der That werden wir auch bei solchen Gebilden davon Gebrauch zu machen haben, während wir für die Hauptaufgabe das Vorkommen dieser Ausnahme dadurch ausschliessen, dass wir annehmen, die zu suchenden Punkte seien alle verschieden von einander.

I. Punktgruppen in der Ebene.

2) Da eine projectivische Transformation einer Ebene in sich selbst bestimmt ist, wenn 4 Paare sich entsprechender Punkte gegeben sind, so müssen erst 5 Punkte eine gewisse Bedingung erfüllen, wenn sie eine cykl.-proj. Gruppe bilden sollen und wir schliessen desshalb die Fälle $n \lesseqgtr 4$ hier aus. Wenn nun für die Punkte $a_1 a_2 \cdots a_n$ $(n \geqq 5)$ einer Ebene eine Transformation $T = | i, i+1 |$ existirt, so giebt es, wie bei jeder projectivischen Transformation einer Ebene in sich, jedenfalls einen Punkt A, und eine Gerade g, die in sich selbst übergeführt werden oder Doppelelemente der Transformation sind*). Wenn wir hier und im Folgenden den schon früher erledigten Fall ausschliessen, dass die ganze Gruppe auf einer Geraden liegt, so kann g nicht durch A gehen. Denn da vermöge T der Büschel $A(a_1 a_2 \cdots a_n) \barwedge A(a_2 a_3 \cdots a_1)$ ist, also die Strahlen $A(a_1 \cdots a_n)$ eine cyklisch-projectivische Gruppe bilden, so kann kein Strahl von A durch T in sich übergeführt wer-

---

*) Vergl. v. Staudt, Geometrie der Lage. Seite 169, No. 294.

den, weil sonst die zur Gruppe gehörige Transformation schon ein Doppelelement hätte, was nicht möglich ist, wenn $n \gtrless 3$ ist*).

3) Es kann aber vorkommen, dass der Büschel $A(a_1 a_2 \cdots a_n)$ nicht aus n, sondern aus weniger von einander verschiedenen Strahlen besteht. Nun kann auf einem Strahle Aa_i nicht auch der Punkt a_{i+1} liegen. Denn sonst würde T zeigen, dass auf dem Strahle $Aa_{i+1} = Aa_i$ auch $a_{i+2}, a_{i+3} \cdots$ lägen, d. h., dass er die ganze Gruppe enthalten würde, einen Fall, den wir ausgeschlossen haben. Es müssen also Aa_1 und Aa_2 verschieden sein. Angenommen es wären nur Aa_1, $Aa_2 \cdots Aa_q$ unter sich verschieden, so würde gemäss den Erörterungen in No. 1) die Transformation T den Büschel $A(a_1 a_2 \cdots a_q)$ in $A(a_2 a_3 \cdots a_1)$ überführen. Aber auch diese Gruppe ist eine cyklische und folglich existirt kein sich selbst entsprechender Strahl, ausser wenn $q = 2$ ist, wobei die Transformation T die Strahlen des Büschels A involutorisch paart. In diesem Falle aber, der nur eintreten kann, wenn n gerade, $= 2p$, ist, besteht die ganze Strahlengruppe $A(a_1 \cdots a_n)$ nur aus zwei Strahlen $Aa_1 = g_1$ und $Aa_2 = g_2$, von welchen einer g_1 die Punkte $a_1 a_3 \cdots a_{2p-1}$, der zweite g_2 die Punkte $a_2 a_4 \cdots a_{2p}$ trägt. Da die Transformation $T^2 = |i, i+2|$ die Punkte $a_1 a_3 \cdots a_{2p-1}$ der Reihe nach in $a_3 a_5 \cdots a_1$ überführt, so bilden diese Punkte auf g_1 eine cyklisch-projectivische Gruppe. Weil aber T den Punkt A ungeändert lässt, gilt dasselbe bei T^2 und somit wird bei der, zu einer cykl.-proj. Gruppe einer Geraden gehörenden, Transformation T^2 ein Punkt A dieser Geraden nicht verändert. Dies kann aber nur stattfinden, wenn die Anzahl der Punkte der Gruppe < 3 ist, und verlangt folglich, dass hier $p = 2$ sei, wobei die ganze Gruppe aus $2 \cdot p = 4$ Punkten bestehen würde. Da dieser Fall nicht eintreten kann, weil wir $n \geqq 5$ angenommen haben, so kann also niemals eine Doppellinie der Transformation durch A gehen.

4) Hieraus folgt einerseits, dass g nicht durch A gehen kann, andererseits, dass auf g kein reeller Doppelpunkt liegen kann; denn ein solcher würde eine durch A gehende Doppellinie liefern. Dagegen liegen auf g zwei conjugirt imaginäre Doppelpunkte B und $\mathsf{\Gamma}$ der Transformation T.

Es sei nun K_1 der reelle Kegelschnitt, der in B und $\mathsf{\Gamma}$ die Linien $A\mathsf{B}$ und $A\mathsf{\Gamma}$ berührt und durch den Punkt a_1 geht. Die Transformation T führt diesen in einen Kegelschnitt K_2 über, der ebenfalls $A\mathsf{B}$ und $A\mathsf{\Gamma}$ in B und $\mathsf{\Gamma}$ berührt, aber durch a_2 geht. Beide Kegelschnitte haben entweder, weil sie in denselben Punkten dieselben Geraden berühren, keinen weiteren Punkt gemein, oder sie müssen ganz zu-

*) Vergl. Annalen Bd. XI, Seite 90, No. 5.

sammenfallen. Im letzteren Falle zeigt die Anwendung von T, dass auch $a_3 \cdots a_n$ auf demselben Kegelschnitt K_1 liegen müssen. Liegt aber a_2 nicht auf K_1, sondern z. B. im Innern desselben, so muss, weil beide Kegelschnitte sich nicht schneiden, der ganze Kegelschnitt K_2 im Innern von K_1 liegen. Aus a_2 lässt T den Punkt a_3 hervorgehen, der dann im Innern von K_2 und daher auch von K_1 gelegen ist. Indem man so weiter schliesst, findet man, dass auch a_n innerhalb K_1 gelegen ist und daraus, durch Anwendung der Umformung, dass a_1 im Innern von K_2 liegt. Dies wiederspricht der Annahme, dass a_2 und damit K_2 innerhalb K_1, also a_1 ausserhalb K_2 gelegen ist. Da man die Annahme, a_2 liege im Aeusseren von K_1, genau ebenso wiederlegen kann, so ist bewiesen, dass alle Punkte der Gruppe auf einem Kegelschnitt liegen. Wir können also sagen: *eine cyklisch-projectivische Gruppe von mindestens fünf Punkten in einer Ebene liegt entweder auf einer Geraden oder auf einem Kegelschnitt.*

5) Sei die Gruppe auf einem Kegelschnitt gelegen, B irgend ein Punkt desselben, und C der ihm in der projectivischen Beziehung entsprechende, so ist $B(a_1 a_2 \cdots a_n) \barwedge C(a_2 a_3 \cdots a_1) \barwedge B(a_2 a_3 \cdots a_1)$ und es bildet also dann die Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ eine cyklisch-projectivische Gruppe von n Punkten auf dem Kegelschnitt. In meiner früheren Arbeit (Bd. XI, Seite 95, No. 10) habe ich gezeigt, dass, wenn n Punkte eines Kegelschnitts eine cykl.-proj. Gruppe bilden, sie auch noch in anderer Anordnung eine solche Gruppe bilden, in jeder nämlich, in welcher die Indices der Punkte eine arithmetische Reihe bilden. Sei $a_1' a_2' \cdots a_n'$ eine derartige zweite Anordnung der Punkte, so giebt es für die Punkte des Kegelschnittes eine Transformation $|a_i', a_{i+1}'|$. Man kann aber stets eine projectivische Umformung der Ebene eines Kegelschnittes in sich selbst herstellen, bei welcher der Kegelschnitt sich selbst entspricht, und die dessen Punkte nach demselben Gesetz verändert wie die gegebene Transformation. Bezeichnet man mit a_3'' den Schnittpunkt der Tangenten in a_1' und a_2', und mit a_5'' den der Tangenten in a_2'' und a_3'', so ist diese Transformation für unseren Fall

$$|a_1' a_2' a_3' a_3''; \quad a_2' a_3' a_4' a_5''|,$$

und diese stellt somit eine Transformation der Ebene dar, die durch $|a_i', a_{i+1}'|$ bezeichnet werden kann. Folglich ist eine cykl.-proj. Gruppe in einer Ebene, nicht nur in einer, sondern in jeder Anordnug cykl.-proj., in der die Indices der Punkte eine arithmetische Reihe bilden.

6) Die Transformation $T^k = |i, i+k|$ führt jeden Punkt der Gruppe in einen andern über, und lässt, wie T, den Punkt A und die Gerade g unverändert. Man kann aber zeigen, dass auch bei der Umformung T^k, A der einzige nicht in g gelegene Doppelpunkt ist.

Ist n ungerade, so sind nach dem in Nr. 1) Bemerkten alle Strahlen des Büschels $A(a_1 a_2 \cdots a_n)$ von einander verschieden, weil auf jedem Strahle höchstens zwei Punkte liegen können, und bilden eine cykl.-proj. Gruppe. Die Transformation T^k lässt aus ihnen die $A(a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_k)$ hervorgehen; dabei aber kann, wie Bd. XI, Seite 93, Nr. 8, bewiesen ist, kein Strahl unverändert bleiben. Ist dagegen n gerade, $= 2q$, so ist $a_1 a_{q+1}$, $a_2 a_{q+2}$, $\cdots$ eine Involution auf dem Kegelschnitt, und es gehen $a_1 a_{q+1}$, $a_2 a_{q+2}$, $\cdots$ alle durch denselben Punkt. Weil aber durch die Umformung T der Schnittpunkt von $a_1 a_{q+1}$ mit $a_2 a_{q+2}$ in den der Linien $a_2 a_{q+2}$ und $a_3 a_{q+3}$ übergeht, so entspricht der Mittelpunkt der Involution sich selbst, und ist also der Punkt A. Der Büschel A enthält daher für $n = 2q$ nur die Strahlen $A(a_1 a_2 \cdots a_q)$, die nach Nr. 1) eine cykl.-proj. Gruppe bilden. Die Umformung T^k liefert daraus die Strahlen $A(a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{q+k})$; so lange diese von jenen verschieden sind, kann kein Doppelstrahl existiren. Dagegen werden für $k = q$ beide Büschel identisch, und dann schneidet also der ursprüngliche und der abgeleitete Büschel die Linie g in denselben Punkten, die sich selbst entsprechen müssen. Weil $n \geqq 5$ sein soll, ist $q \geqq 3$, daher ist die Zahl der auf g sich selbst entsprechenden Punkte mindestens gleich drei, und folglich entspricht jeder Punkt von g, und damit jeder Strahl von A, sich selbst. Die Umformung T^q ist sonach eine projectivische, und, weil die Punkte a_1 und a_{q+1} sich abwechselnd entsprechen, eine involutorische. Ausser dem Involutionscentrum A und den Punkten der Involutionsaxe g können aber keine Doppelelemente existiren. In den vorher betrachteten beiden Fällen dagegen kann überhaupt ausser A kein weiterer Doppelpunkt existiren, weil sonst auch ein durch A gehender Doppelstrahl vorhanden sein würde.

7) Sei nun b_1 irgend ein anderer Punkt der Ebene, der aber nicht der Gruppe $a_1 \cdots a_n$ angehört, noch auch mit A zusammenfällt oder auf g liegt. Wenn die Umformungen T, $T^2 \cdots$ aus ihm die Punkte $b_2 b_3 \cdots b_n$ hervorgehen lassen, so hat man eine Gruppe $b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$, welche T in $b_2 b_3 \cdots b_1$ überführt. *Keiner dieser Punkte kann mit einem der Punkte a identisch sein.* Wäre nämlich b_k etwa $= a_i$, so würde die Transformation T nach $n - k + 1$ maliger Anwendung aus b_k den Punkt b_1 und aus a_i einen anderen Punkt der Gruppe hervorgehen lassen, und diese müssten, unserer Annahme entgegen, identisch sein. *Die n Punkte b müssen aber auch unter sich verschieden sein,* denn wenn $b_{k+1} = b_1$ wäre, so wäre auch $b_{k+2} = b_2$ u. s. w., und die Umformung T^k würde die Gruppe $b_1 b_2 \cdots b_k$ in $b_1 b_2 \cdots b_k$ überführen, so dass diese Punkte Doppelpunkte der Transformation T^k wären. Dies ist nach dem Vorigen nur möglich, wenn es Punkte von g sind, und dies ist nicht der Fall, weil b_1 nicht auf g liegen sollte.

Es bilden also die Punkte $b_1 b_2 \cdots b_n$ eine neue cykl.-proj. Gruppe von n Punkten, die durch dieselbe Transformation T cyklisch vertauscht werden. Dies gilt auch noch, wenn b_1 der Linie g angehört und erleidet in diesem Falle nur eine Ausnahme, wenn $n = 2q$ ist. Weil dann nämlich schon die Umformung T^q die Punkte von g nicht ändert, besteht die aus b_1 hervorgehende Gruppe nur aus q Punkten.

8) Auf jede Gruppe, die auf die angegebene Art aus einem Punkte der Ebene abgeleitet wurde, lässt sich, wofern sie nicht ganz auf einer Geraden, und zwar dann auf g liegt, die frühere Untersuchung anwenden, und so findet sich, dass jede solche Gruppe auf einem Kegelschnitt liegt, und dass alle diese Kegelschnitte in den imaginären Punkten B und Γ von g die Linien $A\mathsf{B}$ und $A\Gamma$ berühren. Für alle diese Gruppen ist g „die zu der Gruppe gehörige Linie" im Sinne der Nr. 11) der früheren Abhandlung. Denn bezeichnet man mit p_1 den Schnittpunkt der Linien $a_1 a_n$ und $a_2 a_{n-1} \cdots$ mit p_2 den der Linien $a_2 a_n$, $a_3 a_{n-1} \cdots$, mit p_3 den der Linien $a_1 a_2$, $a_3 a_n \cdots$ und endlich mit p_4 den der Linien $a_3 a_1$, $a_4 a_n \cdots$, welche Punkte alle auf der zur Gruppe gehörigen Linie liegen, so entsprechen vermöge T den Punkten $p_1 p_2$ resp. die $p_3 p_4$, und also die Linie $p_1 p_2$ sich selbst. Da g allein bei der Umformung T sich selbst entspricht, so muss es die zur Gruppe gehörige Linie sein. Wählt man den Punkt b_1, von dem aus eine neue Gruppe $b_1 b_2 \cdots b_n$ construirt werden soll, auf der Linie $A a_1$, so liegt b_2 auf $A a_2, \cdots b_n$ auf $A a_n$. Daraus folgt, dass man die sämmtlichen Gruppen erhält, deren Punkte durch die Transformation $| a_i a_{i+1} |$ cyklisch vertauscht werden, wenn man auf einem der erwähnten Kegelschnitte alle derartigen Gruppen construirt, und sie dann von A aus auf alle übrigen Kegelschnitte projicirt. Wird g die unendlich ferne Gerade, so wird A der Mittelpunkt von Kegelschnitten, die dieselben imaginären Asymptoten haben, also der Mittelpunkt von concentrischen und ähnlichen Ellipsen. Ein specieller Fall davon sind concentrische Kreise, auf welchen die Ecken der eingeschriebenen regulären n Ecke die Punkte der Gruppen bilden.

II. Punktgruppen im Raume.

9) Indem wir uns zur Aufsuchung der cyklisch-projectivischen Punktgruppen $a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n \geqq 6$) im Raume wenden, suchen wir diejenigen Elemente des Raumes auf, welche bei der Transformation $T = | i, i+1 |$ des Raumes sich nicht ändern. Es sind im Allgemeinen 13 verschiedene Fälle möglich, die v. Staudt in den Beiträgen zur Geometrie der Lage § 35. Seite 328 ff. beschrieben hat. Wir wollen hier von diesen Resultaten keinen Gebrauch machen, sondern nur den dort in Nr. 508 bewiesenen Satz benützen, dass zwei projectivische

Räume jedenfalls einen reellen oder imaginären Punkt entsprechend gemein haben. Führt die Transformation T einen reellen Punkt in sich über, so führt sie auch den Strahlenbündel dieses Punktes in sich selbst über. Wenn aber zwei projectivisch bezogene Strahlenbündel ineinander liegen, so haben sie sicher mindestens einen Strahl entsprechend gemein. Folglich geht dann durch jenen Punkt ein reeller sich selbst entsprechender Strahl. Ist dagegen der Doppelpunkt von T imaginär, so muss sein reeller Träger sich selbst entsprechen. Denn da jedem reellen Punkt wieder ein solcher entsprechen soll, so muss dieser reellen Geraden wieder eine reelle Gerade entsprechen, und da sie ferner durch den Doppelpunkt gehen soll, so wird sie durch T in die einzige, den Doppelpunkt enthaltende, reelle Gerade, nämlich dessen reellen Träger, übergeführt, der sich also selbst zugeordnet ist. *Wenn daher zwei Räume reell projectivisch sind, so haben sie jedenfalls eine reelle Gerade entsprechend gemein.*

10) Sei nun A diese jedenfalls existirende Gerade, welche durch T in sich übergeht (oder wenn es deren mehrere giebt, eine von ihnen). Wie oben in Nr. 3) kann man dann beweisen, dass durch A nur dann eine Doppelebene gehen kann (wenn nicht die ganze Gruppe in einer Ebene gelegen ist), wenn alle Punkte der Gruppe sich auf zwei Ebenen vertheilen, so dass auf der einen E_1 die Punkte $a_1 a_3 \cdots$, auf der zweiten E_2 die Punkte $a_2 a_4 \cdots$ liegen, was nur bei geraden $n, = 2p$, stattfinden kann, und wobei dann T die Ebenen E_1 und E_2 vertauscht. Dann ist aber die durch T im Ebenenbüschel A hervorgebrachte Umformung eine involutorische und es existiren zwei Doppelebenen, wenn überhaupt reelle vorhanden sind. Es sind also die beiden Fälle möglich:

a) Der Büschel A hat zwei reelle Doppelebenen E_1, E_2, und alle Punkte der Gruppe liegen auf zwei Ebenen, so dass von den $n = 2p$ Punkten auf jeder Ebene p liegen; oder

b) Der Büschel A hat keine reellen, sondern zwei conjugirt imaginäre Doppelebenen.

11) Die Linie A wird nun von jeder der Ebenen $a_1 a_2 a_3$, $a_2 a_3 a_4 \cdots$ geschnitten. Denn würde eine von ihnen die Linie ganz enthalten, so würden sie alle A enthalten, weil sie durch T in einander übergehen, während A ungeändert bleibt. Dann wären aber die beiden Ebenen $a_1 a_2 a_3$ und $a_2 a_3 a_4$ nicht verschieden (wenn wir annehmen, dass keiner der Punkte der Gruppe auf A liegt; und wenn einer auf A läge, würde die ganze Gruppe auf A liegen), und die ganze Gruppe würde eben sein. Bezeichnen wir aber den Schnittpunkt der Ebene $a_1 a_2 a_3$ und der Linie A mit b_2, den der Ebene $a_2 a_3 a_4$ und A mit $b_3 \cdots$ u. s. w., so geht die Punktreihe $b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$ durch die Umformung T in die Reihe $b_2 b_3 \cdots b_1$ über, und diese n Punkte bilden

also eine cyklisch-projectivische Gruppe. Die Anzahl der von einander verschiedenen Punkte dieser Gruppe ist sicher grösser als Eins. Denn wären alle Punkte mit demselben Punkte b identisch, so würden die Punkte $b a_2 a_3$ gleichzeitig auf zwei Ebenen, also auf einer Geraden liegen müssen, ebenso $b a_3 a_4$, so dass $a_2 a_3 a_4$ auf einer Geraden lägen und die ganze Gruppe gerade wäre.

Ist q die Anzahl der verschiedenen Punkte, so kann man wie in Nr. 1) zeigen, dass q ein Theiler von n sein muss und dass diese q Punkte wieder durch T cyklisch vertauscht werden. Daraus folgt, dass nur dann auf A ein Doppelpunkt der Transformation liegen kann, wenn $q = 2$, $n = 2p$ ist. Die Umformung vertauscht dann die beiden Punkte unter sich, und ist also für die Linie A eine involutorische, die entweder zwei oder keine Doppelpunkte besitzt. Hienach sind zwei Fälle möglich:

c) Die Punktreihe A hat zwei reelle Doppelpunkte, und alle Ebenen wie $a_n a_1 a_2$, $a_1 a_2 a_3$, $\cdots$ der Gruppe gehen durch zwei Punkte von A, so dass von den $n = 2p$ Ebenen durch jeden Punkt p gehen; oder

d) Die Punktreihe A hat zwei imaginäre Doppelpunkte.

Aehnliches gilt natürlich für jede andere sich selbst entsprechende reelle Linie, die ausser A noch vorhanden ist.

Wenn wir von der Linie A ausgehen, so kann jeder der beiden Fälle von Nr. 10) mit jedem der beiden obigen sich combiniren, so dass im Ganzen 4 Möglichkeiten zu untersuchen sind, die wir mit den Zeichen **ac**, **bc**, **ad** und **bd** bezeichnen wollen.

12) *Fall* **ac**. Der Ebenenbüschel A hat zwei reelle Doppelebenen E_1 und E_2, und die Punktreihe zwei reelle Doppelpunkte P_1 und P_2. Jedem Punkt von E_1 z. B. wird durch T wieder ein Punkt von E_1 zugeordnet. Wenn aber eine projectivische Umformung einer Ebene nur zwei Punkte $P_1 P_2$ einer Linie A ungeändert lässt, so lässt sie entweder*) noch einen dritten Punkt der Ebene unverändert; oder eine gerade Linie, die entweder durch P_1 oder durch P_2 geht und keinen weiteren Doppelpunkt enthält; oder eine gerade Linie, die entweder durch P_1 oder durch P_2 geht und in der jeder Punkt sich selbst entspricht. Wie aber in Nr. 10) bewiesen ist, kann eine sich selbst entsprechende Gerade, in dem hier vorliegenden Falle, entweder zwei oder keinen reellen Doppelpunkt enthalten, und folglich sind die beiden zuletzt angeführten Fälle nicht statthaft. Somit muss die Ebene E_1 noch einen Doppelpunkt P_3 und ebenso die E_2 noch einen Doppelpunkt P_4 enthalten. Bei der Transformation T bleibt also das Tetraeder

*) Vergl. v. **Staudt**, Geom. d. Lage, Seite 169, Nr. 294.

$P_1 P_2 P_3 P_4$ unverändert. Da durch jede Kante zwei Doppelebenen der Transformation gehen, so muss nach der in Nr. 10) bei a) gemachten Bemerkung die ganze Gruppe auf zwei durch jene Kanten gehenden Ebenen liegen, von welchen eine die Punkte $a_1 a_3 \cdots$, die andere die $a_2 a_4 \cdots$ enthält. Da dies für jede Kante gilt, so müssen die Punkte $a_1 a_3 \cdots$ auf 6 Ebenen gelegen sein, von welchen eine durch jede Kante geht, und ebenso $a_2 a_4 \cdots$ auf 6 andern Ebenen. Dies geht nur an, wenn die ganze Gruppe aus den beiden Punkten a_1 und a_2 besteht.

13) *Fall* ad. Jede der beiden reellen durch A gehenden Doppelebenen enthält A als sich selbst entsprechende Gerade, auf der aber, weil der Fall d stattfindet, kein reeller, sondern nur zwei imaginäre Doppelpunkte liegen. Folglich enthält jede der beiden Ebenen noch einen ausserhalb A gelegenen reellen sich selbst entsprechenden Punkt. Die Verbindungslinie der beiden Punkte ergiebt eine zweite sich selbst entsprechende Gerade B.

Der Fall bc ist mit diesem im Wesentlichen identisch. Der Büschel A hat zwei conjugirt imaginäre Doppelebenen und die Punktreihe A zwei reelle Doppelpunkte. Das Strahlbündel, welches einen dieser Punkte zum Centrum hat, entspricht sich selbst und enthält daher ausser der sich selbst entsprechenden Linie A noch eine sich selbst zugeordnete Ebene. Diese kann nicht durch A gehen, weil sie sonst, gegen die Annahme, eine Doppelebene des Büschels A wäre. Die beiden Doppelebenen, welche durch die beiden Doppelpunkte auf A gehen, schneiden sich folglich in einer sich selbst entsprechenden Linie B. Somit ist dieser Fall nur durch die Vertauschung von A und B vom vorigen unterschieden und reicht es aus, den ersten zu untersuchen. Weil durch A zwei Doppelebenen gehen, so liegen (Nr. 10) die Punkte $a_1 a_3 \cdots$ in einer Ebene E_1, und die $a_2 a_4 \cdots$ in einer zweiten Ebene E_2 durch A. Und weil die Linie B zwei sich entsprechende Punkte P_1 und P_2 trägt, die durch die Ebenen E_1 und E_2 harmonisch getrennt werden, so gehen nach der bei c in Nr. 11) bemerkten Eigenschaft die Ebenen $a_n a_1 a_2$, $a_2 a_3 a_4$, $\cdots$ durch einen und die Ebenen $a_1 a_2 a_3$, $a_3 a_4 a_5$, $\cdots$ durch einen zweiten auf B liegenden Punkt. Beide Eigenschaften verlangen, dass n gerade $= 2p$ sei. Man lege nun von P_1 aus die Strahlen $P_1 a_1$, $P_1 a_2$, $\cdots$ $P_1 a_n$. Die Umformung T führt diese der Reihe nach in $P_1 a_2$, $P_1 a_3$, $\cdots$ $P_1 a_1$ über, so dass sie eine cyklisch-projectivische Gruppe im Strahlenbündel P_1 bilden und folglich, wenn wir den Fall einer ebenen Gruppe ausschliessen, einem Kegel zweiter Ordnung K angehören müssen, der alle Punkte der Gruppe enthält. Die Ebene $P_1 A$ ist die zur Gruppe gehörige, weil sie sich bei der Transformation T nicht ändert. Ein zweiter Kegel mit gleichen Eigenschaften hat seine Spitze in P_2.

14) Es ergiebt sich hieraus folgende Construction einer solchen Gruppe. Auf einem Kegel mit der Spitze P_1 bestimme man eine cykl.-proj. Gruppe von $n = 2p$ Strahlen $a_1\, a_2 \cdots a_{2p}$. In der zu der Gruppe gehörenden Ebene E nehme man eine beliebige Gerade A, die nicht durch P_1 geht, an und lege durch sie zwei Ebenen E_1 und E_2, die den Kegel in zwei Kegelschnitten treffen. Die eine dieser Ebenen, E_1, schneide man durch die Strahlen $a_1\, a_3 \cdots a_{2p-1}$, die andere E_2 durch die Strahlen $a_2\, a_4 \cdots a_{2p}$, so sind die Schnittpunkte $a_1\, a_3 \cdots a_{2p-1}$ resp. $a_2\, a_4 \cdots a_{2p}$ die Punkte der Gruppe. Um den Beweis zu liefern, dass so eine cykl.-proj. Gruppe erhalten wird, nehme man auf der Polaren B der Ebene E in Bezug auf den Kegel den Punkt P_2 so an, dass er von P_1 durch die Ebenen E_1 und E_2 harmonisch getrennt ist und betrachte dann die projectivische Raumtransformation

$$T' = |\, P_1 P_2 a_1 a_3 a_5;\; P_1 P_2 a_2 a_4 a_6 \,|,$$

durch die $P_1 P_2$ oder B sich selbst entspricht. Da die Strahlen $P_1 a_1$, $P_1 a_2$, $\cdots$ einer cykl.-proj. Gruppe angehören, so schneiden sich die Ebenen $P_1 a_1 a_4$ und $P_1 a_2 a_3$ in einer Geraden $P_1 p_5$, die der zur Gruppe gehörigen Ebene E angehört*). In derselben Ebene liegt die Schnittlinie $P_1 p_6$ der Ebenen $P_1 a_1 a_5$ und $P_1 a_2 a_4$, die Schnittlinie $P_1 p_7$ der Ebenen $P_1 a_2 a_5$ und $P_1 a_3 a_4$, sowie die Schnittlinie $P_1 p_8$ der Ebenen $P_1 a_2 a_6$ und $P_1 a_3 a_5$. Durch T' gehen aber die Linien $P_1 p_5$ und $P_1 p_6$ in resp. $P_1 p_7$ und $P_1 p_8$ über, also die Ebene E in sich selbst. Der Kegel mit der Spitze P_1, der durch die Strahlen $P_1 a_1$, $P_1 a_3$, $P_1 a_5$ geht und in Bezug auf welchen E die Polarebene von B ist, wird also durch T' in einen Kegel umgeformt, der die Strahlen $P_1 a_2$, $P_1 a_4$, $P_1 a_6$ enthält und in Bezug auf den ebenfalls E die Polarebene von B ist. Durch beide Bedingungen wird aber derselbe Kegel bestimmt, derjenige nämlich, welcher der Construction zu Grunde lag, und der sich also selbst entspricht. Da nun weiter die Ebene $a_1 a_3 a_5$ der Ebene $a_2 a_4 a_6$ entspricht und E eine Doppelebene ist, so entspricht auch die Linie A sich selbst. Nach der Construction ist der Wurf $A(P_1 a_1 P_2 a_2)$ harmonisch, folglich $A(P_1 a_1 P_2 a_2) \barwedge A(P_1 a_2 P_2 a_1)$, und deswegen führt T' die Ebene E_2 in E_1 über. Weil die Gruppe von Strahlen $P_1(a_1 a_2 \cdots)$ eine cykl.-projectivische ist, so ist $P_1(a_1 a_3 a_5 a_2)$ $\barwedge$ $P_1(a_2 a_4 a_6 a_3)$, und weil durch T' der Kegel sich nicht ändert, so entspricht in dieser Umformung dem Strahle $P_1 a_2$ der Strahl $P_1 a_3$ und also dem Punkte a_2 der Punkt a_3. Auf diesem Wege weitergehend zeigt man, dass T' allgemein den Punkt a_i in a_{i+1} überführt, womit bewiesen ist, dass die construirte Gruppe die gewünschte Eigenschaft besitzt.

---

*) Vergl. diese Annalen Bd. XI, Seite 96, Nr. 11.

15) *Fall* bd. Der Ebenenbüschel A hat zwei conjungirt imaginäre Doppelebenen und die Punktreihe A zwei conjungirt imaginäre Doppelpunkte. Seien H_1 und H_2 diese Ebenen und Π_1 und Π_2 die Doppelpunkte. Die Ebene H_1 wird durch T in sich selbst übergeführt und zwar so, dass die Punkte Π_1 und Π_2 ungeändert bleiben. Die Betrachtung der Fälle, die eintreten können, wenn eine Ebene projectivisch in sich transformirt wird*), zeigt dann, dass jedenfalls in H_1 noch eine imaginäre Doppellinie γ existiren muss, welche durch einen der beiden Punkte Π_1 oder Π_2, sagen wir durch Π_1, geht. Diese Linie γ muss eine Gerade zweiter Art sein; denn wäre sie von der ersten Art, so hätte sie einen reellen Punkt, der der Ebene H_1 angehörte, ohne auf A zu liegen, was nicht angeht, da H_1 imaginär sein soll. Im hier vorliegenden Falle können nicht alle Punkte von γ sich selbst entsprechen. Um dies zu beweisen, legen wir durch den Punkt a_1 der Gruppe den einzigen reellen Strahl, der γ schneidet. Entspricht dann der Schnittpunkt sich selbst, so entspricht auch jener Strahl, als sein reeller Träger, sich selbst und enthält daher den Punkt a_2. Derselbe Schluss zeigt aber, dass er auch a_3 enthalten muss u. s. w. Folglich kann die Annahme nur richtig sein, wenn alle Punkte der Gruppe auf einer Geraden liegen. Die Gerade γ kann also entweder ausser Π_1 noch einen zweiten Doppelpunkt enthalten, oder aber Π_1 ist der einzige auf ihr liegende Doppelpunkt.

Im zweiten Falle lege man durch $a_1\, a_2\, a_3$ die reellen Strahlen $g_1\, g_2\, g_3$, welche γ schneiden und mit dieser Geraden die imaginären Punkte $\mathsf{A}_1\, \mathsf{A}_2\, \mathsf{A}_3$ gemein haben. Durch die Transformation T geht a_1 über in a_2, der γ schneidende reelle Strahl g_1 also in den einzigen durch a_2 gehenden reellen Strahl g_2, welcher γ schneidet, und daher auch, weil γ sich selbst entspricht, A_1 in A_2; aus dem gleichen Grunde geht A_3 hervor aus A_2. Da nun nach der Annahme die beiden projectivischen Punktreihen $\Pi_1\, \mathsf{A}_1\, \mathsf{A}_2 \cdots$ und $\Pi_1\, \mathsf{A}_2\, \mathsf{A}_3 \cdots$, von welchen die zweite aus der ersten vermöge T hervorgeht, Π_1 allein entsprechend gemein haben, so ist der Wurf $\Pi_1 \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{A}_3$ harmonisch**) und deswegen sind die 4 reellen Träger $A g_1 g_2 g_3$ der 4 Punkte Erzeugende einer Regelschaar und auf dieser $A g_2$ durch $g_1 g_3$ harmonisch getrennt***). Seien jetzt weiter $g_4 \cdots g_n$ die reellen Geraden, welche durch die Punkte $a_4 \cdots a_n$ der Gruppe gehen und γ schneiden, so folgt, weil $A\, g_1\, g_2\, g_3$ einer Regelschaar angehören, vermöge der Umformung T, dass auch $A\, g_2\, g_3\, g_4$ einer Regelschaar angehören, welche mit jener übereinstimmt, weil sie drei Gerade mit ihr gemein hat. Durch wei-

*) v. Staudt, Beitr. z. Geom. d. Lage, Seite 186, Nr. 301.

**) A. o. a. O. Seite 145, Nr. 221.

***) A. o. a. O. Seite 92, Nr. 143; diese Annalen Bd. VIII, Seite 175, Nr. 40.

tere Anwendung desselben Schlusses ergiebt sich nun, dass alle Strahlen $Ag_1 g_2 \cdots g_n$ Erzeugende einer Regelschaar sind, und ferner folgt, dass durch T aus der Gruppe $A g_1 g_2 \cdots g_n$ die $A g_2 g_3 \cdots g_1$ hervorgeht. Folglich bilden die Linien $g_1 g_2 \cdots g_n$ eine cyklisch-projectivische Gruppe von Erzeugenden dieser Regelschaar und A bleibt bei der zugehörigen Umformung ungeändert. Nun überträgt sich aber der Satz, dass eine cyklische Transformation einer Geraden, die sich auf mehr als zwei Punkte erstreckt, keinen Doppelpunkt besitzt, auch auf cyklische Transformationen der Erzeugenden einer Regelschaar (etwa indem man mit einem Leitstrahl schneidet) und zeigt so, dass eine Doppelerzeugende A nur existiren kann, wenn die Zahl der von einander verschiedenen der Linien $g_1 g_2 \cdots g_n$ zwei ist, von welchen beiden geraden Linien dann jede die Hälfte der Punkte der Gruppe trägt. Ist dann aber B diejenige Erzeugende der Regelschaar $Ag_1 g_2$, welche von A durch g_1 und g_2 harmonisch getrennt ist, so ist $Ag_1 B g_2 \barwedge A g_2 B g_1$, d. h. B entspricht durch T sich selbst. Da nun auf der Doppelgeraden γ nur ein Punkt B existirt, der von Π_1 durch A_1 und A_2 getrennt ist und dessen Träger in Folge dessen von A durch g_1 und g_2 harmonisch getrennt ist, so muss B der Träger von B und daher B ein zweiter auf γ gelegener Doppelpunkt sein. Da dies gegen unsere Annahme streitet, so ist diese nicht möglich.

16) Es bleibt also nur noch der Fall, dass γ und damit H_1 noch einen zweiten Doppelpunkt P_1 enthält. Dann wird aber die conjungirt imaginäre Ebene H_2 den zu P_1 conjungirten Punkt P_2 als weiteren Doppelpunkt tragen. Die Verbindungslinie $\mathsf{P}_1 \mathsf{P}_2$ ist dann eine zweite reelle Doppellinie. Dagegen sind die zwei Linien $\Pi_1 \mathsf{P}_1$ und $\Pi_2 \mathsf{P}_2$, sowie andererseits die beiden $\Pi_1 \mathsf{P}_2$ und $\Pi_2 \mathsf{P}_1$ conjungirt imaginär. Diese 4 Linien bestimmen mit dem Punkt a_1 der Gruppe ein einmanteliges Hyperboloid, von dessen Erzeugenden die der einen Schaar die Geraden $\Pi_1 \mathsf{P}_1$ und $\Pi_2 \mathsf{P}_2$, und die der anderen die Geraden $\Pi_1 \mathsf{P}_2$ und und $\Pi_2 \mathsf{P}_1$ schneiden. Legt man nämlich durch a_1 und die beiden conjungirt imaginären Linien $\Pi_1 \mathsf{P}_1$ und $\Pi_2 \mathsf{P}_2$ die reelle Gerade g_1, so geht durch jeden Punkt von g_1 eine einzige Gerade, die die beiden conjungirten Geraden $\Pi_1 \mathsf{P}_2$ und $\Pi_2 \mathsf{P}_1$ schneidet, und zwar durch jeden reellen Punkt von g_1 eine reelle Gerade und alle diese gehören einer reellen Regelschaar*) H_1 an, welche jene zwei Paare conjungirt imaginärer Geraden gleichfalls enthält. Durch die Umformung T geht diese Fläche in ein anderes reelles Hyperboloid H_2 über, das durch den Punkt a_2 und dieselben vier imaginären Linien geht. Liegt a_2 auf H_1, so fällt H_2 mit H_1 zusammen, und die wiederholte Anwendung von T

*) v. Staudt, Beiträge, Seite 114, Nr. 175.

lehrt, dass die ganze Gruppe der Fläche H_1 angehört. Liegt aber a_2 nicht auf der Fläche, sondern z. B. im Aeussern von H_1, so folgt durch die Umformung, dass auch a_3 im Aeussern von H_2 und folglich auch im Aeussern von H_1 liegt. Denn weil H_1 und H_2 die 4 imaginären Linien gemein haben, treffen sie sich in keinem reellen Punkt und somit liegt H_2 ganz ausserhalb H_1, weil der Punkt a_2 von H_2 ausserhalb H_1 sich befindet. Es ergiebt sich dann weiter, dass auch a_4 im Aeusseren von H_2 und von H_1 sich befindet u. s. w., bis man findet, dass a_n die gleiche Lage hat, woraus durch Anwendung von T folgen würde, dass a_1 im Aeusseren von H_2 gelegen ist; während wir annahmen, a_2 und damit H_2 sei im Aeusseren von H_1, und also a_1 im Inneren von H_2 gelegen. Ebensowenig kann a_2 im Inneren von H_1 sich vorfinden und muss daher, und mit ihm die ganze Gruppe, der Fläche H_1 selbst angehören.

17) Legt man durch die Punkte der Gruppe die reellen Erzeugenden $g_1 g_2 \cdots g_n$ der einen Schaar und die $h_1 h_2 \cdots h_n$ der zweiten Schaar des Hyperboloids H_1, so führt T diese, nach einem oben schon angewandten Schlusse, in $g_2 g_3 \cdots g_1$ resp. $h_2 h_3 \cdots h_1$ über. Beide Gruppen bilden also cyklisch-projectivische Gruppen von Strahlen, die beide auch aus weniger als n Strahlen bestehen können, wobei dann jeder Strahl mehr als einen Punkt, aber jeder gleichviele Punkte tragen muss. Man kann also eine cyklisch-projectivische Gruppe construiren, indem man die cyklischen Gruppen von Geraden $g_1 g_2 \cdots g_n$, $h_1 h_2 \cdots h_n$ aus den beiden Schaaren von Erzeugenden eines Hyperboloids herauswählt und g_1 mit h_1, g_2 mit h_2, $\cdots$ schneidet. Die Raumtransformation nämlich, die die Punkte

$$g_1 h_1 \quad g_1 h_2 \quad g_2 h_1 \quad g_2 h_2 \quad g_3 h_3$$

in resp.

$$g_2 h_2 \quad g_2 h_3 \quad g_3 h_2 \quad g_3 h_3 \quad g_4 h_4$$

überführt, erzeugt aus dem durch die Geraden $g_1 h_1 g_2 h_2$ und den Punkt $g_3 h_3$ gehenden Hyperboloid das durch die Geraden $g_2 h_2 g_3 h_3$ und den Punkt $g_4 h_4$ gehende, welches mit jenem identisch ist; der Linie g_3, weil sie durch den Punkt $g_3 h_3$ und die beiden Geraden $h_1 h_2$ gelegt ist, entspricht die Erzeugende, die durch $g_4 h_4$ und die Geraden $h_2 h_3$ geht, also g_4; ebenso der h_3 die Linie h_4. Entspricht der Linie g_4 die Linie x, so muss sein $g_1 g_2 g_3 g_4 \barwedge g_2 g_3 g_4 x$. Es ist aber wegen der cykl.-proj. Gruppe $g_1 g_2 g_3 g_4 \barwedge g_2 g_3 g_4 g_5$, so dass x mit g_5 übereinstimmt; in gleicher Weise wird h_4 in h_5, also der Punkt $g_4 h_4$ in den $g_5 h_5$ übergeführt. Man beweist ohne Weiteres in der Art, dass eine Transformation existirt, welche die Punkte der construirten Gruppe cyklisch vertauscht. Wenn die so gefundene Gruppe ganz in derselben Ebene liegt, so ist $g_1 g_2 \cdots g_n \barwedge h_1 h_2 \cdots h_n$, und umgekehrt, wenn diese Beziehung besteht, liegt die Gruppe in einer Ebene.

Alles zusammengefasst, ergiebt das Resultat: *Eine cyklisch-projectivische Gruppe im Raume liegt entweder auf einer Geraden, oder auf einer Ebene, oder auf zwei Ebenen, oder auf einem Hyperboloide.*

18) Nehmen wir an, eine cyklisch-projectivische Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ gehöre einer der letzten Arten an, und construiren dann, ausgehend von einem reellen Punkt b_1, der aber auf keinem der reellen Doppelelemente der Transformation T liegt und mit keinem der Punkte $a_1 a_2 \cdots a_n$ identisch ist, die Punkte $b_2, b_3, \cdots b_n$, welche aus b_1 durch wiederholte Anwendung von T hervorgehen. Die Anzahl der von einander verschiedenen ist sicher nicht $> n$. Wie in Nr. 7) kann man zeigen, dass keiner dieser Punkte mit einem der Punkte $a_1 \cdots a_n$ zusammenfallen kann. Es kann aber auch die Anzahl der verschiedenen Punkte nicht $< n$ sein. Denn wäre sie nur $= k$, so dass $b_{k+1} = b_1$ wäre, so würde die Transformation T^k die Punkte $a_1 a_2 \cdots a_n$ $b_1 b_2 \cdots b_k$ in $a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_k\, b_1 b_2 \cdots b_k$ verwandeln und liesse demnach die Punkte $b_1 b_2 \cdots b_k$ unverändert. Da aber T^k dieselben (reellen und imaginären) Doppelpunkte nicht ändert, die auch T nicht ändert und deren Anzahl schon 4 beträgt, so würde ein weiterer Doppelpunkt, der nicht dem Tetraeder jener vier Punkte angehörte, bewirken, dass die Umformung T^k gar keinen Punkt änderte. Dies ist aber nur für $k = n$ möglich. *Die neue aus b_1 entstehende Gruppe enthält daher ebenfalls n Punkte.* Aehnlich wie der in Nr. 7) bewiesene Satz kann auch dieser eine Ausnahme erleiden, wenn b_1 auf einer Doppelebene oder auf einer Doppelgeraden angenommen wird. Ich will auf die nähere Erörterung dieser Ausnahmen, sowie die damit zusammenhängende Frage, wann die Verbindungslinie zweier Punkte einer solchen Gruppe die beiden reellen Doppelgeraden schneidet, hier nicht weiter eingehen und nur bemerken, dass sie mit einer Eintheilung der cyklisch-projectivischen Gruppen in Unterarten zusammenhängt, die mit der Eintheilung der regulären Polygone in Arten analog ist.

19) Auf die, wie oben gezeigt, aus b_1 entstehende neue Gruppe von n Punkten lassen sich dieselben Sätze anwenden, wie auf die ursprüngliche, und sie liegt also im Falle bc oder ad auf zwei Ebenen und gleichzeitig auf zwei Kegeln; oder, im Falle bd, auf einem Hyperboloid. Im letzten Falle bilden alle, durch verschiedene Annahme für b_1, so entstehenden einmanteligen Hyperboloide eine einfach unendliche Schaar von Flächen, die, weil sie 4 imaginäre Kanten eines Tetraeders enthalten, sich in keinem reellen Punkte treffen. Für alle Flächen sind die Linien A und B conjugirte Polaren, weil die durch die eine gehenden imaginären Tangentenebenen, nämlich die Tetraederflächen, in Punkten der andern berühren. Hat man auf einer der

Flächen alle cyklisch-projectivischen Gruppen von n Punkten construirt, so kann man leicht die auf jeder andern finden. Liegen nämlich die beiden Punkte a_1 und b_1 zweier Gruppen auf einer Geraden, die A und B schneidet, so liegen, wie die Umformung T lehrt, a_2 und b_2 ebenfalls auf einer solchen Geraden u. s. w. Man kann also mit Hülfe solcher Strahlen die zweite Gruppe aus der ersten ableiten.

Ein specieller Fall wird gebildet durch die Schaar der concentrischen und coaxialen einmanteligen Rotationshyperboloide, wobei die Gerade A die Rotationsaxe und die B eine zur Axe senkrechte unendlich ferne Grade ist. Mit Hülfe von zwei regulären Vielecken, die man dem Kehlkreis einer dieser Flächen einschreibt, kann man dann die Erzeugenden beider Schaaren zu cyklisch-projectivischen Gruppen ordnen und so leicht eine Punktgruppe realisiren.

Karlsruhe, 10. December 1877.

Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen.

Von

A. Voss in Darmstadt.

Die Theorie der orthogonalen Substitutionen ist bereits vielfach behandelt und durch die berühmten Cayley'schen Formeln, vermöge deren sich die Coefficienten einer allgemeinen orthogonalen Substitution a priori angeben lassen, zu einem gewissen Abschluss gebracht. Es ist bekannt, in welch' enger Beziehung dieselbe zu der weiteren Aufgabe steht, eine quadratische Form in sich selbst zu transformiren (Hermite'sche Transformation), ein Problem, welches nicht allein für drei und vier homogene Variabele eine anschauliche Bedeutung in der Ebene und im Raume, sondern auch namentlich für sechs eine geometrische Repräsentation in der Transformation des Linienraumes findet. Indem ich die Coefficienten der Gleichung einer durch ihre Tangenten dargestellten Fläche zweiten Grades als Coefficienten einer speciellen (symmetrischen) orthogonalen Substitution erkannte, ergab sich Veranlassung gewisse Determinanten solcher Coefficienten genauer zu untersuchen.*) Ich habe seitdem bemerkt, dass eine ganze Reihe der in einer früheren Arbeit ausgeführten Betrachtungen sich auf orthogonale Substitutionen überhaupt ausdehnen lassen, deren Ausführung den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet.**)

In § I. sind die bekannten Bedingungen für die Coefficienten a_{ik} einer orthogonalen Substitution aufgestellt, durch welche eine Fläche zweiten Grades in sich transformirt wird, und die Beziehungen zwischen den Elementen entwickelt, welche bei der Transformation fest bleiben. Daran schliesst sich *in* § II. *eine allgemeine Untersuchung der Unterdeterminantensysteme solcher Substitutionen*, welche, wie ich glaube, geeignet ist, die verschiedenen Fälle, die überhaupt bei ihnen auf-

---

*) Math. Annalen X.

**) Erst nach Vollendung derselben (Juni 1877) erschien die umfangreiche neueste Arbeit des Herrn Frobenius: „Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen," Crelle 84, 1.

treten können, a priori übersehen zu lassen. Insbesondere erwähne ich eine dabei hervortretende directe Ableitung der Cayley'schen Formeln selbst.

In dem folgenden § III. sind die quadratischen Formen, welche gleichzeitig durch die Substitution in sich transformirt werden, besprochen, *sowie die Gruppe der mit einer gegebenen Substitution vertauschbaren allgemein hergeleitet.* Insbesondere habe ich dabei versucht der merkwürdigen Zerlegung der Transformation einer Fläche zweiten Grades im gewöhnlichen Raume, nach welcher man eine jede aus zwei speciellen vertauschbaren Transformationen zusammensetzen kann, bei denen je ein System von Erzeugenden fest bleibt, ein Analogon in höheren Räumen zu geben. § V. untersucht Transformationen von *speciellem Charakter*, namentlich die *uneigentliche*, welche als *Centralprojection der Fläche in sich selbst von einem beliebigen Punkte aus* aufgefasst werden kann, und die *symmetrische*, bei welcher die Coefficienten a_{ik} und a_{ki} gleich sind. Weiter ist das Problem der *Zerlegung der Substitutionen behandelt*, namentlich gezeigt, wie *jede allgemeine durch eine gewisse Zahl uneigentlicher specieller*, d. h. durch wiederholte Centralprojectionen von Punkten aus, die nach einer sehr einfachen Regel gefunden werden können, oder durch *zwei symmetrische* ersetzt werden können, welch' letztere wieder aus einer Gruppe vertauschbarer Centralprojectionen hervorgehen.

In § VI. sind die besonderen Fälle der Substitutionen bei 2, 3, 4, 6 homogenen Variabeln behandelt und geometrisch interpretirt; zugleich habe ich versucht sämmtliche Substitutionen dieser Art aufzuzählen. Dabei ergeben sich gewisse Eigenschaften der reciproken Punkt-Ebenentransformation, welche, obwohl in naher Beziehung zu von den Herren Schröter und Rosanes behandelten Fragen stehend, in so allgemeiner Form wohl noch nicht ausgesprochen sind, und die in § VII. direct durch *eine allgemeine Untersuchung der Reciprocität* bestätigt werden.

Die im Vorigen entwickelten Begriffe gestatteten, die Transformation einer (gewöhnlichen) Fläche zweiten Grades von einem neuen Gesichtspunkte aus zu behandeln. Endlich ist im letzten Paragraphen die Transformation gegebener linearer Formen untersucht, insbesondere die Hermite'sche Transformation eines Kegelschnittes im Raume entwickelt.

§ I.

Die orthogonale Substitution.

Eine *orthogonale lineare Substitution* bei n homogenen Variabeln:

(1) $$y_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

ist dadurch charakterisirt, dass

$$(2)\qquad \sum y_i^2 = m \sum x_i^2$$

ist. Demnach müssen bekanntlich die Gleichungen:

$$(3)\qquad \sum_i a_{ik} a_{il} = 0, \qquad \sum_i a_{ik} a_{ik} = m$$

stattfinden. In Folge dessen lassen sich die Gleichungen (1) umkehren, so dass:

$$(4)\qquad m x_i = \sum_k y_k a_{ki},$$

womit dann auch:

$$(5)\qquad \sum_i a_{ki} a_{li} = 0, \qquad \sum_i a_{ki} a_{ki} = m$$

wird. Die Gleichungen (3) oder (5) ergeben für das Quadrat der Substitutionsdeterminante:

$$\Delta = | a_{ik} |,$$

die Gleichung:

$$\Delta^2 = m^n.$$

Mithin hat Δ einen der beiden Werthe $\pm \sqrt{m^n}$. Wir unterscheiden darnach *eigentliche* und *uneigentliche* Substitutionen. Beide spielen bei geradem n, welchen Fall wir vorzugsweise behandeln werden, eine wesentlich verschiedene Rolle, insofern dann eine eigentliche Substitution durch keine blosse Zeichenänderung in eine uneigentliche verwandelt werden kann. Die Wiederholung zweier Substitutionen derselben Art liefert immer eine eigentliche Substitution.

Die Elemente x_i, welche durch die Substitution (1) *in sich selbst übergehen*, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$(6)\qquad y_i = \varrho x_i = \sum a_{ik} x_k,$$

d. h. durch die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades:

$$| a_{ik} - \varrho | = 0,$$

oder:

$$(7)\qquad \Omega(\varrho) = 0,$$

in welcher ϱ nur mit den Gliedern der Hauptdiagonale verbunden ist.

Durch Ausführung der Multiplication beweist man leicht die Relation:*)

$$(8)\qquad \Delta\,\Omega(\varrho) = (-1)^n \varrho^n \,\Omega\left(\frac{m}{\varrho}\right).$$

Aus (8) folgt die Reciprocität der Wurzeln der Gleichung (7).

---

*) Brioschi, Liouville's J. XIX, 253; Faa de Bruno, ebenda pag. 320.

Für gerades n ersieht man ferner, dass, wenn $\Delta = -\sqrt{m^n}$, zwei Wurzeln derselben gleich $\pm\sqrt{m}$ sind. Für ungerades n dagegen ist die Wurzel $+\sqrt{m}$ vorhanden, wenn $\Delta = m^{\frac{n}{2}}$, die Wurzel $-\sqrt{m}$ im entgegengesetzten Falle*). Wir nennen diese Wurzeln *ausgezeichnete* oder *besondere* Wurzeln von $\Omega(\varrho) = 0$.

Die nicht ausgezeichneten Wurzelwerthe werden wir immer durch die Buchstaben:

$$r_1, \varrho_1, r_2, \varrho_2, r_3, \varrho_3, \cdots$$

bezeichnen, so dass

$$r_s \varrho_s = m.$$

Man betrachte nun irgend zwei Lösungssysteme von (6) α_i, β_i, welche zu den Wurzeln ϱ_α, ϱ_β gehören. Dann ergiebt sich:

$$\varrho_\alpha^2 \sum \alpha_i^2 \quad = m \sum \alpha_i^2,$$
$$\varrho_\alpha \varrho_\beta \sum (\alpha_i \beta_i) = m \sum (\alpha_i \beta_i).$$

Daraus folgt: *Sobald ϱ_α nicht einen der besonderen Werthe $\pm\sqrt{m}$ besitzt, ist $\sum \alpha_i^2 = 0$, ferner besteht zwischen je zwei Lösungssystemen, welche zu nicht reciproken Wurzeln gehören, die involutorische (harmonische) Beziehung:*

$$\sum \alpha_i \beta_i = 0.$$

Wir werden im Folgenden die Lösungen, welche zu der Wurzel r_s gehören, durch:

$$x_1^s, x_2^s, \cdots x_n^s,$$

die zur reciproken ϱ_s gehörigen durch:

$$y_1^s, y_2^s, \cdots y_n^s,$$

bezeichnen.

Indem wir uns der Bezeichnung $(\alpha\beta)$, (α^2) an Stelle von $\sum \alpha_i \beta_i$, $\sum \alpha_i^2$ bedienen, gelten daher zwischen diesen Systemen die Beziehungen:

(3) $$(x^s x^t) = 0, \quad (x^s y^t) = 0, \quad (y^s y^t) = 0, \quad (x^s y^s) = 1.$$

Sieht man die Variabelen x überhaupt als Punkte (Elemente) eines Raumes (Gebietes) von $n - 1$ Dimensionen an, so kann man sagen, *die Fläche:*

$$f = \sum x_i^2 = 0,$$

sei auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Ecken zu je zweien harmonische Pole derselben bilden. Den Substitutionsprocess kann man

*) Brioschi a. a. O. Baltzer, Det. pag. 184, Aufl. 4.

als *Bewegung* des Raumes bezeichnen, wenn die Substitution eine eigentliche ist, im anderen Falle als eine *symmetrische* Umformung*) Setzt man ferner:

$$y_i = \sum a_{ik} x_k,$$

$$z_i = \sum a_{il} \xi_l,$$

so ist:

$$(yz) = m(x\xi).$$

Die Substitution hat also die Eigenschaft, jedes Polareck der Fläche in ein anderes überzuführen, während f in sich selbst übergeht. Die Coefficienten a_{ik} bilden nach (3) und (5) selbst die Coordinaten zweier Polarecke. Diese letzteren gehen freilich durch die orthogonale Substitution (1) nicht in einander über. Aber durch zweimalige Wiederholung der nämlichen Substitution (1) leitet man die *eigentliche* Substitution:

$$y_i = \sum b_{ik} x_k,$$

her, wo:

$$b_{ik} = \sum a_{il} a_{lk}.$$

Daraus ergiebt sich für $x_i = a_{mk}$:

$$y_i = m\, a_{im}.$$

Jene beiden Polarecke können daher immer durch eine eigentliche Substitution in einander übergeführt werden, d. h. sie sind als einander direct congruent zu betrachten.

Andererseits ist in:

$$y_i = \sum a_{ik} x_k,$$

für $x_k = a_{mk}$

$$y_i = \sum a_{ik} a_{mk} = m[im],$$

wo $[im]$ gleich 0 oder 1, jenachdem i und m verschieden oder gleich sind; so dass die gegebene Substitution das eine der beiden Polarecke in das Fundamentalgebilde der Coordinatenbestimmung überführt.

Nach (6) und (7) *bleiben im Allgemeinen n Punkte fest bei der Substitution.* Sie bilden bei *geradem n und eigentlicher* Substitution die *Ecken eines von Erzeugenden der Fläche gebildeten Polygons*, bei *uneigentlicher* Substitution befinden sich dagegen unter ihnen *zwei harmonische Pole* derselben, welche mit den anderen $n-2$ Punkten verbunden Tangenten der Fläche liefern**). Bei ungeradem n ist

---

*) Für ungerades n würden die Bewegungen noch auf eine andere Weise von den symmetrischen Umformungen zu trennen sein. Vgl. Klein, Math. Ann. IV, pag. 602.

**) Frahm, Inauguraldissertation, § 15.

mindestens immer ein nicht auf der Fläche gelegener Punkt festbleibend.

Wir betrachten ferner das Product der beiden Determinanten:

$$\Omega(+\varrho)\times\Omega(-\varrho).$$

Man erhält durch Ausführung der Multiplication, abgesehen von dem Factor ϱ^n, eine Determinante, deren Glieder die $a_{ik}-a_{ki}$ sind, während die Glieder der Hauptdiagonale sämmtlich gleich $\frac{m}{\varrho}-\varrho$ sind. Das heisst: *Bei geradem n und uneigentlicher Substitution verschwindet die schiefe Determinante der $a_{ik}-a_{ki}$ sammt ihren ersten Unterdeterminanten.* (Bei ungeradem n verschwindet sie natürlich identisch.)

Man kann diesem Verschwinden der Unterdeterminanten in dem gedachten Falle leicht eine geometrische Bedeutung unterlegen. Führt man die nämliche Substitution (1) zweimal hinter einander aus, so erhält man zur Bestimmung der festgebliebenen Punkte die Gleichung n^{ten} Grades:

$$|\varrho a_{ks}-m a_{sk}|=0.$$

Bei der uneigentlichen Substitution hat dieselbe eine Doppelwurzel $\varrho=m$, welche das Vorhandensein einer ganzen Reihe von Punkten anzeigt, die in sich selbst übergehen. Es ist die lineare Reihe, welche die beiden nicht auf der Fläche gelegenen Punkte verbindet. *Die uneigentliche Substitution zweimal hintereinander ausgeführt, liefert also keine eigentliche Substitution von allgemeinem Charakter, sondern eine specielle Bewegung.**)

Wir untersuchen noch die *symmetrische Determinante der quadratischen Form:*

$$\sum a_{ik}x_i x_k.$$

Man erhält leicht:

$$(\Omega\varrho)^2=\Psi(\sigma)\,2^n\,(-1)^n\,\varrho^n,$$

wo:

$$\Psi(\sigma)=\begin{vmatrix} a_{11}-\sigma & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}+a_{n1}}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{a_{n1}+a_{1n}}{2} & \cdot & \cdots & a_{nn}-\sigma \end{vmatrix}$$

und:

$$\sigma=\frac{\varrho^2+m}{2\varrho}.$$

Bei eigentlicher Transformation und geradem n ist also Ψ das Quadrat eines Polynoms in σ, da je zwei reciproke Wurzeln auf denselben Werth von σ führen. Es lässt sich leicht zeigen, *dass Ψ für jede seiner Doppelwurzeln sammt allen ersten Unterdeterminanten verschwindet.*

*) Zwei solche eigentliche Substitutionen ergeben dagegen combinirt eine nicht weiter ausgezeichnete eigentliche Substitution.

Ist z. B.:

$$\varrho_\alpha \alpha_i = \sum a_{ik} \alpha_k,$$

so folgt:

$$\frac{m}{\varrho_\alpha} \alpha_i = \sum a_{ki} \alpha_k,$$

d. h.:

$$\left(\frac{m}{\varrho_\alpha} + \varrho_\alpha\right) \alpha_i = \sum (a_{ik} + a_{ki}) \alpha_k,$$

$$\left(\frac{m}{\varrho_\beta} + \varrho_\beta\right) \beta_i = \sum (a_{ik} + a_{ki}) \beta_k,$$

woraus ersichtlich ist, dass die Gleichungen:

$$2\sigma x_i = \sum (a_{ik} + a_{ki}) x_k$$

eine lineare Reihe von Auflösungen besitzen. Die quadratische Form hat hiernach bei geradem n und eigentlicher Substitution den Charakter:

$$[(11)\,(11)\,(11)\cdots],$$

sie ist eine von denen, welche durch die Substitution in sich selbst übergeführt werden.

§ II.

Systeme von Unterdeterminanten.

Im vorigen § ist vorausgesetzt, dass die Substitutionen von allgemeinstem Charakter, d. h. sämmtliche Wurzeln von $\Omega(\varrho) = 0$ von einander verschieden sind. Die speciellen Fälle orthogonaler Substitutionen sind dadurch charakterisirt, dass von den n Wurzeln irgend welche zusammenfallen, und stufen sich nach der Art und Weise ab, wie die Unterdeterminanten von $\Omega(\varrho)$ für solche vielfache Wurzeln sich verhalten.

Man kann die orthogonalen Substitutionen daher nach der Beschaffenheit der *Elementartheiler* von $\Omega(\varrho)$ classificiren, *insofern mit jeder besonderen Vertheilung derselben eine wesentliche Gruppirung der festbleibenden Elemente verbunden ist. Dabei zeigt sich, dass das Auftreten der Elementartheiler an gewisse Gesetze gebunden ist, welche die Zahl der möglichen Fälle a priori auf eine gewisse kleinste Zahl einzuschränken erlauben*, deren Existenz dann freilich noch einer directen Prüfung unterliegen muss. Diese Gesetze ergeben sich durch eine genauere Betrachtung der Unterdeterminanten von $\Omega(\varrho)$, die wir im Folgenden ausführen werden.

Wir betrachten die k-fach mit beliebigen Grössenreihen u, v, w, $\cdots$ vertical und U, V, W, $\cdots$ horizontal geränderte Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & \cdots & a_{1n} & u_1 & v_1 & w_1 & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\varrho & u_n & v_n & w_n & \cdots \\ U_1 & \cdots & U_n & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ V_1 & \cdots & V_n & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ W_1 & \cdots & W_n & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}$$

welche zur Abkürzung durch

$$\Big[u\,v\,w \cdots U\,V\,W \cdots\Big]_\varrho$$

bezeichnet werden möge; die Coefficienten der Verbindungen der $uvw \cdots UVW \cdots$ sind *die k^{ten} Unterdeterminanten von* $\Omega(\varrho)$ (Unterdeterminanten $n-k^{ten}$ Grades).

Multiplicirt man dieselbe mit Δ, so entsteht, wenn

$$\varrho' = \frac{m}{\varrho},$$

gesetzt wird:

$$(-1)^{n-k}\varrho^{n-k}\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho' & \cdots & a_{1n} & \sum U_i a_{1i} & \sum V_i a_{1i} & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\varrho' & \sum U_i a_{ni} & \sum V_i a_{ni} & \cdots \\ u_1 & \cdots & u_n & 0 & 0 & \cdots \\ v_1 & \cdots & v_n & 0 & 0 & \cdots \\ w_1 & \cdots & w_n & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix},$$

oder, wenn $\sum U_i a_{ri} = U_r'$, $\sum V_i a_{ri} = V_r'$, die Gleichung:

$$(1)\quad \Big[u\,v\,w \cdots U\,V\,W \cdots\Big]_\varrho \Delta = (-1)^{n-k}\varrho^{n-k}\Big[U'\,V'\,W' \cdots u\,v\,w\Big]_{\varrho'}.$$

Hat demnach die linke Seite den Factor $[\varrho-\varrho_\alpha]^m$, so muss die rechte Seite den Factor $[\varrho'-\varrho_\alpha]^m$ haben. Damit ist bewiesen, *dass das Verschwinden sämmtlicher k^{ten} Unterdeterminanten im m^{ten} Grade für eine Wurzel ϱ_α zugleich das Verschwinden der analogen Unterdeterminanten in gleicher Weise für die reciproke Wurzel r_α bedingt.**)

Man kann die rechte Seite der Gleichung (1) in eine neue Form bringen. Zieht man nämlich die n ersten Verticalreihen, mit den $U_i, V_i, W_i \cdots$ multiplicirt, von den folgenden ab, so treten an Stelle der $U'\,V'\,W' \cdots$ wieder die mit ϱ' multiplicirten U, V, W selbst, während die Nullen in der Ecke der Determinante durch die Ausdrücke $-(uU)$, $-(uV)$, $-(uW)$ etc. zu ersetzen sind.

---

*) Voss, Mathematische Annalen X, pag. 163.

Ein besonders bemerkenswerthes Resultat ergiebt sich hier, wenn $\varrho = \pm\sqrt{m}$ genommen wird. In diesem Falle ist $\varrho = \varrho'$. Ist zunächst n gerade, $k = 1$ und die Substitution eine eigentliche, so hat man aus (1) nach Ausführung der eben angegebenen Reduction:

$$\Delta\left[uU\right]_{\pm\sqrt{m}} = (-1)^{n-1}\varrho^{n-1}\varrho'\left[\left[Uu\right]_{\pm\sqrt{m}} - \frac{1}{\varrho'}\,\Omega\,(\pm\sqrt{m})\,(uU)\right],$$

oder, da $\Delta = \varrho^n$,

$$\text{(2)}\qquad \left[uU\right] + \left[Uu\right]_{\pm\sqrt{m}} = -\frac{1}{\pm\sqrt{m}}\,\Omega\,(\pm\sqrt{m})\,(uU).$$

Daraus ist, wenn wir die ersten Unterdeterminanten von Ω durch Δ_{ik} bezeichen:

$$\text{(3)}\qquad \Delta_{ik} = -\Delta_{ki}, \qquad \Delta_{ii} = \Delta_{kk} = \mp\frac{\Omega\,(\pm\sqrt{m})}{2\sqrt{m}}.$$

Die ersten Unterdeterminanten von $\Omega\,(\pm\sqrt{m})$ bilden also eine schiefe Determinante, deren Hauptdiagonalglieder ein und denselben Werth besitzen.

Man kann also das adjungirte System der $\left[a_{ik} + \sqrt{m}\right]$ in der Form:

$$\mathsf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$b_{ik} = -b_{ki}, \qquad b_{ii} = -\frac{\Omega\,(\pm\sqrt{m})}{2\sqrt{m}} = \omega$$

darstellen. Nun sind aber die ersten Unterdeterminanten des adjungirten Systemes wieder den ursprünglichen Elementen proportional. Bezeichnet man also die Unterdeterminanten der b_{ik} durch β_{ik}, so hat man:

$$\beta_{ik} = -a_{ik}\left(\Omega\,(+\sqrt{m})\right)^{n-2},$$
$$\beta_{ii} = -\left(a_{ii} + \sqrt{m}\right)\left(\Omega\,(+\sqrt{m})\right)^{n-2}.$$

Da endlich die Determinante B selbst gleich $\left(\Omega\,(+\sqrt{m})\right)^{n-1}$ ist, so hat man schliesslich:

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases} a_{ik} = -\dfrac{\beta_{ik}\left(\Omega\,(\pm\sqrt{m})\right)}{\mathsf{B}} = 2\omega\,\dfrac{\beta_{ik}}{\mathsf{B}}\,\sqrt{m} \\[2ex] a_{ii} + \sqrt{m} = -\dfrac{\beta_{ii}\left(\Omega\,(\pm\sqrt{m})\right)}{\mathsf{B}} = 2\omega\,\dfrac{\beta_{ii}}{\mathsf{B}}\,\sqrt{m}. \end{cases}$$

Es sind die Formeln (4) aber genau diejenigen, welche Cayley zur Bestimmung der Coefficienten einer orthogonalen Substitution angegeben hat.*) Damit ist bewiesen, dass in der That *jene Cayley'schen*

*) Cayley, Crelle 32. Baltzer, Det. p. 175.

Formeln die allgemeinsten sind, welche diese Aufgabe lösen, eine Frage, welche bisher eine Lücke in der Theorie der orthogonalen Substitutionen bildete. Auch Herr Rosanes*) hat schon gelegentlich bemerkt, dass aus dem Umstande, dass die Cayley'schen Formeln die erforderliche Zahl willkürlicher Parameter enthalten, noch nicht geschlossen werden könne, dass sie den vollen Grad der Allgemeinheit besitzen;**) es lasse sich aber ohne Schwierigkeit ein befriedigender Beweis dafür erbringen.***) Immerhin dürfte der vorhin gegebene, welcher direct die Coefficienten a_{ik} als Unterdeterminanten einer schiefen Determinante nachweist, einfach und übersichtlich genug sein, um hier eine Stelle zu beanspruchen.

Für eine uneigentliche Substitution verschwindet dagegen bei geradem n die Determinante $\Omega(+\sqrt{m})$; die Gleichung (1) giebt dann:

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ki},$$

d. h.: *die ersten Unterdeterminanten bilden ein symmetrisches System*, so dass die Lösung α_i, welche z. B. der Wurzel $+\sqrt{m}$ entspricht, der fortlaufenden Proportion genügt:

$$\alpha_1^2 : \alpha_1\alpha_2 : \alpha_1\alpha_3 : \alpha_1\alpha_4 : \cdots = \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13} : \Delta_{14} \cdots$$

---

*) Rosanes, Crelle 80, p. 52, 71.

**) Vgl. dazu § V., wo in der That Substitutionsformeln mit viel mehr willkürlichen Parametern angegeben sind, die keineswegs allgemein sind.

***) Wir heben noch folgenden Zusammenhang zwischen den Coefficienten a_{ik} und b_{ik} hervor. Wenn nach Cayley:

$$a_{ik} = 2\beta_{ik}\frac{\omega}{B}\sqrt{m} - [\sqrt{m}],$$

und

$$\Sigma a_{ik}x_k = \varrho x_i$$

ist, so folgt:

$$\Sigma a_{ik}x_k = \varrho x_i = 2\omega\frac{\sqrt{m}}{B}\Sigma\beta_{ik}x_k - x_i[\sqrt{m}],$$

also wenn mit b_{ij} multiplicirt wird, wegen $\Sigma b_{ik}\beta_{ik} = B$,

$$(\varrho + \sqrt{m})\Sigma x_i b_{ij} = 2\omega\sqrt{m}\,x_j.$$

Hiernach findet zwischen den Wurzeln der Determinanten $\Omega(\varrho)$ und $|b_{ii} - \varrho'|$ der Zusammenhang statt, dass

$$\varrho' = \frac{2\omega\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \varrho},$$

wogegen die ersten Unterdeterminanten beider Determinanten für correspondirende Wurzelwerthe proportional sind. Also ist mit jeder endlichen eigentlichen orthogonalen Substitution $y_i = \Sigma a_{ik}x_k$ eine *unendlich kleine*:

$$y_i = x_i + (\Sigma b_{ik}x_k)\,dt$$

verknüpft, welche dasselbe Gebilde von n Punkten ungeändert lässt, deren Wiederholung aber nicht die endliche Substitution hervorbringt.

Wir setzen voraus, *es seien die $k-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten die letzten, welche sämmtlich für eine Wurzel r_α verschwinden.* Man kann dann in (1) die Summen $-(uU)$, weil sie keine Beiträge zu den Werthen der k^{ten} Unterdeterminanten liefern, fortlassen, und erhält so:

$$(5)\qquad \Delta\left[uvw\cdots UVW\cdots\right]_{\varrho} = (-1)^{n-k}\varrho^{n-k}\varrho'^{k}\left[UVW\cdots uvw\cdots\right]_{\varrho'}.$$

Bezeichnet man nun, wie gebräuchlich, den $2k^{\text{ten}}$ partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^{2k}\quad[uvw\cdots UVW\cdots]}{\partial u_i\partial v_k\partial w_l\cdots\partial U_j\partial V_\varkappa\partial W_\lambda\cdots},$$

durch:

$$\Delta_{ikl\ldots j\varkappa\lambda\ldots},$$

so hat man:

$$(6)\qquad \left\{\Delta_{ikl\ldots j\varkappa\lambda\ldots}\right\}_{\varrho} = (-1)^{n-k}\varrho^{n-2k}\frac{m^k}{\Delta}\left\{\Delta_{j\varkappa\lambda\ldots ikl\ldots}\right\}_{\varrho'},$$

eine Gleichung, nach welcher die Unterdeterminanten reciproker Wurzeln gewisse Symmetrieeigenschaften besitzen. Wir wollen dieselbe zunächst für den Fall in Anwendung bringen, dass bei eigentlicher Substition $\pm\sqrt{m}$ eine der Wurzeln ist. Es folgt für $k=1$:

$$\Delta_{ik} = -\Delta_{ki},\qquad \Delta_{ii} = -\Delta_{ii} = 0.$$

Die bekannte Identität zwischen den ersten Unterdeterminanten einer verschwindenden Determinante:

$$\Delta_{ii}\Delta_{kk} - \Delta_{ik}\Delta_{ki} = 0$$

zeigt dann, dass auch $\Delta_{ik}=0$. *Die ausgezeichneten Wurzelwerthe bedingen daher, wenn sie nicht, wie bei geradem n und uneigentlicher Substitution, oder bei ungeradem n, eo ipso der Transformation zukommen, mindestens das Verschwinden aller ersten Unterdeterminanten.*

Man kann diesen Schluss erweitern. Wir nehmen an, dass nicht allein die ersten, sondern noch die $2m^{\text{ten}} = k_1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten sämmtlich verschwinden für einen dieser ausgezeichneten Werthe. In diesem Falle ist bei eigentlicher Substitution:

$$\Delta_{ikl\ldots j\varkappa\lambda\ldots} = -\Delta_{j\varkappa\lambda\ldots ikl\ldots},$$

woraus zunächst das Verschwinden aller k^{ten} *Hauptunterdeterminanten*, damit aber das Verschwinden *aller* k^{ten} *Unterdeterminanten* folgt. *Verschwinden also bei einer eigentlichen Substitution für $\varrho=\pm\sqrt{m}$ noch die sämmtlichen k^{ten} Unterdeterminanten, die höheren dagegen nicht, so ist k nothwendig eine ungerade Zahl.*

Ein analoges Theorem lässt sich auch für uneigentliche Substitutionen aufstellen. Wenn hier $k-1=2m-1$ ist, so hat man wieder für $\varrho=\pm\sqrt{m}$

$$\Delta_{ikl\ldots} = -\Delta_{j\varkappa\lambda\ldots},$$

so dass bei uneigentlicher Substitution immer nur die sämmtlichen Unterdeterminanten bis zu einer geraden Ordnung hin verschwinden können.

Dass das Verschwinden der k^{ten} Hauptunterdeterminanten das sämmtlicher k^{ten} Unterdeterminanten nach sich zieht, beruht auf einem allgemeinen Satze, dessen Beweis wir hier noch besonders einschalten. Derselbe lautet:

Wenn in einer Determinante die $k-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten sämmtlich verschwinden, dagegen die k^{ten} Unterdeterminanten ein symmetrisches oder alternirendes System bilden, so können diese letzteren nur dann von Null verschieden sein, wenn sich unter den Hauptunterdeterminanten nicht verschwindende befinden, und umgekehrt zieht das Verschwinden der k^{ten} Hauptunterdeterminanten das aller anderen nach sich.

Ein etwas allgemeinerer Satz ist neuerdings von Herrn Frobenius*) ausgesprochen worden. Zum Beweise bedienen wir uns ähnlicher Ueberlegungen, wie sie zur Begründung des Kronecker'schen Satzes**) in Anwendung kommen, führen ihn aber der Uebersichtlichkeit halber an einer sechsreihigen Determinante der b_{ik}, deren vierreihige Unterdeterminanten sämmtlich, deren dreireihige Hauptunterdeterminanten ebenfalls verschwinden.

Sei nun eine der nicht verschwindenden dreireihigen Determinanten:

$$S = \begin{vmatrix} b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{34} & b_{35} & b_{36} \end{vmatrix},$$

so folgt aus dem identischen Verschwinden von:

$$\begin{vmatrix} b_{14} & b_{15} & b_{16} & \sum b_{1i}\,\mathsf{B}_i \\ b_{24} & b_{25} & b_{26} & \sum b_{2i}\,\mathsf{B}_i \\ b_{34} & b_{35} & b_{36} & \sum b_{3i}\,\mathsf{B}_i \\ b_{\alpha 4} & b_{\alpha 5} & b_{\alpha 6} & \sum b_{\alpha i}\,\mathsf{B}_i \end{vmatrix},$$

für $\mathsf{B}_4 = 0$, $\mathsf{B}_5 = 0$, $\mathsf{B}_6 = 0$, wenn die $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3$ die Gleichungen:

$$\sum b_{1i}\,\mathsf{B}_i = 0, \qquad \sum b_{2i}\,\mathsf{B}_i = 0, \qquad \sum b_{3i}\,\mathsf{B}_i = 0$$

befriedigen, dass auch:

$$\sum b_{\alpha i}\,\mathsf{B}_i = 0.$$

Demnach verschwinden alle dreireihigen Determinanten:

---

*) Frobenius, Crelle 82, p. 241.

**) Kronecker, Crelle 72, p. 152.

$$\begin{vmatrix} b_{\alpha 1} & b_{\alpha 2} & b_{\alpha 3} \\ b_{\beta 1} & b_{\beta 2} & b_{\beta 3} \\ b_{\gamma 1} & b_{\gamma 2} & b_{\gamma 3} \end{vmatrix}.$$

Unter diesen befindet sich aber nach der Voraussetzung dem absoluten Werth nach einmal auch die Determinante S, womit wir auf den Widerspruch $S = 0$ geführt sind. *Das Verschwinden einer dreireihigen Hauptunterdeterminante zieht also das aller derjenigen dreireihigen Determinanten nach sich, die aus den Horizontalreihen und Verticalreihen gebildet werden können, die sich in jener kreuzen.*

Man kann jenes Verschwinden der Unterdeterminanten auch mit den Betrachtungen über schiefe Determinanten in Verbindung bringen. Wenn man die Determinante

$$\Big[uvw \cdots \quad UVW \cdots\Big]_{+\varrho}$$

mit

$$\Omega(-\varrho)$$

multiplicirt, so entsteht eine Determinante, deren k Ränder, so lange $\Omega(-\varrho)$ nicht selbst verschwindet, wieder als aus ganz beliebigen Grössen bestehend angesehen werden können, deren Kern aber eine schiefe Determinante bildet, deren Diagonalglieder für $\varrho = \pm\sqrt{m}$ sämmtlich Null sind. Dann folgt der obige Satz leicht aus dem Theorem, dass in einer schiefen Determinante (gerader Ordnung) die Reihe der verschwindenden Unterdeterminanten immer mit einer ungeraden Zahl schliesst.*) Aber es erscheint zweifelhaft, ob dieser Beweis eine Ausdehnung auch auf diejenigen Fälle gestattet, in denen $\Omega(-\varrho)$ ebenfalls gleich Null ist.

Das Verschwinden der Hauptunterdeterminanten, welches aus Gleichung (6) sich ergab, kann noch auf andere Art dargethan werden, welche hier kurz angedeutet werden möge.

Setzt man die gegebene eigentliche (uneigentliche) Substitution mit einer ungeraden (geraden) Zahl k uneigentlicher von der Art:

$$y_i = x_i - 2a_x a_i \text{**)}$$

zusammen, so entsteht eine uneigentliche Substitution, d. h. eine solche, deren Determinante $\Omega(\varrho)$ die beiden Wurzeln $\pm\sqrt{m}$ besitzt.

Daraus ergiebt sich der Satz:

Rändert man die Determinante der $|a_{ik} - \varrho|$ *vertical mit k beliebigen Grössenreihen $a_i, b_i, c_i \cdots$, und horizontal mit denselben, aber mit dem Factor ϱ multiplicirt, und ersetzt man noch die k^2 Elemente der Ecke durch das Schema:*

---

*) Frobenius, Crelle 82, pag. 242.

**) Vgl. über solche Substitutionen noch besonders § V.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2(ab) & -2(ac) & \cdots \\ 0 & -1 & -2(bc) & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & \cdots \\ . & . & . & \\ . & . & . & \end{vmatrix},$$

so entsteht eine Determinante, welche für $\varrho = \pm\sqrt{m}$ identisch Null ist, welches auch die Werthe der $a, b, c \cdots$ sind.

Nimmt man alle a mit Ausnahme eines einzigen, welches gleich 1 gesetzt wird, gleich Null, ebenso alle $b, c, \cdots r$ mit Ausnahme eines einzigen gleich Null, so ergeben sich Gleichungen, *welche eine beliebige k^{te} Hauptunterdeterminante linear durch die $k-1$ ersten Hauptunterdeterminantensysteme ausdrücken*, womit der Beweis des Satzes geliefert ist.

Zum Schluss fügen wir noch hinzu:

Findet das Verschwinden der k^{ten} Unterdeterminanten statt, so existirt immer eine $k$fache Mannigfaltigkeit von Lösungen der Gleichungen (1). Dieselben stellen sämmtlich Punkte von $f = 0$ vor, wenn die Wurzel, für welche das genannte ϱ stattfindet, nicht einen der Werthe $\pm\sqrt{m}$ besitzt. Die involutorische Beziehung bleibt dabei für alle nicht reciproken Wurzeln angehörigen Lösungen erhalten. Die allgemeine Lösung der Gleichungen (1) ist also für die Wurzel ϱ_α von der Form:

$$z_i = \sum_1^{k+1} z_i^k \lambda_k,$$

mit der Eigenschaft $\sum z_i^2 = 0$, welches auch die Werthe der willkürlichen Constanten λ_k sind.*)

§ III.

Formen, welche durch die Substitution in sich übergehen.

Nach der obigen Bezeichnung war:

$$r_s x_i^s = \sum a_{ik} x_k^s, \quad \varrho_s y_i^s = \sum a_{ik} y_k^s,$$

oder:

$$(1) \quad \begin{cases} r_s \sum y_i x_i^s = m \sum x_i x_i^s, \\ \varrho_s \sum y_i y_i^s = m \sum x_i y_i^s. \end{cases}$$

Bei geradem n und eigentlicher Substitution existiren also $\frac{n}{2}$ Paare von linearen Formen, welche in sich transformirt werden, sie stellen n

*) Diese Annalen X, S. 162.

feste Tangentialebenen der Fläche vor. Wir bezeichnen sie der Reihe nach durch:

(2)
$$\begin{cases} X_1\, X_2 \cdots X_s, \\ \Xi_1\, \Xi_2 \cdots \Xi_s, \qquad (2s = n) \end{cases}$$

so dass:

(3)
$$X_r = \sum x_i x_i^r, \qquad \Xi_r = x_i y_i^r.$$

Für die X_i, Ξ_i besteht die Identität:

(4)
$$\sum x_i^2 = 2 X_i \Xi_i.$$

Sie ergiebt sich durch Multiplication der verschwindenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1' \cdots x_n' & X_1 \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \\ y_1^s \cdots y_n^s & \Xi_s \\ x_1 \cdots x_n & \sum x_i^2 \end{vmatrix},$$

mit der Determinante der x_i^s, y_i^s. Die directe Ausführung der rechten Seite von (4) liefert dagegen:

$$\sum X_i \Xi_i = \sum x_t x_t^i y_s^i x_s = \sum x_t x_s (x_t^i y_s^i + x_s^i y_t^i),$$

so dass:

(5)
$$2 \sum x_t^i y_t^i = 1, \qquad \sum x_t^i y_s^i + x_s^i y_t^i = 0.$$

Den Gleichungen (1) zufolge gehen nicht nur die linearen Formen X, Ξ in sich über, sondern auch jede homogene Function der Producte:

$$(X_r \Xi_r).$$

Insbesondere sind die *quadratischen Formen* dieser Eigenschaft von der Gestalt:

(6)
$$F = \sum X_i \Xi_i \lambda_i.\text{*)}$$

Unter den Formen (6) befinden sich auch *specielle*, welche der Gleichung:

(7)
$$\sum \left(\frac{dF}{\partial x_i}\right)^2 = M \sum x_i^2$$

genügen. Sie entstehen, wenn man den Coefficienten λ die Werthe ± 1 in beliebiger Abwechselung ertheilt. Werden von den $s = n/_2$ Grössen λ k gleich $+1$, die übrigen l gleich -1 angenommen, so ist die Charakteristik der Determinante derselben:

---

*) Dass diese Formen die einzigen sind, welche in sich übergehen, erkennt man, wenn man an Stelle der Variabelen x_i einer quadratischen Form $\Sigma x_i x_k a_{ik}$ die X_i, Ξ_i einführt.

$$[(1\,1\,1\cdots)_{2k}(1\,1\cdots)_{2l}],$$

sie stellen daher nur dann Formen von allgemeinstem Charakter vor, die der Gleichung (7) genügen, wenn η von der Form $4m$ ist*)

Im Allgemeinen können bei eigentlicher Substitution keine linearen Formen gegenseitig in einander übergehen.

Denn aus:

$$\sum \alpha_i a_{ik} = \varrho \beta_k,$$
$$\sum \beta_i a_{ik} = m \alpha_k,$$

folgt:

$$\sum \beta_k (a_{ik} - \varrho a_{ki}) = 0,$$

so dass die Coefficienten einer solchen Form β_x, welche durch die Substitution gegenseitig mit α_x vertauscht wird, den ersten Unterdeterminanten der verschwindenden Determinante:

(8) $$|a_{ik} - \varrho a_{ki}| = 0,$$

proportional sind. Aber aus den Gleichungen:

$$\sum a_{ik} x_k^s = r_s x_i^s,$$
$$\sum a_{ki} x_k^s = \varrho_s x_i^s,$$

folgt:

(9) $$\left| a_{ki} - a_{ki} \frac{r_s}{\varrho_s} \right| = 0.$$

D. h.: die Wurzeln der Gleichung (8) *sind sämmtlich reciprok und gleich den Verhältnissen der reciproken Wurzeln der Gleichung* $\Omega(\varrho) = 0$, *während die ersten Unterdeterminanten den* x_i^s, y_i^s *proportional sind:*

Schreibt man (9) in der Form:

$$\left| a_{ik} - a_{ki} \frac{r^{s2}}{m} \right| = 0,$$

so erkennt man, *dass die sämmtlichen ersten Unterdeterminanten von* (8) *verschwinden, für* $\varrho = \frac{r_s^2}{m}$, *sobald noch eine zweite Wurzel* $r_k = -r_s$ *in* $\Omega(\varrho) = 0$ *vorhanden ist.*

In diesem letzteren Falle gehen die linearen Büschel $X_k - \lambda X_s$, $X_k + \lambda X_s$, *sowie* $\Xi_k - \lambda \Xi_s$, $\Xi_k + \lambda \Xi_s$ *gegenseitig in einander über.* Zugleich gehen auch die Producte $X_k \Xi_s$, $X_s \Xi_k$ in $-\frac{1}{m} X_k \Xi_s$, $\frac{1}{m} X_s \Xi_k$, mithin die quadratischen Formen:

$$X_k \Xi_s \lambda_k + X_s \Xi_k \lambda_s$$

in sich über. Enthält insbesondere die Determinante $\Omega(\varrho)$ nur Potenzen

*) Voss, Mathematische Annalen X, pag. 147.

von ϱ mit geraden Exponenten, so ist die Determinante (8) das Quadrat einer ganzen rationalen Function von ϱ, und die quadratischen Formen mit n Parametern:

$$\sum X_k \Xi_s \lambda_k + X_s \Xi_k \lambda_s$$

gehen in sich über. *Sie genügen der Differentialgleichung* (7), *wenn jedes Parameterpaar der Gleichung:*

$$\lambda_k \lambda_s = \text{constans}$$

*genügt, und besitzen dann eine Determinantencharakteristik, welche von allgemeinstem Charakter ist, d. h. lauter einfache Elementartheiler hat**).

Bei einer *uneigentlichen Substitution* dagegen existiren zwei besondere Formen X_1, Ξ_1, welche keine Tangentialebenen der Fläche vorstellen. In Folge dessen findet die Identität:

$$(10) \qquad \sum x_i^2 = X_1^2 + \Xi_1^2 + 2 \sum X_k \Xi_k$$

statt, und die quadratischen Formen:

$$(11) \qquad F = \lambda_1 X_1^2 + \mu_1 \Xi_1^2 + \sum X_k \Xi_k \lambda_k$$

gehen in sich über. Die Formen, welche der Gleichung (7) genügen, entstehen, wenn man wieder die Coefficienten λ, μ gleich ± 1 setzt. Insbesondere sind die beiden quadratischen Formen:

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1^2 - \Xi_1^2 + 2 \sum (X_k \Xi_k - X_l \Xi_l)\,, \\ -X_1^2 + \Xi_1^2 + 2 \sum (X_k \Xi_k - X_l \Xi_l) \end{array} \right.$$

zu erwähnen, welche die allgemeinste Determinantencharakteristik besitzen, sobald $k = l$ sein kann, d. h. wenn $n - 2$ durch 4 theilbar ist.

Die Schaar quadratischer Formen:

$$(13) \qquad \lambda_1 X_1^2 + \mu \Xi_1^2 \pm 2 \lambda X_1 \Xi_1 + 2 \sum X_k \Xi_k \lambda_k$$

dagegen besitzt die Eigenschaft, *dass je zwei entgegengesetztem Zeichen von λ entsprechende Formen gegenseitig in sich übergehen.* Auch unter ihnen befinden sich specielle Formen, welche der Gleichung (7) genügen; sie entstehen, wenn man $\lambda_1 = \sqrt{1 - \lambda^2}$, $\mu = -\sqrt{1 - \lambda^2}$, und die übrigen λ_i gleich ± 1 setzt, und sind vom allgemeinsten Charakter, wenn in der Summe $\sum X_k \Xi_k \lambda_k$ sich gleichviel Glieder mit positivem und negativem Zeichen befinden.

---

*) Ein Beispiel hierfür liefert die Transformation der Fläche zweiten Grades, bei welcher die beiden Systeme der Erzeugenden unter einander vertauscht werden. Vgl. § VIII.

§ IV.

Vertauschbare Substitutionen.

Zwei Substitutionen, (a), (b):

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{(a)}\ y_i = \sum a_{ik} x_k\,, \\ \text{(b)}\ z_j = \sum b_{ji} x_i\,, \end{cases}$$

heissen *vertauschbar*, wenn die Ordnung, in welcher sie nach einander ausgeführt werden, für das Resultat der Substitution gleichgültig ist. Dies führt auf die Bedingungen:

$$(2) \qquad \varrho \sum a_{ji} b_{ik} = \sum b_{ji} a_{ik}\,,$$

oder:

$$(3) \qquad m \varrho b_{sk} = \sum b_{ji} a_{ik} a_{js}\,.$$

Die Gleichungen (3) sagen aus, *dass die bilineare Form:*

$$(4) \qquad F(yy') = \sum b_{mn} y'_m y_n$$

vermöge der Substitution (a) *in sich übergeführt wird.* In der That hat man:

$$F(yy') = \sum b_{mn} y'_m y_n = \sum b_{mn} a_{mr} a_{ns} x'_r x_s = \varrho m F(xx')\,.$$

Aus dem vorigen § III. ergiebt sich aber für den Ausdruck der bilinearen Formen dieser Eigenschaft ohne Weiteres der Ausdruck:

$$(5) \qquad F = \sum l_i X_i \Xi'_i + \lambda_i X'_i \Xi_i\,.$$

Und umgekehrt ergeben sich daraus als Coefficienten einer mit (a) vertauschbaren Substitution (b) die Grössen:

$$(6) \qquad b_{mn} = \sum (l_i x^i_m y^i_n + \lambda_i x^i_n y^i_m)\,.$$

Sollen die b_{mn} ebenfalls Coefficienten einer *orthogonalen* Substitution sein, so findet man leicht nach § III. (5), dass:

$$\lambda_i l_i = \omega\,,$$

d. h. gleich einer beliebigen Constanten zu setzen ist.

Man kann die Aufgabe, sämmtliche Systeme der b_{mn} zu bestimmen, noch auf eine andere Weise lösen.

Man multiplicire die Gleichungen (3):

$$\varrho \sum a_{ji} b_{ik} = \sum b_{ji} a_{ik}$$

mit x^s_k, so entsteht, wegen:

$$r_s x^s_i = \sum a_{ik} x^s_k\,,$$

$$\varrho \sum a_{ji} b_{ik} x^s_k = r_s \sum b_{ji} x^s_i\,.$$

Wird also:

$$(7)\qquad \sum b_{ik} x_k^s = \gamma_i^s$$

gesetzt, so ist:

$$(8)\qquad \varrho \sum a_{ji} \gamma_i^s = r_s \gamma_j^s,$$

aus welcher Gleichung hervorgeht, dass $\varrho = 1$ zu nehmen ist und dass die Grössen γ_j^s von den x_j^s, y_j^s nur um willkürliche Factoren ververschieden sein können. Damit aber hat man zur Bestimmung der b_{ik} die Gleichungen (7) oder:

$$(9)\qquad \begin{cases} \sum b_{ik} x_k^s = l_s x_i^s, \\ \sum b_{ik} y_k^s = \lambda_s y_i^s, \end{cases}$$

aus denen wieder die Gleichungen (6) hervorgehen.

Wir haben dabei die Substitution als eigentliche und n gerade vorausgesetzt. Es ist leicht, die Modificationen anzugeben, welche die übrigen Fälle mit sich führen würden. In dem hier betrachteten Falle ist natürlich die Substitution (b) wieder eine eigentliche, was sich auch durch Bestimmung der Determinante der b_{ik} aus den Gleichungen (7) ergiebt.

Je zwei mit (a) *vertauschbare Substitutionen* (b), (B) *sind nun auch unter sich vertauschbar,* was sich ebenfalls leicht direct verificiren lässt. Da jede Transformation (a) mit sich selbst vertauschbar ist, so muss in der Lösung (b) bei geeigneter Wahl der l, λ auch das System der a_{ik} selbst enthalten sein. In der That kann man leicht die a_{ik} durch die x_i^s, y_i^s ausdrücken und erhält dann:

$$(10)\qquad a_{ik} = \sum (x_k^s y_i^s \varrho_s + x_i^s y_k^s r_s).$$

Diese Darstellung der a_{ik} setzt uns in den Stand, die allgemeinste Zerlegung der gegebenen Substitution in beliebig viele andere vertauschbare auszuführen.

Eine beliebige Zahl von Substitutionen:

$$(11)\qquad \begin{cases} b'_{ik} = \sum l'_s x_i^s y_k^s + \lambda'_s x_k^s y_i^s, \\ b''_{ik} = \sum l_s^2 x_i^s y_k^s + \lambda_s^2 x_k^s y_i^s, \\ \quad\vdots \\ b^r_{ik} = \sum l_s^r x_i^s y_k^s + \lambda_s^r x_k^s y_i^s, \end{cases}$$

setzt sich nämlich zur Transformation (10) zusammen, wenn:

$$(12)\qquad l'_s l''_s \cdots l^r_s = r_s$$

genommen wird. Unter diesen Substitutionen sind $\frac{n}{2}$ kanonische besonders bemerkenswerth, welche entstehen, wenn jedesmal ein System der l, λ gleich einem Paar reciproker Wurzeln r_s, ϱ_s, die anderen gleich $\sqrt{m}$ angenommen werden. Es sind dies Transformationen, bei denen den $n-2$ Wurzeln $\sqrt{m}$ entsprechend, ein linearer Ausdruck mit $n-2$ Parametern und zwei Punkte der Fläche fest bleiben, d. h. *die $\frac{n}{2}$ Elementarrotationen, in welche die allgemeinste Bewegung sich zerlegen lässt.* Indessen gehen wir nicht weiter auf jene Zerlegung ein, da sie von verschiedenen Seiten sowohl für beliebige Dimensionen, als auch insbesondere für den projectivischen Raum von drei Dimensionen bereits untersucht worden ist*).

Die Formeln (11) führen noch auf eine andere Zerlegung. Man setze $\frac{n}{2}$ der Zahlen l, λ sämmtlich gleich k, und ordne sie einer Gruppe von $\frac{n}{2}$ solchen Punkten aus den n bei der Transformation (10) festbleibenden Punkten x, y zu, deren Verbindungslinien Erzeugende der Fläche $f=\sum x^2=0$ sind. Ordnet man den Werthen $\frac{\omega}{k}$ die übrigen $\frac{n}{2}$ Punkte zu, *so entsteht eine Transformation mit den beiden nicht ausgezeichneten Wurzelwerthen $\frac{\omega}{k}$ und k, bei welcher zwei specielle lineare Mannigfaltigkeiten, die ganz auf der Fläche liegen, so ungeändert bleiben, dass jeder Punkt derselben fest bleibt.* Eine solche Anordnung der Gruppe der n festbleibenden Punkte x, y ist auf $2^{\frac{n}{2}-1}$-fache Art möglich, so dass im Ganzen $2^{\frac{n}{2}-1}$ Transformationen dieser Art existiren.

Betrachten wir jetzt irgend eine dieser Transformationen, etwa diejenige, welche sämmtliche x in eine Gruppe vereinigt, so bleiben bei derselben die folgenden beiden speciellen linearen Ausdrücke fest:

$$z_i=\sum x_i^r m_r,$$
$$\zeta_i=\sum y_i^r \mu_r,$$

welches auch die Werthe der $\frac{n}{2}$ Parameter m_r, μ_r sein mögen. Daraus folgt, *dass jede lineare Reihe $z_i+\zeta_i$ bei der Transformation in sich verschoben wird.* Unter diesen befinden sich insbesondere erzeugende lineare Reihen der Fläche, wenn:

---

*) Frahm a. a. O. S. 18. Schläfli, Crelle's Journal Bd. 65. Lindemann, Projectivische Mechanik, Math. Annalen Bd. VII.

$$\sum m_r \mu_r = 0.$$

Der Ausdruck $z_i + \zeta_i$ aber stellt überhaupt sämmtliche Punkte der Fläche vor, denn man kann zu jedem Werthsystem $a_i = z_i + \zeta_i$ die zugehörigen Parameter m_r, μ_r aus Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante bestimmen. *Demnach hat die Transformation die Eigenschaft, ein System von Erzeugenden der Fläche so in sich zu transformiren, dass jede Erzeugende festbleibt, während ihre Punkte sich verschieben. Jedes derartige System enthält ∞^{n-3} gerade Linien mit ∞^{n-2}, d. h. sämmtlichen Flächenpunkten.*

Es giebt $2^{\frac{n}{2}-1}$ solcher Systeme, wie schon oben bemerkt wurde. Die Erzeugenden ein und desselben Systems schneiden sich nur in solchen Punkten, die den Mannigfaltigkeiten z_i oder ζ_i angehören.

Man kann demnach die Fläche durch vertauschbare Substitutionen, bei denen je ein System von Erzeugenden fest bleibt, in sich transformiren. Da jede Substitution eine wesentliche Constante einführt, so werden mindestens $\frac{n}{2}$ Transformationen dieser Art erforderlich sein, wenn eine gegebene Transformation entstehen soll.

Eine ganz bestimmte Anordnung dieser $\frac{n}{2}$ Transformationen entsteht nur für den Fall $n = 4$. Sollen die beiden Transformationen:

$$l_1' = l_2' = k_1, \qquad l_1^2 = \lambda_2^2 = k_2,$$

$$\lambda_1' = \lambda_2' = \frac{\omega_1}{k_1}, \qquad l_2^2 = \lambda_1^2 = \frac{\omega_2}{k_2},$$

sich zu einer gegebenen mit den Wurzeln $r_1, \varrho_1;\ r_2, \varrho_2$ zusammensetzen, so hat man:

$$k_1 k_2 = r_1, \qquad \frac{\omega_1 \omega_2}{k_1 k_2} = \varrho_1,$$

$$k_1 \frac{\omega_2}{k_2} = r_2, \qquad \frac{\omega_1}{k_1} k_2 = \varrho_2,$$

also:

$$k_1 = \sqrt{r_1 r_2}, \qquad \frac{\omega_1}{k_1} = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2},$$

$$k_2 = \sqrt{\varrho_2 r_1}, \qquad \frac{\omega_2}{k_2} = \sqrt{\varrho_1 r_2},$$

womit die gegebene Transformation in zwei vertauschbare zerlegt ist, von denen jede ein System von Erzeugenden ungeändert lässt.

Dagegen hat man für $n = 6$ vier Transformationen dieser Art, von denen je drei schon genügen, um eine gegebene mit den Wurzeln $r_1, \varrho_1;\ r_2, \varrho_2;\ r_3, \varrho_3$ hervorzubringen*).

---

*) Verschieden von dieser Auffassung der Systeme der Erzeugenden einer F_2 in einem höheren Raume ist die, welche Herr Cayley gelegentlich entwickelt

§ V.

Specielle Substitutionen.

Eine *uneigentliche specielle Substitution* ist durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad y_i = x_i - 2\, a_i \frac{a_x}{(a^2)}$$

gegeben, in denen man noch zur Vereinfachung $(a^2) = \sum a_i^2 = 1$ setzen kann. Man kann diese Transformationen auch als *Centralprojection der Fläche $f = 0$ vom Punkte a aus in sich selbst* bezeichnen. Es sind dies zugleich diejenigen Transformationen, welche Herr Klein gelegentlich als *Spiegelungen* bezeichnet hat, welches Ausdruckes wir uns im Folgenden gleichfalls bedienen.

---

hat (On the superlines of a quadric surface in five dimensional space, Quarterly Journal, vol. XII, p. 176). Wenn die Gleichung der Fläche in der Form:

$$(1) \qquad \Sigma x_i^2 - \Sigma y_i^2 = 0, \quad i = 1 \cdots \frac{n}{2},$$

geschrieben wird, so setze man:

$$(2) \qquad y_i = \Sigma \alpha_{ik} x_k.$$

Sind die α_{ik} Coefficienten einer orthogonalen Substitution der Determinante ± 1 mit $\frac{n}{2}$ homogenen Variabelen, so erfüllen die Gleichungen (2) offenbar die Bedingung (1). Die Gleichungen (2) repräsentiren eine Mannigfaltigkeit, welche für eine eigentliche Substitution als *Erzeugende erster Art*, im anderen Falle als eine solche *zweiter Art* bezeichnet werden kann. Für den Schnittpunkt zweier Erzeugenden (2) mit den Coefficienten α_{ik}, β_{ik} muss die Determinante

$$| \alpha_{ik} - \beta_{ik} |$$

verschwinden. Multiplicirt man sie mit der Determinante der α_{ik}, so entsteht die Determinante:

$$(3) \qquad | 1 - \Sigma \alpha_{jk} \beta_{ik} |,$$

d. h. eine Determinante mit den Coefficienten $a_{ik} = \Sigma \alpha_{jk} \beta_{ik}$, also den Coefficienten einer orthogonalen Substitution, welche aus den beiden der α_{ik} und β_{ik} zusammengesetzt ist. Ist nun $\frac{n}{2}$ gerade und betrachten wir zwei Erzeugende gleicher Art, so sind die a_{ik} Coefficienten einer eigentlichen Substitution, und die Determinante (13) verschwindet nicht oder zugleich mit allen Unterdeterminanten bis zu einer ungeraden Ordnung. Für Erzeugende ungleicher Art verschwindet sie aber immer oder mit allen Unterdeterminanten bis zu einer geraden Ordnung. Aehnliche Schlüsse gelten aber auch für den Fall eines ungeraden $\frac{n}{2}$ und man hat daher den Satz:

Zwei Erzeugende gleicher (oder ungleicher) Art schneiden sich im Allgemeinen nicht, oder in einem Gebilde von ungerader Dimension; Erzeugende verschiedener (oder gleicher) Art haben dagegen immer einen Punkt oder ein Gebilde gerader Dimension gemein, je nachdem die Dimension des Raumes von der Form $4n - 1$ (oder $4n + 1$) ist.

Jede uneigentliche (eigentliche) Substitution lässt sich aus einer eigentlichen (uneigentlichen) und einer speciellen der Art (1) *zusammensetzen.* Denn aus der Verbindung von (1) mit:

$$z_i = \sum a_{ik} x_k \tag{2}$$

entsteht:

$$z_i = \sum a_{ik}(x_k - 2\,a_k a_x), \tag{3}$$

so dass die Coefficienten der neuen Substitution werden:

$$b_{ik} = a_{ik} - 2a_k \sum a_{ir} a_r. \tag{4}$$

Daraus ist umgekehrt:

$$\sum a_k b_{ik} = -\sum a_k a_{ik},$$

also:

$$a_{ik} = b_{ik} - 2\,a_k \sum b_{ir} a_r, \tag{5}$$

woraus, wenn die b_{ik} gegeben sind, bei beliebigem a_i die a_{ik} bestimmt werden können. Somit ist die Substitution mit den Coefficienten b_{ik} in zwei andere zerlegt, von denen die eine die willkürliche uneigentliche der a_i ist. Beide sind im Allgemeinen nicht vertauschbar.

Betrachtet man die b_{ik} als zu einer uneigentlichen Substitution gehörig, so hat man, den Wurzeln $\pm\sqrt{m}$ entsprechend, die beiden Gleichungen:

$$\sum \alpha_r b_{ir} = +\sqrt{m}\,\alpha_i,$$

$$\sum \beta_r b_{ir} = -\sqrt{m}\,\beta_i,$$

Verwendet man die α, β zur linearen Transformation (1), so hat man nach (5):

$$a_{ik} = b_{ik} - 2\,\alpha_i \alpha_k \sqrt{m},$$

$$a'_{ik} = b_{ik} + 2\,\beta_i \beta_k \sqrt{m},$$

und damit zwei eigentliche Transformationen, die respective mit derjenigen, aus der sie hergeleitet wurden, vertauschbar sind. Endlich bestehen noch die Gleichungen:

$$\sum a_{ik} \alpha_k = -\alpha_i \sqrt{m},$$

$$\sum a_{ik} \beta_k = -\beta_i \sqrt{m},$$

$$\sum a'_{ik} \alpha_k = +\alpha_i \sqrt{m},$$

$$\sum a'_{ik} \beta_k = +\beta_i \sqrt{m},$$

d. h. die eigentlichen Substitutionen der a_{ik}, a'_{ik} sind selbst von speciellem Charakter, da ihre Determinante $\Omega(\varrho)$ die Doppelwurzeln $+\sqrt{m}$, $-\sqrt{m}$ besitzt. Somit hat man den folgenden Satz:

Jede (allgemeine) uneigentliche Substitution lässt sich auf zwiefache Weise in ein vertauschbares System zweier specieller Substitutionen zerlegen, von denen die eine eine Substitution von der Art (1), *d. h. eine Centralprojection der Fläche f vom Punkte* $\alpha(\beta)$ *aus, die andere eine Bewegung von speciellem Charakter ist, bei der eine Gerade fest bleibt.*

Eine andere Classe besonderer Substitutionen bilden die *symmetrischen*, bei denen $a_{ik} = a_{ki}$ ist.

Sie führen, wie bereits früher gezeigt wurde*), auf eine Determinante $\Omega(\varrho)$, welche im allgemeinsten Falle nur die Wurzeln $\pm\sqrt{m}$ eine jede $\frac{n}{2}$ mal besitzt, und sind eigentlich oder uneigentlich, je nachdem n durch 4 theilbar ist oder nicht. *Die quadratische Form*

$$\sum a_{ik} x_i x_k = F$$

ist dann von speciellem Charakter, weil sie der Gleichung:

$$(6) \qquad \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = 4\,m \sum x_i^2$$

genügt. Diese Substitutionen spielen eine wesentliche Rolle bei der Untersuchung der quadratischen Formen, welche jener Gleichung genügen**). Bezeichnet man die halben Differentialquotienten von F durch $F_i = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_i}$, so lässt sich die symmetrische Substitution in der Form:

$$(7) \qquad y_i = F_i$$

schreiben.

Jede (allgemeine) eigentliche Substitution kann auf unendlich viele Arten in die Folge von zwei symmetrischen Substitutionen zerlegt werden.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die beiden Formen:

$$(8) \qquad \begin{cases} F = \sum X_i^2 l_i + \Xi_i^2 \lambda_i, \\ \Phi = \sum X_i^2 l_i' + \Xi_i^2 \lambda_i', \end{cases}$$

in denen $l_i \lambda_i = \omega$, $l_i' \lambda_i' = \omega'$ sein möge. Beide genügen der Gleichung (6) und vermitteln die beiden symmetrischen Transformationen:

$$(9) \qquad \begin{cases} y_i = F_i, \\ y_i = \Phi_i, \end{cases}$$

welche nach einander ausgeführt werden sollen. Unter geeigneter Wahl der Coefficienten l, λ ergiebt sich dadurch die Substitution der a_{ik} (§ IV. (10)).

---

*) Voss, Math. Annalen Bd. X, p. 147 ff.
**) Ebenda p. 147.

Man hat zunächst:

$$F_k = \sum X_i l_i x_k^i + \Xi_i \lambda_i y_k^i,$$

$$\Phi_k = \sum X_i l_i' x_k^i + \Xi_i \lambda_i' y_k^i,$$

oder bei vollständiger Ausführung an Stelle von (9):

$$y_i = \sum x_k x_k^s l_s x_i^s + \sum x_k y_k^s \lambda_s y_i^s,$$

$$y_i = \sum x_m x_m^t l_t' x_i^t + \sum x_m y_m^t \lambda_t' y_i^t,$$

und durch Zusammensetzung beider Substitutionen:

$$z_i = \sum x_m^t x_i^t l_t' (x_k x_k^s l_s x_m^s + x_k x_{jk}^s \lambda_s y_m^s)$$

$$+ \sum y_m^t y_i^t \lambda_t' (x_k x_k^s l_s x_m^s + x_k x_{jk}^s \lambda_s x_m^s).$$

Vereinfacht man vermittelst § I. (9) die Combinationen der

$$\sum x_k^i y_k^i \text{ etc.},$$

so ergiebt sich:

$$z_i = \sum x_k (y_k^s l_s' \lambda_s x_i^s + \lambda_s' l_s y_i^s x_k^s), \tag{10}$$

d. h. eine Transformation mit den Coefficienten b_{ik}:

$$b_{ik} = \sum y_k^s x_i^s l_s' \lambda_s + \lambda_s' l_s y_i^s x_k^s. \tag{11}$$

Die b_{ik} sind nach § IV. (10) identisch mit den a_{ik}, wenn:

$$\lambda_s' \lambda_s = r_s, \qquad \lambda_s' l_s = \varrho_s$$

Daraus folgt:

$$\omega \frac{l_s'}{l_s} = r_s, \qquad \omega' \frac{l_s}{l_s'} = \varrho_s, \tag{12}$$

oder:

$$\omega \omega' = m, \qquad l_s' = \frac{r_s l_s}{\omega}.$$

Die Grössen l_s bleiben daher völlig willkürlich, wonach die vorgelegte Transformation auf unendlich vielfache Weise aus zwei symmetrischen (nicht vertauschbaren) zusammengesetzt werden kann. Eine ganz specielle Zerlegung dieser Art ist z. B. durch die beiden Formen:

$$F = \sum X_i^2 + \Xi_i^2,$$

$$\Phi = \sum X_i^2 r_i + \Xi_i^2 \varrho_i$$

vermittelt.

Wir wenden uns jetzt wieder zur Betrachtung specieller uneigentlicher Transformationen (1). Zwei Substitutionen:

$$\begin{cases} y_i = x_i - 2\, a_i a_x, \\ y_i = x_i - 2\, b_i b_x \end{cases} \tag{13}$$

sind im Allgemeinen nicht vertauschbar, denn combinirt liefern sie die Substitution:

$$(14)\qquad z_i = x_i - 2\,a_i a_x - 2\,b_x b_i + 4\,(ab)\,a_x b_i.$$

Die Bedingung der Vertauschbarkeit ist:

$$(15)\qquad \sum (a_i b_i) = (ab) = 0,$$

d. h. die involutorische Beziehung der Coefficienten a_i, b_i. *Zwei solche Transformationen* (13) *liefern dieselbe symmetrische eigentliche Transformation:*

$$(16)\qquad z_i = x_i - 2\,a_i a_x - 2\,b_x b_i,$$

in welcher Reihenfolge sie auch angewandt werden*).

Setzt man beliebig viele unter einander vertauschbare Transformationen dieser Art, a, b, c, $\cdots$, zusammen, so entsteht die folgende:

$$(17)\qquad z_i = x_i - 2\,a_i a_x - 2\,b_x b_i - 2\,c_x c_i - \cdots.$$

Je n derselben hinter einander angewandt, liefern aber eine identische Transformation. Es ergiebt sich dies aus der Identität:

$$(18)\qquad -x_i = x_i - 2\,a_i a_x - 2\,b_i b_x - 2\,c_i c_x \cdots.$$

Man erhält dieselbe, wenn man die identisch verschwindende Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_x \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & b_x \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \Sigma x_i^2 \end{vmatrix} = 0$$

mit der Determinante der a, b, c, $\cdots$ multiplicirt und die entstehende Identität nach x_i differentiirt.

Es lässt sich nachweisen, dass ausser dieser identischen Substitution, welche durch n vertauschbare Substitutionen (1) *vermittelt wird, keine andere Gruppe von n nichtvertauschbaren Transformationen der Art* (1) *vorhanden ist, welche ebenfalls eine identische Transformation liefert.*

Betrachtet man nämlich die Transformation (1) als eine Centralprojection der Fläche $f=0$ in sich selbst, bei welcher je zwei auf einer durch den Punkt a gehenden Geraden gelegene Flächenpunkte mit einander vertauscht werden, so ergiebt sich leicht: Soll überhaupt eine identische Transformation durch n-malige Centralprojection entstehen, so muss jede Gruppe von $n-1$ Projectionscentren mit sämmtlichen Berührungspunkten der vom n^{ten} an die Fläche gelegten Tan-

---

*) Solche Transformationen (vertauschbare Spiegelungen) sind bereits von den Geometern mehrfach verwendet. Vgl. z. B. Lie, Partielle Differentialgleichungen und Complexe, Math. Annalen Bd. V, p. 180, 182.

genten in einer Ebene liegen, d. h. je $n-1$ der Punkte a, b, c müssen sich in der Polarebene des n^{ten} befinden, wodurch gerade die Bedingungen der Involution $(ab)=0$, $(ac)=0$, $\cdots$, $(bc)=0$, $\cdots$ herbeigeführt werden.

Eine jede symmetrische Transformation lässt sich in $\frac{n}{2}$ specielle uneigentliche Substitutionen zerlegen, die unter sich vertauschbar sind. Um dies zu beweisen, gehe man von der Form symmetrischer Transformationen aus, welche $\frac{n}{2}$ Systeme von Coefficienten a, b, c, $\cdots$ verwendet, und durch die specielle quadratische Form:

$$F=\begin{vmatrix} (a^2) & (ab) & (ac) & \cdots & a_x \\ (ab) & (b^2) & (bc) & \cdots & b_x \\ (ac) & (cb) & (c^2) & \cdots & c_x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_x & b_x & c_x & \cdots & \frac{1}{2}\Sigma x_i^2 \end{vmatrix}$$

vermittelt ist*). Der Differentialquotient F_i hat den Werth:

$$F_i=\begin{vmatrix} (a^2) & (ab) & \cdots & a_i \\ (ab) & (b^2) & \cdots & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_x & b_x & \cdots & \frac{1}{2}x_i \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun F mit dem Quadrat der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_s & \nu_s & \cdots & \nu_s \end{vmatrix},$$

welche $\frac{n}{2}=s$ Reihen besitzt, so kann man an Stelle der a, b, c, $\cdots$ solche lineare Combinationen derselben mit Hülfe der Parameter λ, μ, $\cdots$ ν einführen, dass in F_i alle nicht zur Hauptdiagonale gehörenden Coefficienten fortfallen, womit F_i sich in

$$x_i-2\,\alpha_x\alpha_i-2\,\beta_x\beta_i-2\,\gamma_x\gamma_i\cdots$$

verwandelt und die allgemeine symmetrische Substitution in $\frac{n}{2}$ vertauschbare specielle (1) zerlegt ist.

Man kann darnach die allgemeine eigentliche Substitution in zwei symmetrische Transformationen zerlegen, deren jede aus einer Gruppe von $\frac{n}{2}$ unter sich vertauschbaren Spiegelungen besteht.

Wir untersuchen schliesslich *die fortgesetzte Anwendung uneigentlicher specieller Substitutionen überhaupt.* Im Ganzen verlangt eine

---

*) Voss, Math. Annalen Bd. X, p. 146.

orthogonale Substitution $\frac{n}{2}(n-1)$ willkürliche Parameter. Da nun jede Substitution (1) schon $n-1$ enthält, so würden bereits $s=\frac{n}{2}$ derselben combinirt die hinreichende Allgemeinheit zu besitzen scheinen. Aber man kann sich leicht überzeugen, dass selbst die Anwendung von $n-2$ Substitutionen (1) *immer noch keine allgemeine eigentliche Substitution liefert.* Es wird daher eines besondern Beweises bedürfen, dass eine jede eigentliche Substitution als Folge von n speciellen uneigentlichen Substitutionen angesehen werden kann.

Obwohl von uns schon oben eine Zerlegung der Substitution in n specielle von besonderem Charakter gelehrt ist, so wollen wir doch noch eine Methode angeben, *welche direct die Coefficienten a_{ik} dieser gegebenen eigentlichen Substitution in solche umwandelt, wie sie aus n hinter einander angewandten von der Form* (1) *entstehen.*

Die Coefficienten der orthogonalen Substitution, welche entsteht, wenn man successive specielle Transformationen (1) $a, b, c, \cdots$ anwendet, besitzen schon bei viermaliger Wiederholung eine sehr unübersichtliche Form. Wir suchen daher zunächst die aus k successiven Transformationen dieser Art entstehenden Coefficienten übersichtlicher darzustellen.

Wir bezeichnen diese Coefficienten durch α_{ik}; ihre Determinante ist gleich $(-1)^k$. Man hat ferner die Identität:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ik} & u_i \\ v_k & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{ik} \end{vmatrix} = -\sum u_i v_k \alpha_{ik},$$

oder:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ik} & u_i \\ v_k & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \sum u_i v_k \alpha_{ik}, \tag{19}$$

d. h. man kann die Coefficienten α_{ik} als ihren eigenen ersten Unterdeterminanten proportional ansehen*). Macht man von dieser Darstellung Gebrauch, so erhält man ohne besondere Schwierigkeit durch geeignete Determinantenreductionen als Werth des Ausdruckes rechter Hand in (19) die übersichtlichere Determinante:

$$(-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 2(ab) & 2(ac) & 2(ad) & \cdots & 2(au) \\ 0 & 1 & 2(bc) & 2(bd) & \cdots & 2(bu) \\ 0 & 0 & 1 & 2(cd) & \cdots & 2(cu) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 2(du) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (av) & (bv) & (cv) & (dv) & \cdots & (uv) \end{vmatrix} \cdot \tag{20}$$

*) Baltzer, Det. p. 173.

Sie liefert das Bildungsgesetz der α_{ik}, denn α_{ik} ist der Coefficient von $u_i v_k$ in der Determinante (20). Bezeichnen wir die Determinante, welche durch Weglassung des letzten Elementes (uv) entsteht, durch Δ', so hat man:

$$\sum u_i v_k \alpha_{ik} = \Delta' + (uv). \tag{21}$$

Wir wollen jetzt $k = n$ (gerade) voraussetzen und eine eigentliche Substitution betrachten, welche durch die Cayley'schen Formeln:

$$a_{ik} = 2\beta_{ik}\frac{\omega}{\mathsf{B}} - [ik] \tag{22}$$

gegeben ist; die β_{ik} sind die Unterdeterminanten der schiefen Determinante der b_{ik}, B (§ II.), und $[ik]$ nur dann von Null verschieden und gleich eins, wenn $i = k$. Daher ist:

$$\sum a_{ik} u_i v_k = \frac{2\omega}{\mathsf{B}} \sum \beta_{ik} u_i v_k - (uv). \tag{23}$$

Unterwirft man die Coefficienten a, b, c jetzt den $\frac{n}{2}(n-1)$ Bedingungen:

$$\tag{24} \left\{\begin{array}{lll} \sum b_{ir} a_i b_r = 0, & \sum b_{ir} b_i c_r = 0, & \sum b_{ir} c_i d_r = 0, \text{ u. s. w.} \\ \sum b_{ri} a_i c_r = 0, & \sum b_{ir} b_i d_r = 0, & \\ \sum b_{ri} a_i d_r = 0, & \vdots & \\ \vdots & & \end{array}\right.$$

welche wegen $b_{ik} = -b_{ki}$, $b_{ii} = b_{kk} = \omega$ die weiteren Relationen:

$$\tag{25} \left\{\begin{array}{l} \sum b_{ri} a_i a_r = \omega, \\ \sum b_{ri} b_i b_r = \omega, \\ \sum b_{ri} c_i c_r = \omega, \\ \vdots \end{array}\right.$$

$$\tag{26} \left\{\begin{array}{lll} \sum b_{ri} a_r b_i = 2\omega(ab), & \sum b_{ri} b_r c_i = 2\omega(bc), & \sum b_{ri} c_r d_i = 2\omega(cd) \cdots \\ \sum b_{ri} a_r c_i = 2\omega(ac), & \sum b_{ri} b_r d_i = 2\omega(bd), & \\ \sum b_{ri} a_r d_i = 2\omega(ad), & \vdots & \\ \vdots & & \end{array}\right.$$

nach sich ziehen, so lässt sich zeigen, dass aus den den Gleichungen (24) unterworfenen Coefficienten von n speciellen uneigentlichen Transformationen gerade die vorgelegte der Coefficienten a_{ik} hervorgeht.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Determinante der a, b, c, $\cdots$ durch Δ''. Dann ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & u_1 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 0 \end{vmatrix} \Delta''^2 = \frac{\Delta'}{2}\,\omega^{n-1},$$

nach welcher Gleichung:

$$\sum u_i v_k \beta_{ik} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta'}{\Delta''^2}\,\omega^{n-1}, \tag{27}$$

oder nach (21), (23):

$$\sum u_i v_k \beta_{ik} = \frac{\mathsf{B}}{2\,\omega}\left[\sum u_i v_k a_{ik} + (uv)\right],$$

$$\Delta' = \sum\left[u_i v_k \alpha_{ik} - (uv)\right],$$

$$\frac{\mathsf{B}}{2\,\omega}\left[\sum u_i v_k a_{ik} + (uv)\right] = -\frac{1}{2\,\Delta''^2}\left[\sum u_i v_k \alpha_{ik} - (uv)\right]\omega^{n-1},$$

und endlich wegen:

$$\mathsf{B}\Delta''^2 = \omega^n$$

$$a_{ik} = -\alpha_{ik}. \tag{28}$$

Damit sind die a_{ik} in eine Form gebracht, in welcher sie direct als Coefficienten der $n$mal wiederholten uneigentlichen Transformation erscheinen. Die a_i sind dabei noch ganz willkürlich, die b_i einer, die c_i zwei linearen Gleichungen unterworfen, und so fort. *Man kann daher durch eine Construction, welche der eines Polarecke einer Fläche zweiten Grades ganz analog verläuft, beliebig viele solcher Gruppen von n Punkten erhalten, welche, successive als Centren einer Centralprojection benutzt, die gegebene Transformation hervorbringen.*

Liegt eine uneigentliche Substitution vor, so kann man sie zunächst in eine specielle uneigentliche und eine eigentliche mit der Doppelwurzel 1 zerlegen. Die letztere lässt sich dann jedenfalls aus $n-2$ uneigentlichen speciellen in der vorhin beschriebenen Weise zusammensetzen, *so dass im Ganzen eine uneigentliche Substitution auf $n-1$ Centralprojectionen zurückgeführt werden kann.* Endlich lässt sich leicht erkennen, dass sich bei ungeradem n schon $n-1$ Transformationen von der Art (1) zu einer gegebenen zusammensetzen lassen.

Wir schliessen hieran noch folgende Bemerkung. Die Cayley'schen Formeln setzen uns in den Stand, eine allgemeine eigentliche Substitution mit der Determinante $+1$ hinzuschreiben. Es soll hier noch gezeigt werden, wie man sich derselben bedienen kann, um

eigentliche Substitutionen anzugeben, deren Determinante $\Omega(\varrho)$ die Doppelwurzel $+1$ oder -1 oder beide gleichzeitig besitzt.

Nimmt man eine allgemeine uneigentliche Substitution:

$$z_i = \sum b_{ik} x_k ,$$

so entsteht daraus durch Anwendung der speciellen

$$y_i = z_i - 2 b_i b_z$$

die eigentliche

$$y_i = \sum a_{ik} x_k , \qquad a_{ik} = b_{ik} - 2 b_i \sum b_r b_{rk} .$$

Demnach ist die Determinante $\Omega(\varrho)$ gleich:

$$\begin{vmatrix} b_{ik} - \varrho & b_i \\ 2\varrho b_k & -1 \end{vmatrix} .$$

Soll nun $\Omega(1) = 0$ sein, so hat man als einzige Bedingung:

$$(\alpha b) = 0 ,$$

zu welcher noch die analoge:

$$(\beta b) = 0$$

hinzukommt, wenn auch $\Omega(-1)$ verschwinden soll. Die α, β haben dabei die unter (5) p. 342 angegebene Bedeutung.

§ VI.

Besondere Fälle.

Wir werden jetzt die Fälle $n = 2, 3, 4, 6$ der orthogonalen Substitutionen besprechen, welche vorzugsweise in geometrischen Untersuchungen Verwendung finden.

A. Es sei $n = 2$; *Substitution im binären Gebiet.*

Die *allgemeine uneigentliche* Substitution ist zugleich nach § V. die *specielle.* Dagegen muss die eigentliche Substitution aus zwei speciellen uneigentlichen (Spiegelungen) zusammengesetzt werden. Nimmt man nach Baltzer*) als Coefficienten der gegebenen Substitution die folgenden:

$$a_{11} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad a_{12} = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \qquad \mathrm{B} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix},$$
$$a_{21} = \frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}, \quad a_{22} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

so hat man für

$$\lambda = \frac{(ab)}{\sqrt{1-(ab)^2}} ,$$

oder:

$$\lambda = \frac{\sqrt{1-(ab)^2}}{(ab)} ,$$

---

*) Baltzer, Det p. 177.

wo:

$$(ab) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

so ist:

$$\begin{aligned}
-a_{11} &= 1 - 2\,a_1^2 \quad - 2\,b_1^2 \quad + 4\,(ab)a_1 b_1\,,\\
-a_{12} &= \quad\; - 2\,a_1 a_2 - 2\,b_1 b_2 + 4\,(ab)a_2 b_1\,,\\
-a_{21} &= \quad\; - 2\,a_1 a_2 - 2\,b_1 b_2 + 4\,(ab)a_1 b_2\,,\\
-a_{22} &= 1 - 2\,a_2^2 \quad - 2\,b_2^2 \quad + 4\,(ab)a_2 b_2\,.
\end{aligned}$$

Rechterhand stehen jetzt die Coeffcienten, welche durch successive Ausführung der Substitutionen a, b entstehen. Die *symmetrische* Substitution ist hier zugleich die *identische*, $(ab) = 0$.

In Verbindung mit der am Schluss des § IV. betrachteten Zerlegung einer eigentlichen Substitution in eine Reihe vertauschbarer, deren jede eine ∞^{n-3} Schaar linearer Reihen so ungeändert lässt, dass jede einzelne Reihe nur in sich verschoben wird, welcher letztere Process auf 2 successiven Spiegelungen beruht, hat man den folgenden Satz*):

Eine jede eigentliche Substitution im Raume von $2k-s$ Dimensionen lässt sich in k aus 2^{k-1} Systemen auszuwählende vertauschbare speciellere Transformationen zerlegen, deren jede ein System von Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades ungeändert lässt und auf der Folge von zwei Spiegelungen beruht.

B. *Es sei $n = 3$; orthogonale Substitution in der Ebene.*

Die allgemeine Substitution mit positiver Determinante $+1$ entsteht durch Verbindung zweier uneigentlicher specieller. Setzt man nach Baltzer:

$$\mathsf{B} = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2\,,$$

so sind die Coefficienten derselben:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2\,\frac{(1+\lambda^2)}{\mathsf{B}} - 1\,, & a_{12} &= 2\,\frac{\lambda\mu + \nu}{\mathsf{B}}\,, & a_{13} &= 2\,\frac{\lambda\nu - \mu}{\mathsf{B}}\,,\\
a_{21} &= 2\,\frac{\lambda\mu - \nu}{\mathsf{B}}\,, & a_{22} &= 2\,\frac{(1+\mu^2)}{\mathsf{B}} - 1\,, & a_{23} &= 2\,\frac{\mu\nu + \lambda}{\mathsf{B}}\,,\\
a_{31} &= 2\,\frac{\lambda\nu + \mu}{\mathsf{B}}\,, & a_{32} &= 2\,\frac{\mu\nu - \lambda}{\mathsf{B}}\,, & a_{33} &= 2\,\frac{(1+\nu^2)}{\mathsf{B}} - 1\,,
\end{aligned}$$

Setzt man:

$$\begin{aligned}
\lambda(ab) &= a_2 b_3 - a_3 b_2\,,\\
\mu(ab) &= a_3 b_1 - a_1 b_3\,,\\
\nu(ab) &= a_1 b_2 - a_2 b_1\,,
\end{aligned}$$

$$\mathsf{B} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{[a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3]^2}\,,$$

*) Derselbe ist für den gewöhnlichen Raum mannigfach verwendet; siehe z. B. Klein, diese Annalen Bd. IX, p. 188 und die dort gegebenen Citate.

so ergeben sich die Coefficienten a_{ik} in derjenigen Form, welche sie durch die Verbindung der Centralprojectionen des Kegelschnittes $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ von den Punkten a, b aus erhalten würden.

Die genannten Punkte sind auf einer durch den Punkt λ, μ, ν gehenden Geraden so zu wählen, dass:

$$\mathsf{B}(ab)^2 = 1 \text{ oder } = (a^2)\,(b^2),$$

je nachdem zwischen den a_i, b_i die Identität $(a^2) = 1$, $(b^2) = 1$ vorausgesetzt wird oder nicht.

Zu jedem willkürlich auf dieser Geraden angenommenen Punkte a gehören mithin noch zwei verschiedene b, welche dieselbe gegebene Substitution mit a verbunden hervorbringen. Man kann dies auch so ausdrücken:

Construirt man in einen Kegelschnitt Vierseite, deren zwei Gegenseiten sich in einem festen Punkte a schneiden, während die dritte Seite durch einen festen Punkt b geht, so geht auch die vierte durch einen festen Punkt, welcher mit a, b auf einer Geraden und zu b in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt liegt.

Die identische Transformation besteht in der dreimaligen Projection des Kegelschnittes von den Ecken eines Polardreiecks aus: In einen Kegelschnitt lassen sich unendlich viele Dreiecke beschreiben, deren Seiten durch die Ecken des nämlichen Polardreieckes gehen.

Die Determinante $\Omega(\varrho)$ hat im allgemeinen Falle drei verschiedene Wurzeln, also die Charakteristik:

(1) $$[1,\ 1,\ 1]\,.$$

Die besonderen Fälle:

(2) $$[1,\ (\overline{1\ 1})],$$

(3) $$[(\overline{2\ 1})]$$

entstehen, je nachdem die Punkte a, b harmonisch conjugirt sind, oder ihre Verbindungslinie den Kegelschnitt berührt.

C. $n = 4$. Wir haben dann die *Transformation einer Fläche zweiten Grades in sich selbst.*

Die eigentliche Transformation kann auf unendlich viele Arten nach § V. aus vier Centralprojectionen zusammengesetzt werden. Die viermalige Centralprojection von den Ecken eines Polartetraeders in ganz beliebiger Reihenfolge ist eine identische: es giebt ∞^2 Vierseite, welche in die Fläche so einbeschrieben werden können, dass die Seiten durch die Ecken eines festen Polartetraeders gehen.

[Anmerkung. Betrachtet man also ein Büschel von Flächen mit gemeinsamem Polartetraeder, so lassen sich 8 verschiedene collineare Transformationen angeben, *welche jede Fläche, also auch die ihnen gemeinsame Raumcurve vierter Ordnung ungeändert lassen*, aus

welcher Bemerkung man leicht eine Reihe bekannter Sätze über in eine ebene Curve dritter Ordnung eingeschriebene Vierseite, sowie über solche, die einer R_4 eingeschrieben sind, herleitet.]

Andererseits kann die eigentliche Substitution in zwei successive (eigentliche) symmetrische zerlegt werden. Die symmetrische Transformation setzt an Stelle eines Punktes der gegebenen Fläche den Berührungspunkt einer Ebene, welche dem ersten in Bezug auf eine Fläche polar conjugirt ist, die mit der gegebenen ein Vierseit von Erzeugenden gemein hat. Die symmetrische Transformation kann noch auf ∞^1 Arten in zwei vertauschbare Centralprojectionen zerlegt werden.

Bei der eigentlichen Substitution bleiben ferner im Allgemeinen vier Punkte fest, die Eckpunkte eines von Erzeugenden gebildeten Vierseits, in Bezug auf welches als Coordinatentetraeder die Gleichung der Fläche dann $X_1 \Xi_1 + X_2 \Xi_2 = 0$ wird: *gleichzeitig gehen alle Flächen des Büschels* $X_1 \Xi_1 + \lambda X_2 \Xi_2 = 0$ *in sich über*, und jede Gerade des Raumes formt sich in eine Tangente desselben Flächenpaares aus jenem Büschel um, dem sie ursprünglich angehört.

Die eigentlichen Transformationen zerfallen in folgende Classen:

1) $[1, 1, 1, 1]$, der allgemeine Fall,

2) $[2, 2]$, 2 nicht ausgezeichnete Doppelwurzeln,

3) $[(11), (11)]$, desgleichen, mit verschwindenden ersten Unterdeterminanten, wobei alle Erzeugenden eines Systems fest bleiben,

4) $[(\overline{11}), 1, 1]$, 2 beliebige Centralprojectionen*) von den Punkten a, b aus;

5) $[(\overline{11})(\overline{11})]$, Fall, wo a zu b conjugirt ist;

6) $[(\overline{31})]$; zwischen den Coordinaten von a, b besteht die Gleichung:

$$(ba)^2 = (a^2)(b^2).$$

Bei einer uneigentlichen Substitution gehen dagegen alle Flächen des Netzes:

$$\lambda X_1^2 + \mu \Xi_1^2 + 2 \nu X_2 \Xi_2 = 0$$

in sich über. Diese Flächen berühren die gegebene

$$X_1^2 + \Xi_1^2 + 2 X_2 \Xi_2 = 0$$

in zwei verschiedenen Punkten und gehen durch zwei conjugirte Pole derselben; je zwei derselben schneiden sich in Kegelschnitten, welche durch die Substitution in einander gegenseitig übergeführt werden. Unter diesen Flächen sind besonders hervorzuheben:

---

*) Ich habe hier, wie in meiner früheren Arbeit (diese Annalen Bd. X, p. 179), Elementartheiler, welche einem der ausgezeichneten Wurzelwerthe angehören, durch einen übergesetzten Strich hervorgehoben.

$$-X_1^2 + \Xi_1^2 + 2X_2\Xi_2 = 0\,,$$
$$X_1^2 - \Xi_1^2 + 2X_2\Xi_2 = 0\,,$$

welche mit der gegebenen je eine Berührung längs der Ebenen $X_1 = 0$, $\Xi_1 = 0$ eingehen: die Polarebenen beider Flächen in Bezug auf die Punkte der gegebenen umhüllen diese letztere selbst.

[Anmerkung. Man kann sich leicht auch direct von diesen Eigenschaften uneigentlicher Substitutionen überzeugen. Da bei denselben zwei Punkte auf der Fläche fest bleiben, die beiden anderen Punkte, in denen sich die zugehörigen Erzeugenden schneiden, gegenseitig sich vertauschen, so genügt es, die Fläche $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$ durch die Gleichungen:

$$x_1 = \lambda y_2\,, \quad x_2 = \mu y_1\,, \quad x_3 = \nu y_3\,, \quad x_4 = \varrho y_4\,, \quad \lambda\mu = \nu\varrho$$

in sich überzuführen, wobei denn in der That jede Fläche des Netzes:

$$\alpha x_1x_2 + \beta x_3x_4 + \gamma\left[\frac{x_1^2}{\lambda} + \frac{x_2^2}{\mu}\right] = 0$$

in sich übergeht*).]

Die Classification der uneigentlichen Substitutionen ist sehr einfach, da immer die Wurzeln $+1$, -1 mit auftreten müssen. Man hat daher die folgenden Fälle:

1) [1, 1, 1, 1], der allgemeine mit zwei reciproken einfachen Wurzeln,
2) [3, 1],
3) [(1 1 1), 1] mit einer dreifachen Wurzel $+1$, für welche noch alle zweiten Unterdeterminanten von $\Omega(\varrho)$ verschwinden (specielle Substitutionen).

D. $n = 6$. Wir erhalten die *Transformation des Linienraumes* in sich, wenn wir die sechs homogenen Variabelen x als Liniencoordinaten im Raume auffassen. Diese Transformationen zerfallen in *collineare* und *reciproke* des gewöhnlichen Punkt-Ebenenraumes, je nachdem die Substitution eine *eigentliche* oder *uneigentliche* ist**).

Die *specielle uneigentliche* Substitution ist diejenige reciproke *Umformung des Punktraumes, welche mit dem linearen Complexe verknüpft ist*, vermöge der an Stelle jedes Punktes die durch ihn gehende Complexebene, an Stelle jeder Geraden ihre reciproke Polare in Bezug auf den Complex tritt. *Die identische Substitution* ist vermittelt durch die *Umformung in Bezug auf sechs gegenseitig in Involution liegende lineare Complexe.* Die *symmetrische allgemeinste* Transformation setzt an *Stelle*

*) Vgl. insbesondere noch § VIII.

**) Dieser wichtige Satz rührt von Herrn Klein her, vgl. Math. Annalen Bd. IV, S. 356.

*irgend einer Geraden ihre reciproke Polare in Bezug auf eine beliebige Fläche zweiten Grades**); ausser dieser uneigentlichen Substitution existirt noch eine symmetrische eigentliche, es ist die *(collineare) Umformung in Bezug auf zwei in Involution liegende lineare Complexe***).

Wir betrachten zunächst die *collineare Substitution. Im Allgemeinen bleiben sechs specielle lineare Complexe fest, deren Axen die Kanten eines Tetraeders bilden.* Die Gesammtheit der Complexe zweiten Grades, welche in sich übergehen, wird durch die Gruppe quadratischer Formen:

$$\lambda X_1 \Xi_1 + \mu X_2 \Xi_2 + \nu X_3 \Xi_3 = 0$$

gebildet, welche wegen der Identität:

$$X_1 \Xi_1 + X_2 \Xi_2 + X_3 \Xi_3 = 0$$

ein *Büschel tetraedraler Complexe* darstellen.

Andererseits geht aus unseren früheren Ueberlegungen hervor, *dass die Collineation sich auf unendlich viele Arten in zwei successive Polarreciprocitäten zerlegen lässt in Bezug auf Flächen, welche jenes feste Tetraeder zum gemeinsamen Polartetraeder haben.* Ebenso kann sie immer durch Umformungen in Bezug auf sechs lineare Complexe ersetzt werden.

Nach den in § II. entwickelten Sätzen ist es ferner leicht, die überhaupt möglichen Substitutionen, nach den Elementartheilern der Determinante $\Omega(\varrho)$ geordnet, anzugeben. Wir führen dies hier nicht weiter aus, weil bei der Untersuchung über gemeinsame Polartetraeder zweier Flächen zweiten Grades für die eigentliche Transformation bereits alle Fälle aufgezählt sind. Die dort aufgestellte Tabelle***) gewinnt dadurch noch eine etwas allgemeinere Bedeutung. Aber es muss hier bemerkt werden, dass dort zwei Fälle, es sind $[(\overline{2\,1\,1}), \overline{1\,1}]$, $[(\overline{2\,1\,1})\,(1\,1)]$, Nr. 15 und 16, irrthümlich als möglich bezeichnet sind, welche nach den in § II. bewiesenen allgemeinen Determinanteneigenschaften nicht vorhanden sein können.

Die Eigenschaften der *reciproken Substitution* sind wesentlich andere. *Es bleiben im Allgemeinen zwei allgemeine lineare Complexe und vier specielle fest, welche letzteren die Kanten eines Tetraeders bilden, die fehlenden beiden Kanten vertauschen sich gegenseitig.*

---

*) Voss, Math. Annalen Bd. X, S. 166.

**) Ebenda S. 165 Anm. Diese Transformation ist nicht wesentlich verschieden von derjenigen, welche an Stelle einer Geraden x die vierte harmonische zu zwei festen Geraden a, b und x auf der Regelschaar a, b, x setzt, deren Charakteristik $[(\overline{1\,1\,1\,1}), (\overline{1\,1})]$ ist. Tritt an Stelle des harmonischen ein beliebiges Doppelverhältniss ein, so ist die letztere $[(\overline{1\,1\,1\,1}), 1, 1]$.

***) Voss, Math. Annalen Bd. X, S. 172 ff.

In sich transformirt werden alle Formen:

(1) $$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 \Xi_1^2 + 2\lambda_3 X_2 \Xi_2 + 2\lambda_4 X_3 \Xi_3,$$

welche wegen der Identität, welche für alle Gerade des Raumes besteht:

$$X_1^2 + \Xi_1^2 + 2X_2\Xi_2 + 2X_3\Xi_3 = 0$$

ein *Netz quadratischer Complexe* bilden. Die Charakteristik derselben:

$$[1\ 1\ (1\ 1)\ (1\ 1)]$$

deutet nach Herrn Weiler's Arbeit*) auf eine *Schaar von Complexen, von denen je einfach unendlich viele die nämliche aus zwei Flächen zweiten Grades bestehende singuläre Fläche besitzen.*

Diese Flächen zweiten Grades gehen, wie man leicht sieht, *gegenseitig in einander über.* In der That entnehmen wir aus § III. direct die Gleichung der Schaar specieller Complexe zweiten Grades, welche gegenseitig in sich übergehen:

$$\sqrt{1-\lambda^2}\,X_1^2 - \sqrt{1-\lambda^2}\,\Xi_1^2 \pm 2\lambda X_1\Xi_1 + 2X_2\Xi_2 - 2X_3\Xi_3 = 0,$$

welche mit Hülfe der Identität auch in die Form:

$$[\Lambda X_1 \pm \sqrt{1-\Lambda^2}\,\Xi_1]^2 + 2X_2\Xi_2 = 0$$

gebracht werden kann. *Und diese Schaar stellt zugleich die sämmtlichen singulären Flächen vor,* die in dem angegebenen Netze vorhanden sind. Wir schreiben die Gleichung derselben der bequemeren Untersuchung halber in der Gestalt:

(2) $$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3(x_3^2 + x_4^2) + \lambda_4[x_5^2 + x_6^2] = 0,$$

wo an Stelle von X_1, Ξ_1, $2X_2\Xi_2$, $2X_3\Xi_3$ wieder x_1, x_2, $x_3^2 + x_4^2$, $x_5^2 + x_6^2$, gesetzt ist, damit die Identität wieder in der Form:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

erscheint. An Stelle von (2) kann man auch nehmen:

(3) $$(\lambda_1 - \lambda_4)x_1^2 + (\lambda_2 - \lambda_4)x_2^2 + (\lambda_3 - \lambda_4)(x_3^2 + x_4^2) = 0,$$

oder, wenn:

$$x_3^2 + x_4^2 = z^2,\quad \lambda_1 - \lambda_4,\quad \lambda_2 - \lambda_4,\quad \lambda_3 - \lambda_4 \text{ gleich } \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$$

gesetzt werden:

(4) $$\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 z^2 = 0,$$

während die Identität in

$$x_1^2 + x_2^2 + x_5^2 + x_6^2 + z^2 = 0$$

übergeht.

Die singuläre Fläche von (4) in Liniencoordinaten y ist nun die Discriminante der in λ quadratischen Gleichung:

*) Weiler, Math. Annalen Bd. VII, S. 160.

$$\frac{\mu_1 y_1^2}{1+\lambda\mu_1} + \frac{\mu_2 y_2^2}{1+\lambda\mu_2} + \mu_3 \frac{(y_3^2+y_4^2)}{1+\lambda\mu_3} = 0.$$

Diese Discriminante zerfällt aber in die Factoren:

$$(5) \quad \begin{cases} \mu_1\alpha y_1^2 + \mu_2\beta y_2^2 + \mu_3\gamma(y_3^2+y_4^2) - 2\sqrt{\mu_1\mu_2\alpha\beta}\, y_1 y_2 = 0, \\ \mu_1\alpha y_1^2 + \mu_2\beta y_2^2 + \mu_3\gamma(y_3^2+y_4^2) + 2\sqrt{\mu_1\mu_2\alpha\beta}\, y_1 y_2 = 0, \end{cases}$$

wo:

$$\alpha = \mu_2 - \mu_3 = \lambda_2 - \lambda_3,$$
$$\beta = \mu_3 - \mu_1 = \lambda_3 - \lambda_1,$$
$$\gamma = \mu_1 - \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Die Gleichungen (5) sind die von zwei Flächen zweiten Grades. Man kann sie durch die einzige Gleichung:

$$\frac{[X_1\sqrt{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)} \pm \Xi_1\sqrt{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_1)}]^2}{\lambda_2-\lambda_1 \quad \lambda_3-\lambda_4} + 2X_2\Xi_2 = 0$$

darstellen, oder auch, weil die Summe der Quadrate der Coefficienten von X_1, Ξ_1 gleich eins ist, in der oben angegebenen Form:

$$[X_1\Lambda \pm \Xi_1\sqrt{1-\Lambda^2}]^2 + 2X_2\Xi_2 = 0.$$

Aber es befinden sich unter den Complexen (2) noch solche, für welche die beiden Gleichungen (5) zusammenfallen, nämlich wenn α oder β verschwindet. Setzt man demgemäss $\lambda_2 = \lambda_3$ oder $\lambda_1 = \lambda_3$, so entstehen zwei besondere Flächen zweiten Grades:

$$X_1^2 + 2X_2\Xi_2 = 0,$$
$$\Xi_1^2 + 2X_2\Xi_2 = 0,$$

welche als doppeltzählende singuläre Flächen durch die reciproke Substitution in sich selbst übergehen, wie freilich aus § III. direct entnommen werden konnte.

Die Classification der uneigentlichen Substitutionen wird durch den Umstand beträchtlich erleichtert, dass in der Gleichung $\Omega(\varrho) = 0$ immer zwei Wurzeln gleich $+1$ oder -1 sind, und dass jede derselben auch bei höherer Vielfachheit nur in ungerader Anzahl vorkommen kann. Ausserdem kommen die Gesetze des § II. in Anwendung. Wir haben daher folgende Fälle:

1) $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$; der allgemeine, die beiden ersten Elementartheiler beziehen sich auf die Wurzeln ± 1, die anderen auf zwei Paare reciproker Wurzeln.

2) $[1, 1, 2, 2]$, zwei gleiche Paare reciproker Wurzeln.

3) $[1, 1\,(1\,1)\,(1\,1)]$, desgleichen, mit verschwindenden ersten Unterdeterminanten.

4) $[3, 1, 1, 1]$, drei Wurzeln sind gleich $+1$, ausserdem ist ein Paar reciproker vorhanden.

5) [5 1].

6) [3 3].

7) [(1 1 1), 1, 1, 1], dreimal wiederholte uneigentliche specielle Substitution a, b, c.

8) [(1 1 1), 3]
9) [(3 1 1), 1] } , desgleichen, mit einer invarianten Beziehung zwischen den a, b, c.

10) [(1 1 1) (1 1 1)], symmetrische Transformation.

11) [(1 1 1 1 1), 1], uneigentliche specielle Substitution.

Die Substitution [(2 2 1), 1] ist wahrscheinlich nicht vorhanden. Uebrigens würden sich aus 4), 5), 7), 8), 9), 11) noch ebenso viele nicht eigentlich verschiedene Substitutionen ergeben, in welchen die Wurzel -1 die ausgezeichnete Eigenschaft besitzt, welche in jenen der Wurzel $+1$ beigelegt worden ist. Sieht man von diesen ab, so kommen zu den früher angegebenen 21 eigentlichen Transformationen*) noch 11 uneigentliche hinzu, *so dass im Ganzen 32 Transformationen des Linienraumes vorhanden sind, welche wesentlich durch die Beschaffenheit der Gebilde sich unterscheiden, welche bei denselben ungeändert bleiben***).

§ VII.

Zur Theorie der Reciprocität.

Die Betrachtungen des vorigen § haben einige vielleicht bisher nicht bemerkte Eigenschaften der reciproken Punkt-Ebenentransformation ergeben***). Es wird daher nicht unzweckmässig sein, wenn dieselben jetzt direct als eine Folge der reciproken Beziehung nachgewiesen werden.

Auch hier werden wir eine unbeschränkte Zahl von Variabelen voraussetzen. Wir betrachten die Substitution:

$$u_i = \sum a_{ir} x_r, \tag{1}$$

in welcher die n Variabelen u_i homogene Ebenencoordinaten, die x_i homogene Punktcoordinaten bedeuten. Die Umkehrung der Gleichungen (1) liefert:

$$u_i \Delta_{is} = \Delta x_s, \tag{2}$$

---

*) Die identische Transformation ist hier mitgezählt.

**) Trotz vielfacher Versuche habe ich wenigstens das Vorhandensein von weiteren Substitutionen, welche nach § II. denkbar wären, nicht constatiren können.

***) Es ist schon im vorigen § vielfältig hervorgetreten, dass in Gebieten von ungerader Dimension die uneigentliche orthogonale Substitution einen speciellen Charakter gegenüber der eigentlichen besitzt. In ähnlicher Weise verhält sich die Reciprocität zur Collineation; schon die Reciprocität der Ebene führt ein ganzes Büschel von Kegelschnitten in sich über.

wo Δ, Δ_{is} die Determinante und Unterdeterminanten des Systems der a_{is} bedeuten. Soll die Ebene u den Punkt x, dem sie zugeordnet ist, enthalten, so muss:

(3) $$F = \sum a_{ir} x_i x_r = 0$$

sein. Die Transformation ordnet aber gleichzeitig jeder Ebene v auch einen Punkt y zu. Setzt man nämlich:

$$\sum vx = \sum uy,$$

so hat man, wenn rechts statt der u die x aus (1) gesetzt werden:

$$\sum vx = \sum a_{ir} x_r y_i,$$

also:

(4) $$v_r = \sum a_{ir} y_i,$$

und umgekehrt:

(5) $$\Delta y_l = \sum \Delta_{lr} v_r.$$

Soll demnach eine Ebene v den ihr entsprechenden Punkt enthalten, so muss:

(6) $$\Phi = \sum v_r v_l \Delta_{lr} = 0$$

sein. *Die beiden Flächen F und Φ stehen in der Beziehung zu einander, dass F durch die Substitution* (1) *in Φ übergeht und umgekehrt Φ in F.* In der That hat man:

$$\Delta^2 F = \sum a_{ir} u_l \Delta_{li} u_k \Delta_{kr} = \Delta \sum u_i u_l \Delta_{li} = \Delta \Phi,$$

F und Φ sind die bekannten beiden *Ordnungsflächen*) der Substitution* (1).

Wir untersuchen nun, wie oft es geschieht, dass dem Punkte x die Ebene u, dieser wieder der Punkt x entspricht. Das heisst, es ist in den Gleichungen (1), (2), (4), (5) zu setzen:

$$v_i = u_i, \quad \varrho x_i = y_i$$

So entstehen die Gleichungen:

(7 a) $$\begin{cases} u_i = \sum a_{ir} x_r, \\ u_r = \varrho \sum a_{ir} x_i, \end{cases}$$

d. h.:

(7) $$\varrho \sum a_{ir} x_i = \sum a_{ri} x_i$$

Die Gleichungen (7) führen auf eine Gleichung n^{ten} Grades in ϱ, welche reciproke Wurzeln besitzt, deren Product gleich eins ist. Ist n eine gerade Zahl, so sind im Allgemeinen nur reciproke Wurzeln vor-

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage II, 18.

handen, während die Wurzel 1 nur als vielfache Wurzel auftreten kann, für die mindestens noch alle ersten Unterdeterminanten verschwinden. Ist dagegen n ungerade, so ist eine Wurzel gleich 1, die übrigen sind im Allgemeinen reciprok.*)

Wir nehmen alle Wurzeln als reciprok d. h. n als gerade an, sie sondern sich dann in zwei Systeme von je $s = \frac{n}{2}$ Wurzeln:

$$r_1, r_2, \cdots r_s,$$
$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_s;$$

und bezeichnen die Lösungen der Gleichung (7) durch

$$x_1^s, x_2^s \cdots x_n^s, \text{ gehörig zu } r_s,$$
$$y_1^s, y_2^s \cdots y_n^s, \quad \text{„} \quad \text{zu } \varrho_s.$$

Zwischen diesen Lösungen finden ganz ähnliche Beziehungen statt, wie die in § I. behandelten. Zunächst ist aus (1):

$$r_s \sum a_{ik} x_i^s = \sum a_{ki} x_i^s,$$

also:

$$r_s \sum a_{ik} x_i^s x_k^s = \sum a_{ki} x_i^s x_k^s.$$

Hieraus folgt, so lange nicht $r_s = 1$:

$$(8) \qquad \begin{cases} \sum x_i^s x_k^s a_{ik} = 0, \\ \sum y_i^s y_k^s a_{ik} = 0, \end{cases}$$

Ferner ist:

$$r_s \sum a_{ik} x_i^s x_k^t = \sum a_{ki} x_i^s x_k^t,$$
$$r_t \sum x_i^t x_k^s a_{ik} = \sum a_{ki} x_i^t x_k^s,$$

woraus, so lange $r_s r_t$ von Eins verschieden ist, folgt:

$$(9) \qquad \begin{cases} \sum x_i^s x_k^t a_{ik} = 0, \\ \sum x_i^s y_k^t a_{ik} = 0, \\ \sum y_i^s y_k^t a_{ik} = 0. \end{cases}$$

Nur die Ausdrücke $\sum a_{ik} x_i^s y_k^s$ verschwinden nicht, sondern genügen den Gleichungen:

$$(10) \qquad \begin{cases} r_s \sum x_i^s y_k^s a_{ik} = \sum a_{ki} x_i^s y_k^s, \\ \varrho_s \sum y_i^s y_k^s a_{ik} = \sum a_{ki} y_i^s x_k^s. \end{cases}$$

*) Die genauere Untersuchung aller möglichen Fälle reciproker Substitutionen knüpft sich überhaupt damit an ganz ähnliche Betrachtungen an, wie sie in § II auseinander gesetzt worden sind.

Bezeichnet man den Ausdruck $\sum x_i^s y_k^t a_{ik}$ durch $[x_s y_t]$, so kann man die Gleichungen (8) (9) (10) in die folgenden zusammenfassen:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &[x_s x_t] = 0, \quad [y_s x_t] = 0, \quad [x_s y_t] = 0,\\ &\qquad r_s [x_s y_s] = [y_s x_s]. \end{aligned}\right.$$

Man hat ferner nach (2) und (5):

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum u_i \Delta_{is} = \Delta x_s,\\ &\sum u_i \Delta_{si} = \Delta \varrho x_s. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen:

$$\varrho \sum u_i \Delta_{is} = \sum u_i \Delta_{si}$$

liefern daher eine neue Determinante, welche dieselben Wurzeln besitzt, wie die vorhin betrachtete. Dementsprechend finden zwischen den Lösungen u_i^s und den den entsprechenden reciproken Wurzeln zugehörigen v_i^s diejenigen Gleichungen statt, welche den (11) analog sind:

$$(11\,\mathrm{a})\qquad \left\{\begin{aligned} &[u_s u_t] = 0, \quad [u_s v_t] = 0, \quad [v_s v_t] = 0,\\ &\qquad [u_s v_s] = \Delta [x_s y_s]. \end{aligned}\right.$$

Endlich hat man noch:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum u_i^s x_i^t = \sum u_i^s y_i^s = [y_s x_s],\\ &\sum v_i^s y_i^r = \sum v_i^s x_i^s = [x_s y_s], \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen (11)—(13) sagen aus:

Bei der reciproken Transformation sind (n gerade) n in $\frac{n}{2}$ Paare geordnete Punkte vorhanden, welche auf der Fläche F liegen und deren Verbindungslinien mit Ausnahme der zu einem Paar gehörenden Erzeugende derselben sind. Je einem derselben entspricht eine Tangentialebene der Fläche Φ, welche durch alle anderen Punkte mit Ausnahme des zugehörigen geht, und welcher ihrerseits wieder der ursprüngliche Punkt als entsprechender vermöge der Transformation zugeordnet ist.

Bei ungeradem n treten einige sehr leicht zu erkennende Modificationen dieses Satzes auf.

Es wird angemessen sein, das aus jenen n Punkten bestehende Gebilde zum Fundamentalgebilde einer Coordinatenbestimmung zu wählen. Wir führen daher die Transformation:

$$(14)\qquad x_i = \sum Y_r x_i^r + \mathsf{H}_r y_i^r$$

ein, welche an Stelle der Variabelen x zwei Reihen neuer:

$$Y_1,\ Y_2 \cdots Y_s,$$
$$\mathsf{H}_1,\ \mathsf{H}_2 \cdots \mathsf{H}_s,$$

setzt. Dann ist:

$$\sum x_i u_i^s = \sum Y_r x_i^r u_i^s + \mathsf{H}_r y_i^r u_i^s,$$

also nach (13)

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} Y_s &= \frac{\Sigma x_i v_i^s}{[x_s y_s]}, \\ \mathsf{H}_s &= \frac{\Sigma x_i u_i^s}{[y_s x_s]}. \end{aligned} \right.$$

Führen wir ähnlich an Stelle der Ebenencoordinaten v_i zwei Reihen $U_i\, V_i$ ein, so ist:

$$\sum (vx) = \sum Y U + \mathsf{H}\, V = \sum \frac{(x_i v_i^s)\, U_s}{[x_s y_s]} + \sum \frac{(x_i u_i^s)\, V_s}{[y_s x_s]},$$

also:

$$(16)\qquad v_i = \sum \frac{V_s u_i^s}{[y_s x_s]} + \frac{v_i^s U_s}{[x_s y_s]},$$

oder:

$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} U_s &= \sum v_i x_i^r, \\ V_s &= \sum v_i y_i^r. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (14)—(17) vermitteln die *kanonische Gestalt der Reciprocität.* Wir erhalten so zunächst die Formen F *und* Φ *in ihrer einfachsten Gestalt.* Und zwar ergiebt sich:

$$(18)\qquad F = \sum a_{ik} x_i x_k = \sum Y_s \mathsf{H}_s ([x_s y_s] + [y_s x_s]),$$

sowie:

$$(19)\qquad \Phi = \sum \Delta_{ik} u_i v_k = \Delta \sum V_s U_s \frac{([x_s y_s] + [y_s x_s])}{[x_s y_s][y_s x_s]}.$$

Aus den Gleichungen (18) (19) geht unmittelbar hervor, dass die Gleichung Φ in Punktcoordinaten geschrieben wieder von der Form (18) ist, d. h. *dass die Fläche F von Φ in dem aus Erzeugenden gebildeten Fundamentalgebilde geschnitten wird**).

Wir gehen nun dazu über, die *kanonische Form der reciproken Substitution* (1) selbst herzuleiten. Da:

$$u_i = \sum a_{ir} x_r = \sum a_{ir} Y_s x_r^s + a_{ir} \mathsf{H}_s y_r^s \quad \text{nach (1), (14),}$$
$$= \sum \frac{u_i^s V_s}{[y_s x_s]} + \frac{v_i^s U_s}{[x_s y_s]} \quad \text{nach (16),}$$

*) Vgl. Schröter, Crelle 77, pag. 140 ff.

so ergiebt sich, wenn man mit x_i^t multiplicirt:

$$\mathsf{H}_t[x_t y_t] = U_t,$$

und ebenso durch Multiplication mit y_i^t:

$$Y_t[y_t x_t] = V_t.$$

Darnach sind:

(20) $$\begin{cases} [x_t y_t]\mathsf{H}_t = U_t, \\ [y_t x_t]\, Y_t = V_t \end{cases}$$

die kanonischen Formeln für die allgemeine reciproke Substitution.

Man kann hiernach Formen zweiter Ordnung angeben, welche durch die reciproke Substitution in sich übergehen.

Setzt man zur Abkürzung $[x_t y_t]\,[y_t x_t]$ gleich a_t, so wird die Punktfläche:

$$f = \sum Y_t \mathsf{H}_t \lambda_t = 0$$

nach (20) übergehen in die Tangentenebenenfläche

$$\varphi = \sum U_t V_t \frac{\lambda_t}{a_t} = 0,$$

welche selbst wieder mit der Punktfläche (forma adjuncta)

$$f' = \sum Y_t \mathsf{H}_t \frac{a_t}{\lambda_t} = 0$$

gleichbedeutend ist. Daher sind die Bedingungen, unter welchen f in sich selbst übergeht:

(21) $$\lambda_t^2 = a_t,$$

und der allgemeine *Ausdruck des Systems, dessen sämmtliche Individuen in sich übergehen*, ist:

(22) $$\Omega = \sum Y_t \mathsf{H}_t \sqrt{a_t}\,,$$

wo die Quadratwurzeln mit beliebigen Zeichen genommen werden können. Ω ist eine Gruppe in der Mannigfaltigkeit der Formen, die *gegenseitig* in sich übergehen; *in der That müssen je zwei Formen, die überhaupt in dem System*

$$\sum Y_t \mathsf{H}_t \lambda_t$$

enthalten sind, durch die reciproke Substitution in dieser Weise einander zugeordnet erscheinen. Für $n = 4$ erhalten wir also aus (22) zwei Flächen, die in sich übergehen und zu dem Büschel gehören, von dem die beiden Ordnungsflächen F, Φ zwei Individuen sind. *Je zwei Flächen dieses Büschels gehen im Allgemeinen gegenseitig in einander über, während die beiden:*

$$Y_1 \mathrm{H}_1 \sqrt{a_1} + Y_2 \mathrm{H}_2 \sqrt{a_2},$$
$$Y_1 \mathrm{H}_1 \sqrt{a_1} - Y_2 \mathrm{H}_2 \sqrt{a_2},$$

in sich selbst transformirt werden.

Für ungerade Variabelnzahl würde man dagegen dem der Wurzel 1 zugehörigen Punkte x_i' entsprechend den Gleichungen (15) (17) (20) noch die folgenden respective:

$$Y_1 = \sum \frac{x_i u_i'}{[x_1 x_1]} \quad (15),$$
$$U_1 = \sum u_i x_i' \quad (17),$$
$$Y_1 = \frac{U_1}{[r_1 x_1]} \quad (20)$$

hinzuzufügen haben. Die Form:

$$Y_1^2 \lambda_1 + \sum Y_t \mathrm{H}_t \lambda_t$$

würde darnach in

$$U_1^2 \frac{\lambda_1}{a_1^2} + \sum U_t V_t \frac{\lambda_t}{a_t'} = Y_1^2 \frac{a_1^2}{\lambda_1} + \sum Y_t \mathrm{H}_t \frac{a_t}{\lambda_t}$$

übergeführt werden. *Für $n = 3$ gehen also je zwei Curven des Büschels sich doppelt berührender Kegelschnitte*

$$Y_1^2 \lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{H}_2 Y_2 = 0$$

gegenseitig in einander über, während die beiden besonderen Kegelschnitte

$$Y_1^2 a_1 \pm Y_2 \mathrm{H}_2 \sqrt{a_2}$$

*in sich selbst transformirt werden.**)

§ VIII.

Die Transformation einer Fläche zweiten Grades in sich selbst.

Wir wollen hier die Transformation einer gegebenen Fläche zweiten Grades in sich noch kurz besprechen. Dabei ist die Gleichung derselben in Liniencoordinaten vorausgesetzt worden, eine Auffassung, die im Ganzen *vier Classen von Transformationen* als gleichwerthig hervortreten lässt.

Die beiden Systeme der Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades lassen sich in der Form:**)

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i = \mu^2 a_i + b_i \lambda \mu + c_i \lambda^2, \\ y_i = \mathrm{M}^2 \alpha_i + \beta_i \Lambda \mathrm{M} + \gamma_i \Lambda^2 \end{cases}$$

darstellen, wo x, y, die Liniencoordinaten derselben, Functionen zwei-

*) Rosanes, Crelle 80, pag. 67, Anmerkung.

**) Voss, Math. Annalen VIII, 118.

ten Grades der homogenen Parameter λ, μ; Λ, M sind. Dabei müssen die Gleichungen:

$$(a^2) = 0, \quad (ba) = 0, \quad (bc) = 0, \quad (c^2) = 0,$$
$$2(ac) + (b^2) = 0,$$

und die analogen für die α_i, β_i, γ_i vorausgesetzt werden, während:

$$(\alpha a) = 0, \quad (\alpha b) = 0, \quad (\alpha c) = 0, \quad (\beta a) = 0, \cdots \text{u. s. w.}$$

ist. Die Gleichung der Fläche selbst erscheint in der zweifachen Gestalt:

$$(2) \qquad \begin{cases} F = 4 a_x c_x - b_x^2 = 0, \\ F' = 4 \alpha_x \gamma_x - \beta_x^2 = 0, \end{cases}$$

wobei F, F' durch die Identität:

$$(3) \qquad \sum x_i^2 + \frac{F}{(b^2)} + \frac{F'}{(\beta^2)} = 0$$

verbunden sind. Das Verhältniss:

$$\frac{(b^2)}{(\beta^2)} = \frac{(ac)}{(\alpha\gamma)}$$

mag mit E bezeichnet werden.

Setzt man an Stelle der λ, μ oder Λ, M die Ausdrücke $a\mu + b\lambda$, $c\mu + d\lambda$ oder $\alpha M + \beta \Lambda$, $\gamma M + \delta \Lambda$, so werden die Erzeugenden projectivisch in x', y' transformirt, wo dann:

$$(1\,\text{a}) \qquad \begin{cases} x_i' = (c\mu + d\lambda)^2 a_i + b_i (a\mu + b\lambda)(c\mu + d\lambda) + c_i (a\mu + b\lambda)^2, \\ y_i' = (\gamma M + \delta\Lambda)^2 \alpha_i + \beta_i (\alpha M + \beta\Lambda)(\gamma M + \delta\Lambda) + \gamma_i (\alpha M + \beta\Lambda)^2. \end{cases}$$

Da ferner jede Tangente der Fläche in der Form $x_i + \nu y_i$ erscheint, so kann die Transformation des Tangentensystemes nur darin bestehen, dass an Stelle der Tangente $x_i + \nu y_i = z_i$ die neue $z_i' = l x_i' + m y_i'$ tritt. Da nun aus (1):

$$\begin{aligned} a_z &= \lambda^2 (ac), & \alpha_z &= \Lambda^2 (\alpha\gamma), \\ b_z &= \lambda\mu (b^2), & \beta_z &= \Lambda M (\beta^2), \\ c_z &= \mu^2 (ac), & \gamma_z &= M^2 (\alpha\gamma), \end{aligned}$$

so kann man vermöge $z_i' = l x_i' + m y_i'$ die Formen a_z', $b_z' \cdots$ leicht durch die z ausdrücken, und erhält so die Transformationsformeln:

$$(4) \qquad \begin{cases} a_z' = l(a^2 c_z - ab\, b_z + b^2 a_z), \\ -b_z' = l(2ac c_z - (ad + bc) b_z + 2bd\, a_z). \\ c_z' = l(c^2 c_z - cd\, b_z + d^2 a_z), \\ \alpha_z' = m(\alpha^2 \gamma_z - \alpha\beta\, \beta_z + \beta^2 \alpha_z), \\ -\beta_z' = m(2\alpha\gamma\gamma_z - (\alpha\delta + \beta\gamma)\gamma_z + 2\beta\delta\, \alpha_z), \\ \gamma_z' = m(\gamma^2 \gamma_z - \gamma\delta\, \beta_z + \delta^2 \alpha_z). \end{cases}$$

Man kann in denselben $l = m = 1$ voraussetzen. Da ferner:

$$4a_z'c_z' - b_z'^2 = (ad-bc)^2 F,$$
$$4\alpha_z'\gamma_z' - \beta_z'^2 = (\alpha\delta-\beta\gamma)F',$$

so ist nach (3) erforderlich, wenn die Substitution (4) überhaupt eine orthogonale sein soll, dass:

$$(ad-bc)^2 = (\alpha\delta-\beta\gamma)^2,$$

und also die Werthe der beiden Determinanten $(ad-bc)$, $(\alpha\delta-\beta\gamma)$, k und $\varkappa$ so ist:

$$k^2 = \varkappa^2,$$

und zugleich:

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum z_1^2 = k^2 \sum z^2, \\ \sum z_1 y_1 = k^2 \sum zy. \end{cases}$$

Die Determinante der Substitution (4) ist gleich $k^3\varkappa^2$, und die *Transformation ist demnach eigentlich oder uneigentlich, je nachdem $k=\varkappa$ oder $k=-\varkappa$ ist.*

Es giebt noch eine zweite Transformation der Fläche; sie entsteht, wenn man zugleich eine Vertauschung der beiden Systeme von Erzeugenden ausführt, d. h. wenn man in (4) rechter Hand die lateinischen Buchstaben mit den entsprechenden griechischen vertauscht. Für sie gelten daher die Formeln:

$$(6)\qquad \begin{cases} a_z' = \alpha^2\gamma_z - \alpha\beta\,\beta_z + \beta^2\alpha_z, \\ -b_z' = 2\alpha\gamma\,\gamma_z - (\alpha\delta+\beta\gamma)\beta_z + 2\beta\delta\,\alpha_z, \\ c_z' = \gamma^2\gamma_z - \gamma\delta\,\beta_z + \delta^2\alpha_z, \\ \alpha_z' = a^2c_z - ab\,b_z + b^2a_z, \\ -\beta_z' = 2ac\,c_z - (ad+bc)b_z + 2bd\,a_z, \\ \gamma_z' = c^2c_z - cd\,b_z + d^2a_z, \end{cases}$$

wobei wieder:

$$4a_z'c_z' - b_z'^2 = (\alpha\delta-\gamma\beta)^2 F',$$
$$4\alpha_z'\gamma_z' - \beta_z'^2 = (ad-bc)^2 F,$$

also

$$(\alpha\gamma-\gamma\beta)^2\varepsilon^2 = (ad-bc)^2$$

vorausgesetzt werden muss. Die Determinante der Substitution (6) ist $-k^3\varkappa^3$ und die letztere daher *eigentlich oder uneigentlich, je nachdem $k+\varepsilon\varkappa=0$ oder $k-\varepsilon\varkappa=0$.* Die Formeln (4), (6) stellen zugleich die allgemeinsten Transformationen des Linienraumes vor, bei denen eine Fläche zweiten Grades in sich übergeht.

Wir betrachten zunächst die Gleichungen (4).

Zur Bestimmung der linearen Complexe, welche durch die Transformation in sich übergeführt werden, hat man zu setzen:

$$k_1 a_z' + k_2 b_z' + k_3 c_z' = \varrho\,(k_1 a_z + k_2 b_z + k_3 c_z),$$
$$\varkappa_1 \alpha_z' + \varkappa_2 \beta_z' + \varkappa_3 \gamma_z' = \sigma\,(\varkappa_1 \alpha_z + \varkappa_2 \beta_z + \varkappa_3 \gamma_z).$$

Für die k_1, k_2, k_3 entstehen so die Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} \varrho k_1 = k_1 b^2 - 2bd\,k_2 + k_3 d^2, \\ \varrho k_2 = -k_1 ab + (ad+bc)\,k_2 - k_3 cd, \\ \varrho k_3 = k_1 a^2 - 2ac\,k_2 + k_3 c^2, \end{cases}$$

also zur Bestimmung von ϱ die cubische Gleichung:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} b^2-\varrho & -2bd & d^2 \\ -ab & ad+bc-\varrho & -cd \\ a^2 & -2ac & c^2-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$(9)\qquad (\varrho+k)\,[(\varrho-k)^2 - n^2\varrho] = 0,$$

wo:

$$n = b + c.$$

Ganz analog hat man zur Bestimmung von $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, σ die Gleichung:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \beta^2-\sigma & -2\beta\delta & \delta^2 \\ -\alpha\beta & \alpha\delta+\beta\gamma-\sigma & -\gamma\delta \\ \alpha^2 & -2\alpha\gamma & \gamma^2-\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$(11)\qquad (\sigma+\varkappa)\,[(\sigma-\varkappa)^2 - \nu^2\sigma)] = 0,$$
$$\nu = \beta + \gamma.$$

Bezeichnet man die den drei Wurzeln $\varrho = -k$, ϱ_1, ϱ_2 entsprechenden linearen Complexe durch A_z, B_z, C_z, die den Wurzeln $\sigma = -\varkappa$, σ_1, σ_2 zugehörigen durch A_z, B_z, Γ_z, so hat man die Identitäten:

$$(12)\qquad \begin{cases} A_z' = -k\,A_z, \\ B_z' = \varrho_1 B_z, \\ C_z' = \varrho_2 C_z, \\ \mathsf{A}_z' = -\varkappa\,\mathsf{A}_z, \\ \mathsf{B}_z' = \sigma_1 \mathsf{B}_z, \\ \Gamma_z' = \sigma_2 \Gamma_2. \end{cases}$$

Die Complexe B_z, C_z, B_z, Γ_z sind specielle, sie stellen zwei Paare von Erzeugenden vor, welche bei der Transformation fest bleiben. Dagegen hat man für A_z, A_z die Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} A_z = a_z d + \dfrac{b-c}{2}\,b_z - a c_z, \\[2ex] \mathsf{A}_z = \alpha_z \delta + \dfrac{\beta-\gamma}{2}\,\beta_z - \alpha\gamma_z, \end{cases}$$

und diese Complexe sind nur dann speciell, wenn $n^2 - 4k = 0$ oder

$\nu^2 - 4\varkappa = 0$, d. h. wenn die Discriminante der quadratischen Factoren von (9) und (11) verschwindet.

Ist nun $k = \varkappa$, so geht gleichzeitig jeder Complex des Büschels:

$$A_s + \varrho \mathsf{A}_s = 0$$

in sich über, und die beiden in letzterem befindlichen speciellen Complexe sind die beiden Diagonalen des festen Erzeugenden-Vierseites: *die Transformation ist* (im Sinne der Punktgeometrie) *eine eigentliche collineare.* $([\overline{1\,1}, 1, 1, 1, 1])$

Wenn dagegen $k = -\varkappa$, so geht $A_s + \varrho \mathsf{A}_s$ über in $A_s' - \varrho \mathsf{A}_s'$, d. h. je zwei Complexe jenes Büschels, also auch die beiden Diagonalen vertauschen sich gegenseitig, und die *Transformation ist eine reciproke* $([1, 1, 1, 1, 1, 1])$.

Wird ferner die Transformation (6) zu Grunde gelegt, so kann man verlangen, dass die lineare Form:

$$\begin{aligned} (14) \qquad & k_1 a_s' + k_2 b_s' + k_3 c_s' + k_4 \alpha_s' + k_5 \beta_s' + k_6 \gamma_s' \\ & = \varrho (k_1 a_s + k_2 b_s + k_3 c_s + k_4 \alpha_s + k_5 \beta_s + k_6 \gamma_s) \end{aligned}$$

werde. Zur Bestimmung der k hat man die 6 Gleichungen:

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varrho k_1 &= b^2 k_4 - 2bd k_5 + d^2 k_6, \\ -\varrho k_2 &= ab k_4 - (ad + bc) k_5 + dc k_6, \\ \varrho k_3 &= a^2 k_4 - 2ac k_5 + c^2 k_6, \\ \varrho k_4 &= \beta^2 k_1 - 2\beta\delta k_2 + \delta^2 k_3, \\ -\varrho k_5 &= \alpha\beta k_1 - (\alpha\delta + \beta\gamma) k_2 + \delta\gamma k_3, \\ \varrho k_6 &= \alpha^2 k_1 - 2\alpha\gamma k_2 + \gamma^2 k_3, \end{aligned} \right.$$

welche für ϱ^2 die cubische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A^2 - \varrho^2 & -2AB & B^2 \\ -AC & (AD + BC) - \varrho^2 & -B \\ C^2 & -2CD & D^2 - \varrho^2 \end{vmatrix} = 0$$

liefern, in welcher:

$$\begin{aligned} A &= b\beta + \alpha d, & C &= a\beta + \alpha c, \\ B &= b\delta + \gamma d, & D &= c\gamma + a\delta. \end{aligned}$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} \mathsf{K} &= AD - BC = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma), \\ \mathsf{N} &= A + D = \beta b + \alpha d + a\delta + c\gamma, \end{aligned}$$

so hat man:

$$(16) \qquad (\varrho^2 - \mathsf{K}) [(\varrho^2 + \mathsf{K})^2 - \mathsf{N}^2 \varrho^2] = 0.$$

In diesem Falle hat also die Determinante $\Omega(\varrho)$ nur Potenzen von ϱ mit geradem Exponenten (vgl. § III, S. 335).

Eine vollständige Untersuchung der Elementartheiler von $\Omega(\varrho)$

für alle speciellen Fälle, welche die Transformationen (4) (6) darbieten können, würde hier zu weit führen. Um aber wenigstens den allgemeinen Fall, in welchem die Wurzeln der bezüglichen Gleichungen (9), (11), (16) von einander verschieden sind, genauer zu übersehen, wollen wir zunächst bei eigentlicher Transformation in (4):

$$a = 0, \quad d = 0, \quad \alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad bc = \beta\gamma = k$$

setzen. Darnach bleiben die Erzeugenden:

$$\alpha, \gamma, a, c$$

und das Büschel $b_z + \varrho\beta_z$ fest. Es müssen daher alle Flächen zweiten Grades mit dem Parameter ϱ:

$$\Psi = F(\varrho^2 - \varepsilon) + 2\varrho\varepsilon\,[2\varrho\alpha_z\gamma_z + b_z\beta_z] = 0 \tag{17}$$

in sich übergehen. Jede Gerade z des Raumes transformirt sich hiernach als Tangente an zwei der Flächen des Büschels Ψ, deren Parameter bei gegebenem z durch die Gleichung (17) bestimmt werden.*)

Da die Fläche $F = 0$ keine besondere Stelle in jenem Büschel einnimmt, so genügt es z als Tangente vorauszusetzen, d. h.:

$$\begin{aligned} a_z &= l, & \alpha_z &= m, \\ b_z &= 2l\lambda, & \beta_z &= 2m\mu, \\ c_z &= \lambda^2 l, & \gamma_z &= m\mu^2, \end{aligned}$$

anzunehmen. Jede Tangente von F ist daher gleichzeitig Tangente an diejenige Fläche $\psi = 0$, für welche:

$$\varrho = -\frac{2l\lambda}{m\mu}. \tag{18}$$

---

*) In Verbindung hiermit steht der Satz, den Herr Cayley (Phil. Magazine 1853, VI, 326) bemerkt hat: *Die Verbindungslinien correspondirender Punkte der Fläche sind Tangenten an zwei feste Flächen zweiten Grades.* Will man diesen Satz direct beweisen, so transformire man die Fläche:

$$x_1x_3 = \omega = -x_2x_4$$

durch die Gleichungen $y_i = \lambda_i x_i$ in sich, wo $\lambda_1\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4$. Die Liniencoordinaten einer Verbindungsgeraden (xy),

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6,$$

stehen in der Beziehung, dass:

$$\frac{p_2^2}{(\lambda_3 - \lambda_1)^2} = \frac{p_5^2}{(\lambda_4 - \lambda_2)^2} = \frac{p_3p_6}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_2)} = \frac{p_1p_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)}.$$

Da nun die Gleichung des Flächenbüschels $x_1x_3 + kx_2x_4 = 0$ mit den nämlichen vier festen Erzeugenden in Liniencoordinaten ist:

$$p_5^2 + k^2p_2^2 + 2k(p_3p_6 - p_1p_4) = 0,$$

so erkennt man ohne Weiteres, dass die Gleichung:

$$k^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2 + 2k[(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)] + (\lambda_4 - \lambda_2)^2 = 0$$

die Parameter k_1, k_2 der genannten beiden Flächen des Büschels bestimmt.

Andererseits sind überhaupt die Geraden z, welche von ihren transformirten z' geschnitten werden, durch die Gleichung:

$$(4\dot{A}_z^2-(n^2+2k)F)+\varepsilon\,(4\Delta_z^2-(\nu^2+2K)F')=0$$

bestimmt, woraus in unserem speciellen Falle und für $F=F'=0$ wird:

$$(19)\qquad l^2\lambda^2(b-c)^2\pm\varepsilon m^2\mu^2(\beta-\gamma)^2=0,$$

d. h.: die Tangenten von F, welche von ihren Transformirten geschnitten werden, sind durch zwei verschiedene lineare Complexe ausgeschieden und zerfallen darnach in zwei getrennte Systeme: die sämmtlichen Geraden eines jeden berühren nach (18), (19) *noch je eine feste Fläche des Büschels ψ.*

Ist dagegen $\beta\gamma=-bc$, so ist die Transformation eine reciproke, und das Büschel ψ hat die Eigenschaft, *dass je zwei Flächen desselben gegenseitig in einander übergehen, während zwei Flächen desselben, nämlich die gegebene (für $\varrho=0$) und die Fläche $\varepsilon\beta_x^2-4a_xc_x=0$ (für $\varrho=\infty$) fest bleiben.*

Betrachten wir zweitens die aus (6) sich ergebenden Formeln:

$$\begin{aligned} a_{z'}&=\beta^2\alpha_z, & \alpha_{z'}&=b^2a_z,\\ b_{z'}&=\beta\gamma\beta_z, & \beta_{z'}&=bcb_z,\\ c_{z'}&=\gamma^2\gamma_z, & \gamma_{z'}&=c^2c_z,\end{aligned}$$

wenn wieder $a=d=\alpha=\beta=0$ gesetzt wird. Ist nun:

$$\beta\gamma+\varepsilon bc=0,$$

so sind *sämmtliche in sich übergehende lineare Complexe:*

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} ba_{z'}\pm\beta\alpha_{z'}&=\pm b\beta[ba_z\pm\beta\alpha_z],\\ cc_{z'}\pm\gamma\gamma_{z'}&=\pm c\gamma[cc_z\pm\gamma\gamma_z],\\ \sqrt{bc}\,b_{z'}\pm\sqrt{\beta\gamma}\,\beta_{z'}&=\pm\sqrt{\beta\gamma bc}\,[\sqrt{bc}\,b_z\pm\sqrt{\beta\gamma}\,\beta_z],\end{aligned}\right.$$

specielle und bestimmen die sechs Kanten eines Tetraeders, von welchen vier Tangenten der Fläche sind: die Transformation ist eine *uneigentliche collineare.* Bezeichnet man jene sechs Complexe (20) durch

$$A_z,\ B_z,\ C_z,\ \mathsf{A}_z,\ \mathsf{B}_z,\ \Gamma_z,$$

so gehen in Folge der Gleichungen (20) die linearen Formen der Gruppen:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\quad A_z+\varrho\mathsf{A}_z, &&\quad A_z-\varrho\mathsf{A}_z,\\ &\text{a)}\ B_z+\sigma\mathsf{B}_z, &&\text{b)}\ B_z-\sigma\mathsf{B}_z,\\ &\quad C_z+\tau\Gamma_z, &&\quad C_z-\tau\Gamma_z,\end{aligned}\right.$$

gegenseitig in einander über. Gleiches wird daher von den durch sie erzeugten ∞^3 Flächen zweiten Grades gelten. Im Allgemeinen ist die durch die Gruppe a) erzeugte Fläche eine andere, wie die aus b) ent-

stehende. Aber es entsteht die nämliche Fläche, wenn sämmtliche Complexe a) mit denen von b) in Involution liegen.

Dies führt, wegen $\beta\gamma + \varepsilon bc = 0$, und da:

$$\begin{aligned} A_z + \varrho \mathsf{A}_z &= \beta\alpha_z(1+\varrho) + ba_z(1-\varrho), \\ B_z + \sigma \mathsf{B}_z &= \gamma\gamma_z(1+\sigma) + cc_z(1-\sigma), \\ C_z + \tau \Gamma_z &= \sqrt{\beta\gamma}\,\beta_z(1+\tau) + \sqrt{bc}\,b_z(1-\tau), \end{aligned}$$

auf die einzige Bedingung:

$$\sigma = \varrho$$

wonach also ein ganzes Netz von Flächen zweiten Grades fest bleibt.

Hat man dagegen $\beta\gamma - \varepsilon bc = 0$, so befinden sich unter den Complexen (20) zwei nicht specielle, die Transformation ist eine *reciproke.* Auch hier gehen ∞^3 Flächen gegenseitig in sich über, *aber es existirt nur eine einfach unendliche Schaar in sich fester Flächen,* weil die Bedingungen:

$$\varrho\tau = 1, \quad \sigma = 1,$$

erforderlich sind, wenn sämmtliche Complexe der Gruppe a) mit denen von Gruppe b) in Involution liegen sollen.

§ IX.

Orthogonale Transformation linearer Formen in sich selbst.

Eine eigentliche Substitution transformirt im Allgemeinen nur specielle lineare Formen a_x in sich, d. h. solche, deren Coefficienten der Bedingung $\sum a_i^2 = 0$ genügen. Wird überhaupt eine allgemeine lineare Form in sich transformirt, so ist dies gleich mit einem Büschel solcher Formen der Fall. Anders ist es mit der uneigentlichen Substitution: sie transformirt schon im Allgemeinen zwei, aber auch nur zwei lineare Formen allgemeinen Charakters in sich, während die Individuen des aus ihnen gebildeten Büschels gegenseitig vertauscht werden.

Um Formeln anzugeben, welche eine gegebene Form $a_x = 0$ orthogonal in sich transformiren, construire man eine Gruppe von $\frac{n}{2}$ Punktpaaren $x_i^s, y_i^s \left(s = 1, 2 \cdots \frac{n}{2}\right)$, welche auf der Fläche $f = \sum x_i^2 = 0$ liegen, und deren Verbindungslinien zu je zweien Erzeugende der Fläche sind, mit Ausnahme derer, welche zu einem Paare gehören. Die Punkte x_i', y_i' wähle man so, dass:*)

*) In ganz ähnlicher Weise kann man Substitutionen bilden, welche zwei und mehr lineare Formen in sich transformiren. Insbesondere sei hier noch die (specielle) Substitution

$$y_i = F_i$$

$$y'_i = x'_i - 2a'_x \frac{a_i}{\Sigma a_i^2},$$

die übrigen unterwerfe man ausserdem den Bedingungen:

$$a_x^s = 0, \quad a_y^s = 0,$$

und ordne den Punkten x', y' die Zahl 1, den übrigen x_i^s, y_i^s Zahlen r_s, ϱ_s zu, deren Product gleich 1 ist. Dann wird die Transformation mit den Coefficienten

(1) $$b_{ik} = x'_i y'_k + x'_k y'_i + \sum r_s x_i^s y_k^s + \varrho_s x_k^s y_i^s, \quad s = 1 \cdots \frac{n-2}{2},$$

nach § III. die verlangte Eigenschaft besitzen. Und sie ist zugleich die allgemeinste Transformation dieser Art, da sie $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ willkürliche Parameter enthält.

Will man dagegen Formeln haben, welche die erforderliche Zahl von expliciten Parametern enthalten, so scheint es am einfachsten, die gegebene Form zuerst orthogonal in $y_n = 0$ (etwa durch eine specielle uneigentliche Transformation, wie im Folgenden gezeigt wird) und dann $\sum y^2 - y_n^2$ durch die Cayley'schen Formeln in sich zu transformiren.

Man kann aber auf folgendem Wege einfachere Formeln erhalten, die zwar nicht allgemein sind, aber bei manchen Gelegenheiten eine vortheilhaftere Anwendung finden.

Die specielle uneigentliche Substitution:

(2) $$x_i = y_i - 2\alpha_i \frac{\alpha_y}{\Sigma \alpha_i^2},$$

transformirt den Ausdruck a_x in sich selbst, wenn $(a\alpha) = 0$. *Sie stellt demnach ∞^{n-2} uneigentliche specielle Substitutionen der verlangten Eigenschaft dar.*

Andererseits bedingen die beiden speciellen uneigentlichen Substitutionen:

(3) $$x_i = y_i - \frac{(\alpha_y \pm m\beta_y)}{(\alpha\alpha) \pm m(\alpha\beta)}(\alpha_i \pm m\beta_i),$$

$$m = \sqrt{\frac{(\alpha\alpha)}{(\beta\beta)}},$$

die Identitäten:

(4) $$\begin{cases} \alpha_x = \mp m\beta_y, \\ \beta_x = \mp \frac{1}{m}\alpha_y. \end{cases}$$

(Seite 29) erwähnt, welche ersichtlich $\frac{n}{2}$ willkürliche lineare Formen a_x, b_x, $\cdots$ in sich überführt.

Man kann also auf zwei wesentlich verschiedene Arten α_x uneigentlich in die willkürliche Form β_y transformiren. Wendet man die beiden (vertauschbaren) Substitutionen (3) nach einander an, so entsteht eine eigentliche Substitution, welche α_x in sich transformirt:

$$(5)\quad x_i = y_i - \frac{(\alpha_y + m\beta_y)}{(\alpha\alpha) + m(\alpha\beta)}(\alpha_i + m\beta_i) - \frac{(\alpha_y - m\beta_y)}{(\alpha\alpha) - m(\omega\beta)}(\alpha_i - m\beta_i).$$

Die Formel (5) *stellt mithin* ∞^{n-1} *eigentliche Substitutionen vor, welche α_x in sich transformiren.* Wendet man die Transformation (5) zweimal hintereinander an, so entsteht wieder eine identische Transformation.

Allgemeinere Formeln entstehen, wenn man verschiedene Substitutionen der Art (1) oder (5) oder beide unter einander in irgend einer Weise combinirt. Insbesondere *aber erschöpft schon die Formel* (5) *alle Transformationen eines auf der Fläche* $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ *gelegenen Kegelschnittes im gewöhnlichen Raume in sich selbst.* Der geometrische Inhalt derselben ist folgender. Durch die Form $\beta_x = 0$ wird dem Kegelschnitte K, in welchem f von $\alpha_x = 0$ geschnitten wird, ein Kegelschnitt K' adjungirt. Die Transformation (5) geht nun aus zwei Centralprojectionen hervor, deren Centra die beiden Spitzen der Kegel sind, welche durch K, K' gelegt werden können; die erste führt K in K', die zweite K' in K über.

Man kann diese Transformation ohne Weiteres auf die beliebigen Formen:

$$a_x = 0, \qquad \sum a_{ik} x_i x_k = 0,$$

anwenden, welche einen Kegelschnitt K bestimmen. Nimmt man die willkürliche Ebene:

$$b_x = 0$$

hinzu, so sind die Spitzen der beiden Kegel, welche wir durch ihre Coordinaten:

$$x_1', x_2', x_3', x_4', \qquad x_1'', x_2'', x_3'', x_4''$$

bezeichnen, abhängig von den Wurzeln λ_1, λ_2 der quadratischen Gleichung:

$$(6)\qquad \Delta + 2\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} a\,b \\ a\,b \end{pmatrix} = 0,$$

in welcher Δ die Determinante der quadratischen Form, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,b \\ a\,b \end{pmatrix}$ die mit den a_i, b_i bezüglich ein oder zweimal geänderten Determinanten sind, welche aus Δ entstehen. Ferner ist

$$\sum x_i' x_k' a_{ik} = 2\lambda_1 a_{x'} b_{x'}, \qquad \sum x_i'' x_k'' a_{ik} - 2\lambda_2 a_{x''} b_{x''},$$
$$\sum x_i' x_k'' a_{ik} = 0.$$

Unter Anwendung der Transformation (5) erhält man die folgende

Hermite'sche Transformation eines beliebigen Punktes ξ des Kegelschnittes K:

$$(7) \qquad \eta_i = x_i'' a_{x'} b_{x'} (a_\xi b_{x''} + b_\xi a_{x''}) + x_i' a_{x''} b_{x''} (a_\xi b_{x'} + b_\xi a_{x'}) \\ - \xi_i a_{x'} b_{x'} a_{x''} b_{x''},$$

aus welcher man leicht unter Voraussetzung von $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$, $a_{44} = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ die Formeln herleitet, welche die Hermite'sche Transformation des Kegelschnittes $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ geben.

Darmstadt, im December 1877.

Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Von

P. Gordan in Erlangen.

In den Untersuchungen über das *Ikosaeder*, welche Hr. Klein im neunten Bande dieser Annalen p. 183 ff. veröffentlichte, hatte sich ein sehr merkwürdiger Zusammenhang mit der Theorie der Gleichungen fünften Grades ergeben. In der That gelang es Hrn. Klein neuerdings, diejenigen Gleichungen fünften Grades, bei welchen die Glieder mit der vierten und der dritten Potenz der Unbekannten fehlen, in einfachste Beziehung zu der Ikosaedergleichung zu setzen. — Die hier folgenden Untersuchungen knüpften ursprünglich an die erste hierauf bezügliche Mittheilung an, welche der Erlanger Societät im Januar 1877 vorgelegt wurde. Ich stellte mir vor Allem die Aufgabe, die Wurzeln der Gleichung fünften Grades explicite durch die Ikosaederirrationalität auszudrücken. Die Note, welche ich hierüber im Juli 1877 der Erlanger Societät einreichte, ist gleichzeitig mit einer weiteren Mittheilung von Hrn. Klein, in der er durch andere Betrachtungen zu demselben Ziele gelangte. Das Eigenthümliche meiner Behandlung bestand darin, dass ich die in den Formeln auftretenden Ausdrücke als Covarianten einer gewissen doppeltbinären Form f erkannt und im Anschlusse an meine früheren ähnlichen Arbeiten *das volle Formensystem*, welches zu f gehört, aufgestellt hatte. Weitere hierauf bezügliche Mittheilungen und insbesondere die unten mitzutheilenden Schlussformeln legte ich im September 1877 der *Naturforscherversammlung in München* vor.

Hr. Klein hatte inzwischen die Darstellung seiner Untersuchungen beendet, welche im zwölften Bande dieser Annalen*) veröffentlicht ist und die ich im Folgenden als bekannt voraussetzen werde. Wir haben seitdem die von mir gefundenen Resultate wiederholt und eingehend durchgesprochen, und so ist die Darstellung entstanden, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum vorlege. Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades erscheint jetzt als blosse Anwendung ge-

*) Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder, p. 501 ff.

wisser Aufgaben, die man hinsichtlich der Ikosaedersubstitutionen stellen und erledigen kann.

Die principielle Durchführung dieser Aufgaben, wie ich sie im ersten und zweiten Abschnitte des Folgenden gebe, dürfte an meiner Arbeit das Wichtigste sein, weil sie am meisten über Bekanntes hinausführt. Aber ich möchte hier insbesondere auf den dritten Abschnitt verweisen. Es sind dort die Formeln, deren man bei der Auflösung der Gleichungen fünften Grades bedarf, so knapp zusammengezogen, dass einer unmittelbaren numerischen Verwerthung derselben kein Hinderniss mehr im Wege steht. Eben Diess vermisste ich seither an der Hermite'schen wie an der Kronecker-Brioschi'schen Lösung der Gleichungen fünften Grades; an eine praktische Verwendbarkeit derselben konnte man wegen der Länge der nur verlangten und nicht geleisteten Eliminationen nicht denken.

Abschnitt I.

Die zusammengehörigen Ikosaedersubstitutionen.

§ 1.

Formulirung des Problems.

Es ist bekannt, dass das *Ikosaeder:*

$$(1) \qquad \gamma_1 = y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10})$$

sowie seine Hesse'sche Form:

$$(2) \qquad \gamma_1 = (y_1^{20} + y_2^{20}) + 228 (y_1^5 y_2^{15} - y_1^{15} y_2^5) + 494\, y_1^{10} y_2^{10}$$

und die Functionaldeterminante beider:

$$(3) \quad \gamma_3 = (y_1^{30} + y_2^{30}) + 522 (y_1^{25} y_2^5 - y_1^5 y_2^{25}) - 10005 (y_1^{20} y_2^{10} + y_1^{10} y_2^{20})$$

die Eigenschaft besitzen, durch 120 binäre lineare Substitutionen von der Determinante Eins in sich überzugehen. Diese sog. *Ikosaedersubstitutionen* sind durch folgende Tabelle gegeben; sie verwandeln y_1, y_2 bez. in:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \pm \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_1 , & \pm \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_2 , \\ \mp \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 , & \pm \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 , \\ \dfrac{\pm \varepsilon^{\frac{\mu}{2}} \left((\varepsilon + \varepsilon^4) \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 + \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 \right)}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} , & \pm \dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}} \left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 - (\varepsilon + \varepsilon^4) \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 \right)}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} , \\ \dfrac{\mp \varepsilon^{\frac{\mu}{2}} \left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 - (\varepsilon + \varepsilon^4) \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 \right)}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} , & \pm \dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}} \left((\varepsilon + \varepsilon^4) \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} y_1 + \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} y_2 \right)}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} , \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4 ; \quad \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right].} \end{array} \right.$$

Zwischen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ besteht die Relation:

$$\gamma_3^2 = \gamma_2^3 + 12^3 \gamma_1^5. \tag{5}$$

Zugleich sind $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in gewissem, später immer festzuhaltendem Sinne die *einzigen* Ausdrücke, welche durch die Ikosaedersubstitutionen in sich übergehen. Alle ganzen Functionen von y_1, y_2 nämlich, die bei den Ikosaedersubstitutionen ungeändert bleiben, sind *ganze Functionen* von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Ich werde das in der Art ausdrücken, dass ich sage: *die Formen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bilden das volle System dieser Functionen.*

Die durch diese Angaben beantwortete Fragestellung kann man nun einmal in der Weise erweitern, dass man statt der einen Reihe Veränderlicher y_1, y_2 deren mehrere nimmt: y_1, y_2; y_1', y_2' etc. Diese Veränderlichen sollen gleichzeitig den Ikosaedersubstitutionen (4) unterworfen werden; man sucht alle ganzen Functionen von y_1, y_2; $y_1', y_2' \cdots$, welche bei diesen Substitutionen ungeändert bleiben. Die so erweiterte Fragestellung führt im Falle zweier Reihen von Variablen insbesondere zu denjenigen Ausdrücken, mit denen sich die Theorie der Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades beschäftigt.

Aber man kann die Erweiterung in einer anderen Richtung suchen. Die Substitutionen (5) bleiben in ihrer Gesammtheit ungeändert, wenn man statt ε eine andere complexe fünfte Einheitswurzel setzt. Ist diese neue Einheitswurzel ε^4, so geht das neue Substitutionssystem in das alte über, sobald man statt y_1, y_2 einträgt $-y_2, y_1$. Ist sie dagegen ε^2 oder ε^3, so erhält man Systeme von Substitutionen, die (unter einander in demselben Sinne verwandt) nicht mehr mit dem ursprünglichen Systeme durch eine lineare Umformung der Veränderlichen zur Deckung gebracht werden können. Ich will nun annehmen, dass y_1, y_2 nach wie vor den Substitutionen (4) unterworfen werden, dass man aber gleichzeitig neue Variable x_1, x_2 durch diejenigen Substitutionen transformirt, welche aus (4) entstehen, wenn man ε durch ε^2 ersetzt. Die Werthe, in welche x_1, x_2 der Reihe nach übergehen, lauten also folgendermassen:

$$\left\{\begin{array}{ll} \pm\, \varepsilon^{\nu} x_1, & \pm\, \varepsilon^{-\nu} x_2, \\ \mp\, \varepsilon^{\nu} x_2, & \pm\, \varepsilon^{-\nu} x_1, \\ \pm \dfrac{\varepsilon^{\mu}\left((\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} x_1 + \varepsilon^{\nu} x_2\right)}{\varepsilon^4-\varepsilon}, & \pm \dfrac{\varepsilon^{-\mu}\left(\varepsilon^{-\nu} x_1 - (\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{\nu} x_2\right)}{\varepsilon^4-\varepsilon}, \\ \pm \dfrac{\varepsilon^{\mu}\left(\varepsilon^{-\nu} x_1 - (\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{\nu} x_2\right)}{\varepsilon^4-\varepsilon}, & \pm \dfrac{\varepsilon^{-\mu}\left((\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} x_1 + \varepsilon^{\nu} x_2\right)}{\varepsilon^4-\varepsilon}. \end{array}\right. \tag{6}$$

Ich frage nun nach solchen homogenen ganzen Functionen von y_1, y_2 und x_1, x_2, welche ungeändert bleiben, wenn man gleichzeitig auf y_1, y_2 die Substitutionen (4) und auf x_1, x_2 die Substitutionen (6) an-

wendet. Dieses ist das Problem, mit dem ich mich im gegenwärtigen Abschnitte beschäftigen werde. Es handelt sich wieder um Aufstellung eines *vollen Systems*, durch dessen Formen sich alle anderen ganz ausdrücken lassen.

Wenn man in (4) und (6) gleichzeitig ε in ε^2 verwandelt, so erhält man aus (4) diejenigen Substitutionen, denen x_1, x_2, und aus (6) diejenigen Substitutionen, denen $-y_2$, y_1 unterworfen werden. Daher hat man folgenden Satz:

Aus einer Function der gesuchten Eigenschaft erhält man, allgemein zu reden, eine neue, wenn man y_1, y_2, x_1, x_2 *bez. durch* x_1, x_2, $-y_2$, y_1 *ersetzt.*

Ich will diese Operation fortan einfach als *Vertauschung von x und y* bezeichnen.

Andererseits macht man die Bemerkung, dass selbstverständlicherweise zu den gesuchten Functionen die Formen γ_1, γ_2, γ_3 gehören, sowie diejenigen Functionen γ_1', γ_2', γ_3', welche aus ihnen durch Vertauschung von x und y entstehen. Jede Function, welche blos die y enthält, muss sich auf γ_1, γ_2, γ_3 zusammensetzen lassen; jede Function, welche blos die x enthält, aus γ_1', γ_2', γ_3'. Allgemeiner: Wenn eine Function der gesuchten Art einen Factor enthält, der nur von den y oder von den x abhängt, so lässt sich von ihr immer eine ganze Function von γ_1, γ_2, γ_3 resp. von γ_1', γ_2', γ_3' abtrennen. Denn aus dem betr. Factor entsteht durch die Substitutionen (4) oder (6) eine solche ganze Function. Enthält also z. B. eine Function den Factor y_2, so enthält sie ohne Weiteres den Factor γ_1, etc.

Diese letzte Bemerkung wird uns weiterhin von dem allergrössten Vortheile sein; sie bildet das wesentliche Reductionsprincip, dessen ich mich zur Aufstellung des vollen Systems bediene. Ich werde die gesuchten Functionen allemal nach fallenden Potenzen von y_1, nach steigenden von y_2 ordnen. Enthält dann das *Anfangsglied* bereits y_2^2, so wird sich γ_1^2 als Factor von der Function abtrennen. Alle Functionen daher, die wir im Systeme aufzuzählen haben, sind bereits durch ihr Anfangsglied charakterisirt. Denn die Differenz zweier Functionen mit demselben Anfangsglied ist durch γ_1 theilbar und also die eine Function durch die andere und Functionen niederer Ordnung ausdrückbar.

§ 2.

Die Form f.

Ich beginne nunmehr die Untersuchung in der Weise, dass ich zunächst diejenige unter den verlangten Formen aufstelle, welche in den x und y zugleich vom niedersten Grade ist. Zu dem Zwecke bemerke ich, dass sich die 120 Paare zusammengehöriger Ikosaeder-

substitutionen aus denjenigen 3 Substitutionen zusammensetzen lassen, welche die Variablen $y_1, y_2; x_1, x_2$ in die Werthsysteme überführen:

$$\text{(I.)} \qquad -y_2,\ y_1, \qquad\qquad -x_2,\ x_1,$$

$$\text{(II.)} \qquad \varepsilon y_1,\ \varepsilon^4 y_2, \qquad\qquad \varepsilon^2 x_1,\ \varepsilon^3 x_2,$$

$$\text{(III.)} \quad \frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)y_1+y_2}{\varepsilon^2-\varepsilon^3},\ \frac{y_1-(\varepsilon+\varepsilon^4)y_2}{\varepsilon^2-\varepsilon^3},\ \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^3)x_1+x_2}{\varepsilon^4-\varepsilon},\ \frac{x_1-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)x_2}{\varepsilon^4-\varepsilon}.$$

Man suche nun vorab solche Functionen von x, y, welche bei den Substitutionen (I.), (II.) ungeändert bleiben, und nehme ihren Grad in den x und ihren Grad in den y möglichst klein an. Eine sehr leichte Analyse zeigt*), dass mindestens einer der beiden Grade die Zahl 3 erreichen muss, und, wenn keiner der beiden Grade diese Zahl übersteigen soll, so ergeben sich folgende drei Möglichkeiten:

$$x_1^3 y_2 - x_2^3 y_1,$$
$$x_2 y_2^3 - x_1 y_1^3,$$
$$x_1^3 y_1 y_2^2 + x_2^3 y_1^2 y_2 + c(x_1^2 x_2 y_1^3 - x_1 x_2^2 y_2^3).$$

Wendet man jetzt die Substitution (III.) an, so ändern sich die beiden ersten dieser Formen; die letzte aber bleibt in der That ungeändert, sobald wir die noch unbestimmte Constante $c = 1$ nehmen. *Daher ist die von uns gesuchte Form niedrigsten Grades in den x und den y, nach Potenzen von y geordnet, die folgende:*

$$f = y_1^3 x_1^2 x_2 + y_1^2 y_2 x_2^3 + y_1 y_2^2 x_1^3 - y_2^3 x_1 x_2^2. \tag{7}$$

§ 3.

Einführung der Invariantentheorie.

Ich werde nun eine grosse Anzahl der von uns gesuchten Formen, und, wie sich bald zeigen wird, *alle* hier in Betracht kommenden Formen durch Processe der Invariantentheorie ableiten. Man betrachte die soeben aufgestellte Form f als eine binäre Grundform mit zwei Reihen Veränderlicher y_1, y_2 und x_1, x_2, die *unabhängig von einander* linearen Transformationen unterworfen werden mögen. *Jede Covariante, welche f unter dieser Voraussetzung besitzt, ist eine der von uns gesuchten Functionen.* Denn macht man bei y_1, y_2 und x_1, x_2 solche Substitutionen von der Determinante Eins, welche f in sich überführen, so muss auch die Covariante in sich übergehen; die Covarianten bleiben also in der That ungeändert, wenn man auf die y die Substitutionen (4) und gleichzeitig auf die (x) die Substitutionen (6) anwendet.

---

*) Auf ähnliche Weise kann man alle einfacheren Formen des später aufzustellenden Systems finden.

Doppeltbinäre Formen, bei welchen die beiden in Betracht kommenden Reihen von Variablen, x_1, x_2 und y_1, y_2, unabhängig von einander linearen Transformationen unterworfen werden, sind bisher kaum betrachtet worden; ich muss daher kurz angeben, wie man bei ihnen Covarianten bildet. Es geschieht dies, wie bei den Formen mit nur einer Reihe von Variablen, am zweckmässigsten durch den *Ueberschiebungsprocess.*

Es seien zwei Formen gegeben, die ich symbolisch mit:

$$F = a_x^k \alpha_y^l, \qquad \Phi = b_x^m \beta_y^n$$

bezeichnen will. So kann man λ-mal in Bezug auf die x und μ-mal in Bezug auf die y überschieben. Dann entsteht, was ich mit $(F, \Phi)_{\lambda,\mu}$ bezeichne und symbolisch folgendermassen definirt ist:

$$(F, \Phi)_{\lambda,\mu} = (ab)^\lambda a_x^{k-\lambda} b_x^{m-\lambda} (\alpha\beta)^\mu \alpha_y^{l-\mu} \beta_y^{n-\mu}.$$

Zur Berechnung einer solchen Ueberschiebung bediene man sich folgender Regeln.

Zunächst hat man den Satz: Die Ueberschiebungen von Summen sind Summen von Ueberschiebungen:

$$(A+B, C+D)_{\lambda,\mu} = (A, C)_{\lambda,\mu} + (A, D)_{\lambda,\mu} + (B, C)_{\lambda,\mu} + (B, D)_{\lambda,\mu}.$$

Ist also:

$$F = \sum c_{r,s}\, x_1^{k-r} x_2^r y_1^{l-s} y_2^s,$$
$$\Phi = \sum b_{\varrho,\sigma}\, x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho y_1^{n-\sigma} y_2^\sigma,$$

so hat man:

$$(F, \Phi)_{\lambda,\mu} = \sum c_{r,s}\, b_{\varrho,\sigma} (x_1^{k-r} x_2^r, x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_\lambda (y_1^{l-s} y_2^s, y_1^{n-\sigma} y_2^\sigma)_\mu.$$

Die hier rechter Hand auftretenden einfachen Ueberschiebungen werden folgendermassen ausgewerthet. Vor allen Dingen ist

$$(x_1^{k-r} x_2^r, x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_\lambda$$

bis auf einen numerischen Factor gleich:

$$x_1^{k+m-r-\varrho-\lambda} x_2^{r+\varrho-\lambda},$$

und dieser numerische Factor berechnet sich, indem man die Functionen $x_1^{k-r} x_2^r$, $x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho$ λ-mal nach ξ polarisirt und die so entstehenden Polaren λ-mal nach ξ überschiebt:

$$(x_1^{k-r} x_2^r, x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_\lambda = \left[(x_1^{k-r} x_2^r)_{\xi\lambda}, (x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_{\xi\lambda}\right]_{\lambda(\xi)}.$$

Insbesondere hat man folgende Regeln:

1) Die Ueberschiebungen $(x_1^{k-r} x_2^r, x_1^{m-\varrho} x_2^\varrho)_\lambda$ verschwinden identisch, wenn die Summe der kleineren der Zahlen $k-r$, ϱ und der kleineren der Zahlen r, $m-\varrho$ kleiner als λ ist.

2) Die Theilüberschiebungen $(\xi_1^{\lambda-p}\xi_2^p,\ \xi_1^{\lambda-q}\xi_2^q)_\lambda$ haben für $p+q=\lambda$ den Werth $\frac{(-1)^p}{\binom{\lambda}{p}}$, und sie verschwinden identisch, sobald $p+q \gtrless \lambda$.

3) Wenn $\lambda = 1$ ist, so hat man einfach:

$$(x_1^{k-r}x_2^r,\ x_1^{m-\varrho}x_2^\varrho)_1 = \begin{vmatrix} k-r & m-\varrho \\ r & \varrho \end{vmatrix} \cdot \frac{x_1^{m+k-r-\varrho-1}x_2^{r+\varrho-1}}{km}.$$

§ 4.

Die einfachsten Covarianten von f.

Wendet man diese Regeln auf die Form f an, so erhält man zuvörderst folgende zwei Formen, welche, wie f, gleichen Grades in den x und y sind:

$$(8)\quad \varphi = \tfrac{4}{5}(f,f)_{1,1} = y_1^4x_1x_2^3 - y_1^3y_2x_1^4 - 3y_1^2y_2^2x_1^2x_2^2 + y_1y_2^3x_2^4 + y_2^4x_1^3x_2,$$

$$(9)\quad \psi = 12(f,\varphi)_{1,1} = y_1^5(x_1^5+x_2^5) - 10y_1^4y_2x_1^3x_2^2 + 10y_1^3y_2^2x_1x_2^4 + 10y_1^2y_2^3x_1^4x_2 + 10y_1y_2^4x_1^2x_2^3 + y_2^5(-x_1^5+x_2^5).$$

Man betrachte ferner f einen Augenblick als eine Form, welche die x allein enthält, also als binäre cubische Grundform im gewöhnlichen Sinne. So hat man die Covariante:

$$(10)\quad \tau = \tfrac{9}{2}(f,f)_{2,0} = x_1^2y_1^6 - 3x_2^2y_1^5y_2 - 10x_1x_2y_1^3y_2^3 + 3x_1^2y_1y_2^5 + x_2^2y_2^6,$$

die Functionaldeterminante:

$$(11)\quad (f,\tau)_{1,0} = \tfrac{1}{3}\{-x_1^3y_1^9 - 9x_1x_2^2y_1^8y_2 - 12x_1^2x_2y_1^6y_2^3 + 18x_2^3y_1^5y_2^4 - 18x_1^3y_1^4y_2^5 - 12x_1x_2^2y_1^3y_2^6 + 9x_1^2x_2y_1y_2^8 - x_2^3y_2^9\},$$

und die Invariante:

$$(12)\qquad (\tau,\tau)_{2,0} = -6\gamma_1.$$

Auf solche Weise kommt man, wie nebenbei bemerkt sei, von f ausgehend, zum Ikosaeder γ_1 zurück.

Auf analoge Weise (oder durch Vertauschung von x und y) berechnet sich:

$$(13)\quad \tau' = \tfrac{9}{2}(f,f)_{0,2} = y_1^2(x_2^6 - 3x_1^5x_2) + 10x_1^3x_2^3y_1y_2 + y_2^2(x_1^6 + 3x_1x_2^5),$$

$$(14)\quad (f,\tau')_{0,1} = \tfrac{1}{3}\{y_1^3(18x_1^5x_2^4 - x_2^9) + 3y_1^2y_2(3x_1^8x_2 + 4x_1^3x_2^6) + 3y_1y_2^2(-4x_1^6x_2^3 + 3x_1x_2^8) + y_2^3(x_1^9 + 18x_1^4x_2^5)\},$$

$$(15)\quad (\tau',\tau)_{0,2} = -6\gamma_1'.$$

Ich bilde ferner die Functionaldeterminanten:

$$(16)\quad (f,\varphi)_{1,0}=\tfrac{1}{12}\{5x_1^2x_2^3y_1^7+(4x_1^5-3x_2^5)y_1^6y_2+15x_1^3x_2^2y_1^5y_2^2 +25x_1x_2^4y_1^4y_2^3-25x_1^4x_2y_1^3y_2^4 +15x_1^2x_2^3y_1^2y_2^5-(4x_2^5+3x_1^5)y_1y_2^6-5x_1^3x_2^2y_2^7\},$$

$$(17)\quad (f,\psi)_{1,0}=\tfrac{1}{3}\{(2x_1x_2^5-x_1^6)y_1^8-5x_1^4x_2^2y_1^7y_2 +35x_1^2x_2^4y_1^6y_2^2-(14x_1^5x_2+7x_2^6)y_1^5y_2^3-(14x_1x_2^5-7x_1^6)y_1^3y_2^5 +35x_1^4x_2^2y_1^2y_2^6+5x_1^2x_2^4y_1y_2^7-(x_2^6+2x_1^5x_2)y_2^8\},$$

$$(18)\quad (\varphi,\varphi)_{2,0}=-\tfrac{1}{8}\{x_2^4y_1^8+8x_1^3x_2y_1^7y_2-4x_1x_2^3y_1^6y_2^2-8x_1^4y_1^5y_2^3+30x_1^2x_2^2y_1^4y_2^4 +8x_2^4y_1^3y_2^5+4x_1^3x_2y_1^2y_2^6+8x_1x_2^3y_1y_2^7+x_1^4y_2^8\},$$

und analog:

$$(19)\quad (f,\varphi)_{0,1}=\tfrac{1}{12}\{-y_1^5(4x_1x_2^6+3x_1^6x_2)-25y_1^4y_2x_1^4x_2^3 +y_1^3y_2^2(5x_1^7+15x_1^2x_2^5)-y_1^2y_2^3(15x_1^5x_2^2-5x_2^7)-25x_1^3x_2^4y_1y_2^4 +y_2^5(3x_1x_2^6-4x_1^6x_2)\},$$

$$(20)\quad (f,\psi)_{0,1}=\tfrac{1}{3}\{y_1^6(-x_2^8-7x_1^5x_2^3)+y_1^5y_2(-2x_1^8+14x_1^3x_2^5) +y_1^4y_2^2(5x_1x_2^7+35x_1^6x_2^2)+y_1^2y_2^4(-5x_1^7x_2+35x_1^2x_2^6) +y_1y_2^5(2x_2^8+14x_1^5x_2^3)+y_2^6(-x_1^8+7x_1^3x_2^5)\},$$

$$(21)\quad (\varphi,\varphi)_{0,2}=-\tfrac{1}{8}\{y_1^4(x_1^8+8x_1^3x_2^5)+4y_1^3y_2(x_1^6x_2^2-2x_1x_2^7)+30x_1^4x_2^4y_1^2y_2^2 -4y_1y_2^3(5x_1^7x_2+x_1^6x_2^2)+y_2^4(-8x_1^5x_2^3+x_2^8)\}.$$

Ich berechne endlich die dritte Ueberschiebung von f und φ hinsichtlich der x:

$$(22)\quad (f,\varphi)_{3,0}=\tfrac{1}{4}\Theta=\tfrac{1}{4}\{x_2y_1^7-7x_1y_1^5y_2^2-7x_2y_1^2y_2^5-x_1y_2^7\},$$

und die dritte Ueberschiebung derselben Formen hinsichtlich der y:

$$(23)\quad (f,\varphi)_{0,3}=\tfrac{1}{4}\Theta'=\tfrac{1}{4}\{y_1(x_1^7-7x_1^2x_2^5)+y_2(x_2^7+7x_1^5x_2^2)\}.$$

So habe ich diejenigen Formen gewonnen, welche sich als die einfachsten erweisen werden, insofern sich aus ihnen durch wenige Rechnung das von uns gesuchte volle System zusammensetzen lässt. Ich will die zehn Formen:

$$f,\ \varphi,\ \psi,\ \tau,\ (f,\tau)_{1,0},\ (f,\varphi)_{1,0},\ (f,\psi)_{1,0},\ \gamma_1,\ (\varphi,\varphi)_{2,0},\ \Theta$$

als *Formen* U, die entsprechenden:

$$f,\ \varphi,\ \psi,\ \tau',\ (f,\tau')_{0,1},\ (f,\varphi)_{0,1},\ (f,\psi)_{0,1},\ \gamma_1',\ (\varphi,\varphi)_{0,2},\ \Theta'$$

als *Formen* U' bezeichnen. Unter den Formen U beachte man besonders das Θ, unter den U' das Θ', insofern Θ und Θ' in der einen Reihe der Variablen linear sind. —

Unter den einfachen Ueberschiebungen von f, φ, ψ sind vorstehend folgende nicht aufgezählt:

$$(f, \varphi)_{2,0}, \quad (f, \psi)_{2,0}, \quad (\varphi, \psi)_{1,0}, \quad (\varphi, \psi)_{2,0}, \quad (\psi, \psi)_{2,0}$$

(sowie die entsprechenden, welche sich durch Vertauschung von x und y ergeben). In der That sind diese Formen reducibel; die Betrachtung der Anfangsglieder zeigt, dass sie folgende Werthe haben:

$$0, \quad -\tfrac{8}{3}(\varphi, \varphi)_{2,0}, \quad \tfrac{1}{4}\Theta\tau', \quad \tfrac{1}{2}f\tau, \quad 2\varphi\tau.$$

§ 5.

Die Form Θ.

Ich werde jetzt folgenden Satz beweisen:

Jede ganze Function der U, deren Grad in den y um mindestens 8 Einheiten grösser ist, als der Grad in den x, lässt sich in der Form darstellen:

$$(A, \Theta)_{1,0} + B \cdot \Theta,$$

wo A eine ganze Function der U und der Ueberschiebungen $(U, \Theta^s)_{s,0}$ bedeutet. Ausgenommen ist nur die Form γ_1.

In der That, wenn von γ_1 abgesehen wird, muss jedes Glied einer solchen ganzen Function der U entweder ein Product der Functionaldeterminanten

$$(f, \tau)_{1,0}, \quad (f, \varphi)_{1,0}, \quad (f, \psi)_{1,0}$$

oder einen der folgenden Doppelfactoren enthalten:

$$\tau^2, \quad \tau\cdot(f, \tau)_{1,0}, \quad \tau\cdot(\varphi, \varphi)_{2,0}, \quad (f, \tau)_{1,0}\cdot(\varphi, \varphi)_{2,0}, \quad ((\varphi, \varphi)_{2,0})^2,$$

$$\gamma_1 f, \quad \gamma_1\varphi, \quad \gamma_1\psi, \quad \gamma_1\tau, \quad \gamma_1^2, \quad \gamma_1(f, \tau)_{1,0}, \quad \gamma_1(f, \varphi)_{1,0}, \quad \gamma_1(f, \psi)_{1,0}.$$

Aber die Producte der Functionaldeterminanten sind ohne Weiteres auf niedere Bildungen zurückführbar und die aufgezählten Doppelfactoren lassen sich (durch Beachtung der Anfangsglieder) in folgende Ausdrücke umsetzen, welche sich unmittelbar in der Gestalt $(A, \Theta)_{1,0} + B\Theta$ schreiben lassen:

$$(\psi, \Theta)_{1,0}; \quad (f_1(\psi, \Theta)_{1,0})_{1,0}; \quad \tfrac{2}{3}f(\varphi, \Theta)_{1,0} - \tfrac{3}{4}\Theta(f, \varphi)_{1,0};$$

$$\tfrac{3}{4}(f, \varphi_{1,0}(f, \Theta)_{1,0} - \tfrac{1}{6}\varphi\tau\Theta; \quad \tfrac{1}{128}f^2(f, \Theta)_{1,0} + \tfrac{1}{64}\Theta^2\tau';$$

$$-\tfrac{4}{3}((\varphi, \varphi)_{2,0}, \Theta)_{1,0}; \quad -\tfrac{1}{8}f(\tau, \Theta)_{1,0} - \tfrac{3}{8}\Theta(f, \tau)_{1,0};$$

$$-\varphi(\tau, \Theta)_{1,0} + f\Theta^2; \quad -(\varphi, \Theta^2)_{2,0}; \quad \tfrac{1}{8}(f, \Theta^3)_{3,0};$$

$$-(f, (\varphi, \Theta^2)_{2,0})_{1,0}; \quad (f, -\tfrac{1}{8}f(\tau, \Theta)_{1,0} - \tfrac{3}{8}\Theta(f, \tau)_{1,0})_{1,0};$$

$$(f, -\varphi(\tau, \Theta)_{1,0} + f\Theta^2)_{1,0}.$$

Das ausgesprochene Theorem ist also bewiesen.

§ 6.

Umgrenzung des vollen Formensystems.

Ich behaupte nun:

Jede Function V der x, y, welche sich bei den zusammengehörigen Ikosaedersubstitutionen nicht ändert, ist eine ganze Function der Formen:

$$U, \quad U', \quad (U, \Theta^s)_{s,0}, \quad (U', \Theta'^s)_{0,s}.$$

Der Beweis gestaltet sich folgendermassen einfach. Es sei der Grad von V in den x gleich μ, der Grad in den y gleich ν, und man habe zunächst $\nu \geqq \mu$. So werde ich sogleich zeigen, dass V in folgende Gestalt gesetzt werden kann:

$$V = \mathsf{A} + \mathsf{B} \cdot \Theta,$$

wo A eine ganze Function der U und $(U, \Theta^s)_{s,0}$ ist, während B weiter zu untersuchen ist. Aber B ist dann selbst eine Function, welche sich bei den Ikosaedersubstitutionen nicht ändert; es ist also, wenn sein Grad in den y grösser als sein Grad in den x oder dem letzteren gleich ist, derselben Darstellung fähig; im umgekehrten Falle einer analogen Darstellung durch die U', Θ'. Da nun der Grad von B in den x und y kleiner ist, als der Grad von V, so erhält man offenbar, so vorwärts schliessend, das ausgesprochene Theorem, w. z. b.

Um jetzt die Gleichung:

$$V = \mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$$

zu beweisen, betrachte ich die Ueberschiebungen von V mit Potenzen von Θ:

$$V, \quad (V, \Theta)_{1,0}, \quad (V, \Theta^2)_{2,0}, \quad \cdots\cdots \quad (V, \Theta^\mu)_{\mu,0}.$$

Von diesen ist die letzte sicher in der Form

$$\mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$$

darstellbar. Denn sie enthält nur noch die y und ist also eine ganze Function der γ_1, γ_2, γ_3, von denen γ_1 selbst zu den U gehört, während sich γ_2, γ_3 folgendermassen definiren lassen:

$$\gamma_2 = (\tau, \Theta^2)_{2,0}, \tag{24}$$

$$\gamma_3 = -3\,((f, \tau)_{1,0}, \Theta^3)_{3,0}. \tag{25}$$

Es ist also:

$$(V, \Theta^\mu)_{\mu,0} = \mathsf{A}$$

und um so mehr

$$= \mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta.$$

Jetzt sei $(V, \Theta^\lambda)_{\lambda,0}$ unter der Reihe der angegebenen Ueberschiebungen die *erste*, welche sich in der Gestalt $\mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$ darstellen lässt; ich will zeigen, dass λ gleich Null sein muss. Hierzu dient der Satz des vorigen Paragraphen.

Wäre nämlich in
$$(V, \Theta^\lambda)_{\lambda,0} = \mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$$
$\lambda > 0$, so wäre in A der Grad in den y um mindestens 8 Einheiten grösser als der Grad in den x; mithin wäre, nach dem vorigen Paragraphen, A entweder γ_1 oder es liesse sich in die Form setzen $\mathsf{A} = (A, \Theta)_{1,0} + B\Theta$. Aber A kann nicht γ_1 sein. Man betrachte, um dies einzusehen, einen Augenblick die in den x lineare Form $(\tau, \Theta)_{1,0}$. Wäre $(V, \Theta^\lambda)_{\lambda,0}$ gleich γ_1, so würde $((V, \Theta^{\lambda-1})_{\lambda-1,0}, (\tau, \Theta)_{1,0})$ eine Form von dem Grade 18 in den y allein sein, also verschwinden. Das würde heissen, dass $\dfrac{(\tau, \Theta)_{1,0}}{(V, \Theta^{\lambda-1})_{\lambda-1,0}}$ nur von den y abhängig ist, was absurd ist, da man $(\tau, \Theta)_{1,0}$ nicht in Factoren zerfällen kann*). Also ist $\mathsf{A} = (A, \Theta)_{1,0} + B\Theta$ und mithin:
$$(V, \Theta^\lambda)_{\lambda,0} = (A, \Theta)_{1,0} + (B + \mathsf{B})\Theta.$$
Schiebt man hier beiderseits $(\mu - \lambda)$-mal nach Θ über, so folgt:
$$(V, \Theta^\mu)_{\mu,0} = (A, \Theta^{\mu-\lambda+1})_{\mu-\lambda+1,0}.$$
Das heisst: die Differenz $(V, \Theta)^{\lambda-1})_{\lambda-1,0} - A$ ist durch Θ theilbar, im Widerspruche mit unserer Voraussetzung, der zufolge $(V, \Theta^\lambda)_{\lambda,0}$ die niedrigste Ueberschiebung war, welche sich in der Gestalt $\mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$ darstellen liess. — Also ist $\lambda = 0$ und V selbst $= \mathsf{A} + \mathsf{B}\Theta$, w. z. b.

§ 7.

Aufstellung des Formensystems.

Man erhält jetzt das gesuchte Formensystem, wenn man unter den U, U', $(U, \Theta^s)_{s,0}$, $(U', \Theta'^s)_{0,s}$ nur noch diejenigen ausschliesst, die sich durch niedere ausdrücken lassen (die *reducibel* sind, wie ich gewöhnlich sage). Die Betrachtung der Anfangsglieder zeigt**), dass folgende und nur folgende Formen reducibel sind:

für jedes s: $(\psi, \Theta^s)_{s,0}$; $((\varphi, \varphi)_{2,0}, \Theta^s)_{s,0}$; $((f, \psi)_{1,0}, \Theta^s)_{s,0}$;

für $s > 1$: $(\varphi, \Theta^s)_{s,0}$; $((f, \varphi)_{1,0}, \Theta^s)_{s,0}$,

sowie die entsprechenden, die sich durch Vertauschung von x und y ergeben.

Sonach bleiben die folgenden 36 Formen übrig, welche das von uns gesuchte volle System bilden:

---

*) Diese auch im Folgenden sehr wichtige Form lautet ausgerechnet:
$(\tau, \Theta)_{1,0} = x_1 y_1^{13} - 26 x_2 y_1^{10} y_2^3 - 39\, x_1 y_1^8 y_2^5 + 39\, x_2 y_1^5 y_2^8 - 26\, x_1 y_1^3 y_2^{10} + x_2 y_2^{13}$.

**) Man benutze die Relationen:
$$(\varphi, \Theta^2)_{2,0} = -\gamma_1 \tau,$$
$$(\psi, \Theta)_{1,0} = \tau^2.$$

Formensystem für

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1								Θ'		
2							τ'			
3				f						$(f,\tau')_{0,1}$
4					φ				$(\varphi,\varphi)_{0,2}$	
5						ψ		$(f,\varphi)_{0,1}$		
6			τ						$(f,\psi)_{0,1}$	
7		Θ				$(f,\varphi)_{1,0}$				
8					$(\varphi,\varphi)_{2,0}$		$(f,\psi)_{1,0}$			
9				$(f,\tau)_{1,0}$						
10			$(f,\Theta)_{1,0}$							
11				$(\varphi,\Theta)_{1,0}$						
12	γ_1									
13		$(\tau,\Theta)_{1,0}$								
14					$((f,\varphi)_{1,0},\Theta)_{1,0}$					
16			$((f,\tau)_{1,0},\Theta)_{1,0}$							
17		$(f,\Theta^2)_{2,0}$								
20	γ_2									
23		$((f,\tau)_{1,0},\Theta^2)_{2,0}$								
30	γ_3									

In der ersten Horizontalreihe sind die Grade angegeben, welche die Formen in den x besitzen; die Grade in den y stehen in der ersten Verticalreihe.

Wie man sieht, sind alle Formen zugleich Covarianten von f. Da aber umgekehrt jede Covariante von f nothwendig zu den von uns betrachteten Formen gehört, so giebt die vorstehende Tabelle zugleich *das volle System der Covarianten, welches die Form f besitzt.*

§ 8.

Relationen zwischen den Formen des Systems.

Jede ganze Function V der x, y, welche sich bei den Ikosaedersubstitutionen nicht ändert, ist eine ganze Function der Formen des Systems. Aber man kann die Art dieser Darstellung noch einschränken, wenn man die Betrachtungen weiter verfolgt, durch die im § 6. die Vollständigkeit des Systems erschlossen wurde. Ich will dies hier nur in dem besonderen Falle thun, in welchem der Grad in den y von dem Grade in den x höchstens um 6 Einheiten verschieden ist, und zwar sei, wie ich zunächst annehmen will, sofern überhaupt eine Differenz

das Ikosaeder.

10	11	12	13	14	16	17	20	23	30
		γ_1'					γ_2'		γ_3'
			$(\tau', \Theta')_{0,1}$			$(f, \Theta'^2)_{0,2}$		$((f, \tau')_{0,1}, \Theta'^2)_{0,2}$	
$(f, \Theta')_{0,1}$					$((f, \tau')_{0,1}, \Theta')_{0,1}$				
	$(\varphi, \Theta')_{0,1}$								
				$((f, \varphi)_{0,1}, \Theta')_{0,1}$					

besteht, der Grad in den y der grössere. Dann kann man nach § 6. schreiben:

$$V = \mathsf{A} + \mathsf{B} \cdot \Theta,$$

wo A eine ganze Function der U, $(U, \Theta^s)_{s,0}$ bedeutet. Nun ist aber bei allen $(U, \Theta^s)_{s,0}$, wie die vorstehende Tabelle zeigt, der Grad in den y um mehr als 6 Einheiten grösser, als der Grad in den x; die $(U, \Theta^s)_{s,0}$ können also in A nicht auftreten, ebensowenig wie γ_1. Unter den *Producten* solcher U, welche in den x und y verschiedenen Grad haben, kommen aus demselben Grunde höchstens die Producte der Functionaldeterminanten $(f, \varphi)_{1,0}$, $(f, \psi)_{1,0}$, $(f, \tau)_{1,0}$ in Betracht; aber sie sind, wie schon oben bemerkt, reducibel. Daher also haben wir den Satz:

A *enthält neben* f, φ, ψ *nur noch höchstens linear:*

$$\tau, \quad (\varphi, \varphi)_{2,0}, \quad (f, \varphi)_{1,0}, \quad (f, \psi)_{1,0}, \quad (f, \tau)_{1,0}.$$

Untersuchen wir jetzt B. Sein Grad in den y ist nicht grösser als sein Grad in den x, aber höchstens um 6 Einheiten kleiner. B ist daher derselben Darstellung fähig wie V, nur dass die U' an die Stelle der U getreten sind:

$$\mathsf{B} = \mathsf{A}' + \mathsf{B}' \cdot \Theta'.$$

Die Function B' lässt sich wieder wie das ursprüngliche V behandeln, und so weiter fort. Beachtet man jetzt, dass

$$\Theta\Theta' = f\psi - 8\,\varphi^2,$$

so sieht man, dass schliesslich folgende Darstellung von V resultirt:

$$V = P + P' \cdot \Theta.$$

Hier sind P, P' ganze Functionen von f, φ, ψ, welche einige der Functionen

$$\tau, \quad (\varphi, \varphi)_{2,0}, \quad (f, \varphi)_{1,0}, \quad (f, \psi)_{1,0}, \quad (f, \tau)_{1,0},$$

resp. der Functionen

$$\tau', \quad (\varphi, \varphi)_{0,2}, \quad (f, \varphi)_{0,1}, \quad (f, \psi)_{0,1}, \quad (f, \tau')_{0,1},$$

aber diese nur linear enthalten können.

Die analoge Darstellung:

$$V = Q' + Q \cdot \Theta'$$

ergiebt sich natürlich, wenn der Grad von V in den x nicht kleiner als der Grad in den y ist.

Hat V gleichen Grad in den x und y, so lässt es sich sowohl in der einen als in der anderen Form darstellen. Dann ist P, bez. Q' eine Function von f, φ, ψ allein, und P' resp. Q ist nothwendig gleich einer Function von f, φ, ψ, multiplicirt mit $(f, \tau')_{0,1}$ oder $(f, \tau)_{1,0}$. Nun ist:

(26) $$(f, \tau')_{0,1}\Theta + (f, \tau)_{1,0}\Theta' = 9f^2\varphi - \tfrac{1}{3}\psi^2.$$

Führen wir also folgende Bezeichnung ein, die späterhin immer festgehalten werden soll:

(27) $$\Delta = (f, \tau')_{0,1}\Theta - (f, \tau)_{1,0}\Theta',$$

so haben wir folgenden Satz:

Alle Functionen V, welche gleichen Grad in den x und y besitzen, sind ganze Functionen von f, φ, ψ und Δ.

Bei Vertauschung von x und y ändert Δ sein Vorzeichen, während f, φ, ψ ungeändert bleiben. Daher:

Alle Functionen V, welche bei Vertauschung von x und y ungeändert bleiben, sind ganze Functionen von f, φ, ψ allein.

Insbesondere aber ist Δ^2 eine ganze Function von f, φ, ψ; vergl. Formel (30) des folgenden Paragraphen.

§ 9.

Associirte Formen.

Ich behaupte jetzt:

Alle Formen des Systems lassen sich r a t i o n a l darstellen durch folgende fünf Functionen:

$$f, \quad \varphi, \quad \psi, \quad \frac{\tau}{\Theta}, \quad \frac{(f, \tau)_{1,0}}{\Theta} = c,$$

zwischen denen die eine Relation besteht:

$$(28)\qquad Lc^2 - Mc + N = 0.$$

Hier ist:

$$(29)\quad \begin{cases} L = \Theta\Theta' = f\psi - 8\varphi^2, \\ M = (f,\tau)_{1,0}\,\Theta' + (f,\tau')_{0,1}\,\Theta = 9f^2\varphi - \frac{1}{3}\psi^2, \\ 9N = 9(f,\tau)_{1,0}\,(f,\tau')_{0,1} = -27f^4 - 8\varphi^3 + 9f\varphi\psi, \end{cases}$$

und

$$(30)\quad \sqrt{M^2-4LN} = \tfrac{1}{3}\sqrt{\psi^4 - 256\varphi^5 + 320f\varphi^3\psi - 90f^2\varphi\psi^2 - 135f^4\varphi^2 + 108f^5\psi}$$
$$= (f,\tau)_{1,0}\Theta' - (f,\tau')_{0,1}\Theta = \Delta,$$

wo Δ die im vorigen Paragraphen eingeführte Grösse bedeutet.

Zum Beweise betrachte man zunächst die Formel:

$$(31)\qquad \tau^3(f\psi - 8\varphi^2) = \Theta^2(8\varphi^3 - 9f\varphi\psi) - 3\psi^2\Theta(f,\tau)_{1,0},$$

die sich am einfachsten aus den sogleich aufzustellenden Relationen durch Elimination ergiebt. Sie gestattet, wie man sieht, τ und also Θ und $(f,\tau)_{1,0}$ rational durch $f, \varphi, \psi, \frac{\tau}{\Theta}, c$ darzustellen. Berechnen wir ferner $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Man findet (immer durch die Betrachtung geeigneter Anfangsglieder):

$$(32)\qquad \tau^3 = 9((f,\tau)_{1,0})^2 - 27\gamma_1 f^2$$

und diese Formel giebt γ_1. Man hat sodann für γ_2:

$$(33)\qquad \tau\gamma_2 = ((\tau,\Theta)_{1,0})^2 - 3\gamma_1\Theta^2,$$

und für das hier auftretende $(\tau,\Theta)_{1,0}$ folgende zwei Formeln, die ich beide hersetze, da ich sie später benutze:

$$(34)\quad \begin{cases} f\Theta^2 = \varphi(\tau,\Theta)_{1,0} + \gamma_1\psi, \\ f(\tau,\Theta)_{1,0} + 3\Theta(f,\tau)_{1,0} = -8\gamma_1\varphi. \end{cases}$$

Man entnimmt endlich den Werth von γ_3 einer beliebigen der folgenden beiden Formeln:

$$(35)\quad \begin{cases} f\gamma_3 = \Theta(\tau,\Theta)_{1,0}^2 + \gamma_1\Theta^3 - 21\gamma_1^2(f,\tau)_{1,0}, \\ \varphi\gamma_3 = \Theta^3(\tau,\Theta)_{1,0} + 3\gamma_1(f,\tau)_{1,0}(\tau,\Theta)_{1,0} + 30\gamma_1^2 f\Theta. \end{cases}$$

Nehmen wir nun nachstehende Formel für $(\varphi,\varphi)_{2,0}$ hinzu:

$$(36)\qquad 8\tau^2(\varphi,\varphi)_{2,0} + f^2\Theta^2 = \gamma_1(16\varphi^2 - 8f\psi),$$

so gelingt es, die noch übrigen Formen des Systems, bei denen der Grad in den y grösser als der Grad in den x ist:

$$(f,\varphi)_{1,0};\quad (f,\psi)_{1,0};\quad (f,\Theta)_{1,0};\quad (\varphi,\Theta)_{1,0};\quad ((f,\tau)_{1,0},\Theta)_{1,0};$$
$$((f,\varphi)_{1,0},\Theta)_{1,0};\quad (f,\Theta^2)_{2,0};\quad ((f,\tau)_{1,0},\Theta^2)_{2,0},$$

durch blosse Anwendung des Identitätssatzes auszudrücken. Man hat z. B.:

$$(37)\quad \begin{cases} (f,\varphi)_{1,0}\cdot\tau = \varphi(f,\tau)_{1,0} - f(\varphi,\tau)_{1,0}, \text{ und } (\varphi,\tau)_{1,0}, \text{ welches nicht} \\ \qquad\qquad \text{dem Systeme angehört, gleich } -\frac{3}{4}f\Theta, \\ ((f,\tau)_{1,0},\Theta)_{1,0}\cdot f = \Theta\,((f,\tau)_{1,0},f)_{1,0} + (f,\tau)_{1,0}\cdot(f,\Theta)_{1,0} \text{ und} \\ \qquad\qquad ((f,\tau)_{1,0},f)_{1,0} \text{ gleich } -\frac{\tau^2}{9}, \end{cases}$$

und so fort.

Die Formen, deren Grad in den x grösser ist als der Grad in den y, sind ebenfalls sofort erledigt. Denn sie lassen sich, dem Voranstehenden entsprechend, jedenfalls durch f, φ, ψ, τ', Θ', $(f,\tau')_{0,1}$ rational ausdrücken und diese führen auf f, φ, ψ, τ, Θ, $(f,\tau)_{1,0}$ zurück durch die Formeln:

$$(38)\quad \begin{cases} \tau\tau' = 4\varphi^2 - 3f\psi, \\ \Theta\Theta' = f\psi - 8\varphi^2, \\ 9(f,\tau)_{1,0}\,(f,\tau')_{0,1} = -27f^4 - 8\varphi^3 + 9f\varphi\psi, \end{cases}$$

von denen die beiden letzten bereits oben benutzt wurden.

Hiermit ist der Beweis unserer Behauptung erbracht. Fügen wir nun noch zu, dass solche rationale Functionen der Formen des Systems, welche in den x und y denselben Grad haben, in f, φ, ψ, c rational sind. Denn $\frac{\tau}{\Theta}$ ist unter den fünf associirten Formen die einzige, welche in den x und den y nicht denselben Grad hat.

Ein Beispiel hierfür, welches ich später benutze, ist dieses. Man findet aus (32), (33):

$$(39)\quad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} = \frac{\left(\frac{(\tau,\Theta)_{1,0}^2}{\gamma_1^2} - 3\frac{\Theta^2}{\gamma_1}\right)^3}{9\,\frac{((f,\tau)_{1,0})^2}{\gamma_1} - 27f^2},$$

und hier ist rechter Hand vermöge der Formeln (34):

$$(40)\quad \frac{(\tau,\Theta)_{1,0}}{\gamma_1} = -\frac{8f\varphi + 3\psi c}{f^2 + 3c\varphi},$$

$$(41)\quad \frac{\Theta^2}{\gamma_1} = -\frac{8\varphi^2 - f\psi}{f^2 + 3c\varphi},$$

$$(42)\quad 9\,\frac{((f,\tau)_{1,0})^2}{\gamma_1} - 27f^2 = \frac{\Theta^2}{\gamma_1}\cdot\varphi - \frac{(\tau,\Theta)_{1,0}}{\gamma_1}\cdot\psi.$$

Ich füge noch folgende Relation hinzu, die sich aus Gl. (35) ergiebt:

$$(43)\quad \frac{\Theta\gamma_3}{\gamma_1^3} = \frac{\frac{\Theta^4}{\gamma_1^2}\cdot\frac{(\tau,\Theta)_{1,0}}{\gamma_1} + 3c\,\frac{\Theta^2}{\gamma_1}\cdot\frac{(\tau,\Theta)_{1,0}}{\gamma_1} + 30f\,\frac{\Theta^2}{\gamma_1}}{\varphi}.$$

Hier treten rechts neben c, f, φ wieder nur diejenigen Ausdrücke auf, die in (40), (41) berechnet sind.

Abschnitt II.

Tetraedersubstitionen.

§ 1.

Definition der Tetraedersubstitutionen.

In der Gruppe der 120 Ikosaedersubstitutionen giebt es Untergruppen, welche dem *Tetraedertypus* angehören. Eine derselben, mit der wir uns insbesondere beschäftigen wollen*), ist durch nachstehende Formeln gegeben; sie verwandelt y_1, y_2 der Reihe nach in folgende 24 Ausdrücke:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} \pm y_1, & \pm y_2, \\ \mp y_2, & \pm y_1, \\ \pm \dfrac{y_1(\varepsilon^{2\lambda}+\varepsilon^{3\lambda})+y_2}{\varepsilon^{\lambda}-\varepsilon^{4\lambda}}, & \pm \dfrac{y_1-y_2(\varepsilon^{2\lambda}+\varepsilon^{3\lambda})}{\varepsilon^{\lambda}-\varepsilon^{4\lambda}}, \\ \pm \dfrac{y_1(1+\varepsilon^{\lambda})+\varepsilon^{2\lambda}y_2}{1-\varepsilon^{2\lambda}}, & \pm \dfrac{y_1-(\varepsilon^{\lambda}+\varepsilon^{2\lambda})y_2}{1-\varepsilon^{2\lambda}}, \\ \mp \dfrac{y_1-y_2(\varepsilon^{\lambda}+\varepsilon^{2\lambda})}{1-\varepsilon^{2\lambda}}, & \pm \dfrac{y_1(1+\varepsilon^{\lambda})+\varepsilon^{2\lambda}y_2}{1-\varepsilon^{2\lambda}}, \quad [\lambda=1,2,3,4]. \end{array}\right.$$

Ungeändert bleiben bei diesen Substitutionen, wie bekannt, drei Hauptformen, welche in unserem Falle folgende Gestalt annehmen.

$$(2)\quad g_1 = y_1^6+2y_1^5y_2-5y_1^4y_2^2-5y_1^2y_2^4-2y_1y_2^5+y_2^6$$
$$=(y_1^2+y_2^2)(y_1^2-2(\varepsilon+\varepsilon^4)y_1y_2-y_2^2)(y_1^2-2(\varepsilon^2+\varepsilon^3)y_1y_2-y_2^2),$$

$$(3)\quad g_2 = -\tfrac{9}{8}(g_1,g_1)_{0,2} = y_1^8-y_1^7y_2+7y_1^6y_2^2+7y_1^5y_2^3-7y_1^3y_2^5+7y_1^2y_2^6$$
$$+y_1y_2^7+y_2^8 = (y_1^2-y_1y_2(1+\varepsilon)^2-\varepsilon^2y_2^2)(y_1^2-y_1y_2(1+\varepsilon^2)^2-\varepsilon^4y_2^2)$$
$$\cdot(y_1^2-y_1y_2(1+\varepsilon^3)^2-\varepsilon y_2^2)(y_1^2-y_1y_2(1+\varepsilon^4)^2-\varepsilon^3y_2^2),$$

$$(4)\quad g_3=(g_1,g_2)=-11y_1^{12}+84y_1^{11}y_2+66y_1^{10}y_2^2+220y_1^9y_2^3-165y_1^8y_2^4$$
$$+264y_1^7y_2^5+934y_1^6y_2^6-264y_1^5y_2^7-165y_1^4y_2^8-220y_1^3y_2^9$$
$$+66y_1^2y_2^{10}-84y_1y_2^{11}-11y_2^{12}.$$

Zwischen ihnen besteht die Relation:

$$(5)\qquad g_3^2 = 256g_2^3-135g_1^4.$$

Alle anderen ganzen Functionen von y_1, y_2, die bei den Substitutionen (1) ungeändert bleiben, sind ganze Functionen von g_1, g_2, g_3.

Neben den Variablen y_1, y_2 betrachte man jetzt andere Variable

---

*) Die Substitutionen der anderen Tetraedergruppen erhält man, wenn man, unter ν eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3, 4 verstanden, in die Formeln (1) statt y_1, y_2 einträgt $\varepsilon^{\nu}y_1$, $\varepsilon^{4\nu}y_2$ und die so entstehenden Ausdrücke $\varepsilon^{\nu}y_1$, bez. $\varepsilon^{4\nu}y_2$ gleichsetzt.

x_1, x_2. Sie werden denjenigen Substitutionen unterworfen, welche aus (1) entstehen, wenn man ε in ε^2 verwandelt. Dadurch gehen x_1, x_2 der Reihe nach in folgende 24 Ausdrücke über:

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{ll} \pm x_1, & \pm x_2, \\ \mp x_2, & \pm x_1, \\ \pm\dfrac{x_1(\varepsilon^\lambda+\varepsilon^{4\lambda})+x_2}{\varepsilon^{2\lambda}-\varepsilon^{3\lambda}}, & \pm\dfrac{x_1-x_2(\varepsilon^\lambda+\varepsilon^{4\lambda})}{\varepsilon^{2\lambda}-\varepsilon^{3\lambda}}, \\ \pm\dfrac{x_1(1+\varepsilon^{2\lambda})+\varepsilon^{4\lambda}x_2}{1-\varepsilon^{4\lambda}}, & \mp\dfrac{x_1-x_2(\varepsilon^{2\lambda}+\varepsilon^{4\lambda})}{1-\varepsilon^{4\lambda}}, \\ \mp\dfrac{x_1-(\varepsilon^{2\lambda}+\varepsilon^{4\lambda})x_2}{1-\varepsilon^{4\lambda}}, & \pm\dfrac{x_1(1+\varepsilon^{2\lambda})+\varepsilon^{4\lambda}x_2}{1-\varepsilon^{4\lambda}}, \qquad [\lambda=1,2,3,4]. \end{array}\right.$$

Wie man sieht, stimmt die Gesammtheit der Ausdrücke (6) mit der Gesammtheit der Ausdrücke (1) überein.

Nun frage man wieder nach allen homogenen ganzen Functionen der y_1, y_2 und x_1, x_2, welche ungeändert bleiben, wenn man *gleichzeitig* auf die y die Substitutionen (1), auf die x die Substitutionen (6) anwendet. Ich will im Folgenden der Kürze wegen solche Functionen als *Tetraederformen* bezeichnen, während ich die Ausdrücke, mit denen sich der vorige Abschnitt beschäftigte, *Ikosaederformen* nennen werde.

Von Tetraederformen kennen wir zunächst g_1, g_2, g_3, und ihnen können wir sofort drei andere, g_1', g_2', g_3', hinzufügen, die sich aus den g_1, g_2, g_3 durch Vertauschung der x und y ergeben. Denn der im vorigen Abschnitte so genannte Process bleibt offenbar hier in Gültigkeit.

§ 2.

Das volle System der Tetraederformen.

Beginnen wir wieder damit, diejenige Tetraederform zu suchen, welche in den x und den y gleichzeitig vom niedrigsten Grade ist. Dies wird, wie sich sofort ergiebt, eine *bilineare* Form, und in diesem Umstande ist es begründet, dass die hier zu entwickelnden Verhältnisse sehr viel einfacher sind, als die analogen des vorigen Abschnittes. — Man betrachte zunächst nur diejenigen Substitutionen (1) und (6), welche y_1, y_2 in $-y_2$, y_1 und x_1, x_2 in $-x_2$, x_1 überführen. Durch sie bleibt, für beliebigen Werth von c, die bilineare Form ungeändert:

$$(-y_1x_2+y_2x_1)-c\,(y_1x_1+y_2x_2).$$

Nimmt man nun irgend zwei entsprechende weitere Substitutionen (1) und (6) hinzu und verlangt, dass die Form nach wie vor ungeändert bleibe, so ergiebt sich $c=1$, und diese Bestimmung erweist sich dann auch als ausreichend. *Wir haben somit als einfachste Form die folgende:*

$$\chi = - y_1 (x_1 + x_2) + y_2 (x_1 - x_2). \tag{7}$$

Da wir nun alle Tetraederformen kennen, welche y allein enthalten, so ergiebt sich jetzt das volle System der Tetraederformen nach den Principien der Invariantentheorie mit einem Schlage. *Das volle System umfasst neben*

$$g_1, g_2, g_3, \chi$$

nur noch die Ueberschiebungen:

$$(g_1, \chi^s)_{0,s}, \quad (g_2, \chi^s)_{0,s}, \quad (g_3, \chi^s)_{0,s},$$

wo s *im ersten Falle von* 1 *bis* 6, *im zweiten von* 1 *bis* 8, *im dritten von* 1 *bis* 12 *läuft.*

Dies sind im Ganzen 20 Formen. Reducibele sind unter ihnen nicht mehr vorhanden.

Will man nur solche Tetraederformen betrachten, die in den x und y denselben Grad haben, so ergiebt sich, *dass sie ganze Functionen von* χ, $(g_1, \chi^3)_{0,3}$, $(g_2, \chi^4)_{0,4}$, $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ *sind.*

Beschränkt man sich auf *rationale* Darstellung, so genügt es, neben χ, $(g_1, \chi^3)_{0,3}$, $(g_2, \chi^4)_{0,4}$, $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ eine einzige Form auszuwählen, bei welcher der Grad in den x von dem Grade in den y um zwei Einheiten verschieden ist, z. B. $(g_1, \chi^2)_{0,2}$. Zwischen diesen *fünf associirten Formen* besteht dann nur eine Relation, welche allein die vier ersten betrifft und in $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ vom zweiten Grade ist. Bei der rationalen Darstellung solcher (ganzer oder gebrochener) Tetraederfunctionen, die in den x und y denselben Grad haben, werden χ, $(g_1, \chi^3)_{0,3}$, $(g_2, \chi^4)_{0,4}$, $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ allein benutzt.

§ 3.

Die Ikosaederformen sind Tetraederformen.

Da die Substitutionen (1) und (6) nur einen Theil der zusammengehörigen Ikosaedersubstitutionen des vorigen Abschnittes ausmachen, so sind alle Ikosaederformen selbstverständlich Tetraederformen. Man wird verlangen, sie durch die Formen des soeben aufgestellten vollen Systems auszudrücken. Ich will dies hier für die einfachsten Formen ausführen.

a) *Ikosaederformen, welche bloss die* y *enthalten.* Es sind dies γ_1, γ_2, γ_3; sie werden ganze Functionen von g_1, g_2, g_3. Man findet durch Vergleich der Anfangsglieder:

$$128\gamma_1 = g_3 + 11 g_1^2, \tag{8}$$

$$\gamma_2 = g_1^2 g_2 - 3\gamma_1 g_2, \tag{9}$$

$$\gamma_3 = g_1^5 - 10 g_1^3 \gamma_1 + 45 g_1 \gamma_1^2. \tag{10}$$

In (9) und (10) habe ich rechts γ_1 stehen lassen, weil sich mit ihm bei der von uns festgehaltenen Wahl der Veränderlichen am bequemsten rechnet. Denn man hat wieder das Princip: *Ordnet man die Tetraeder-*

formen nach Potenzen von y_1, bez. y_2, so ist die Differenz zweier Tetraederformen mit demselben Anfangsgliede durch γ_1 theilbar.

Durch Elimination ergeben sich aus den Gleichungen (8), (9), (10) folgende weitere, die ich später gebrauche und daher gleich hier notire:

$$\gamma_2^2 = g_2^5 - 40\gamma_1^2 g_2^2 + 5\gamma_2\gamma_2 g_2, \tag{11}$$

$$\gamma_2^2\gamma_3 = g_1^5 g_2^5 - 5\gamma_1\gamma_3 g_1^2 g_2^2 - 135\gamma_1^3\gamma_2 g_1 g_2. \tag{12}$$

b) *Ikosaederformen gleichen Grades in den x und y.* Man findet:

$$f = -\tfrac{1}{8}(g_1, \chi^3)_{0,3} - \tfrac{1}{8}\chi^3, \tag{13}$$

$$\varphi = -\tfrac{1}{8}(g_2, \chi^4)_{0,4} + \tfrac{3}{2}\chi f + \tfrac{5}{16}\chi^4, \tag{14}$$

$$\psi = -\chi^5 - 5f\chi^2 + 5\varphi\chi. \tag{15}$$

Um Δ zu berechnen, schiebe man über die letzte Formel einmal $(f, \varphi)_{1,0}$ in Bezug auf die y, ein anderes Mal $(f, \varphi)_{0,1}$ in Bezug auf die x. So kommt:

$$\begin{aligned}(\chi^4+2f\chi-\varphi)\,((f,\varphi)_{1,0},\chi)_{0,1} = -\{&3\chi^3((f,\varphi)_{1,0},f)_{0,1} - 4\chi((f,\varphi)_{1,0},\varphi)_{0,1}\\ &+((f,\varphi)_{1,0},\psi)_{0,1}\},\\ (\chi^4+2f\chi-\varphi)\,((f,\varphi)_{0,1},\chi)_{1,0} = -\{&3\chi^2((f,\varphi)_{0,1},f)_{1,0} - 4\chi((f,\varphi)_{0,1},\varphi)_{1,0}\\ &+((f,\psi)_{0,1},\psi)_{1,0}\},\end{aligned}$$

Zieht man diese beiden Formeln von einander ab, so entstehen rechts die Ikosaederformen:

$$\begin{gathered}((f,\varphi)_{1,0},\ f)_{0,1} - ((f,\varphi)_{0,1},\ f)_{1,0},\\ ((f,\varphi)_{1,0},\ \varphi)_{0,1} - ((f,\varphi)_{0,1},\ \varphi)_{1,0},\\ ((f,\varphi)_{1,0},\ \psi)_{0,1} - ((f,\psi)_{0,1},\ \psi)_{1,0}.\end{gathered}$$

Dieselben haben in den x und y die Grade (8), (9), (10) und wechseln bei Vertauschung von x und y ihr Zeichen. Daher verschwinden die beiden ersten identisch und die letzte hat den Werth $C\Delta$, wo C numerisch ist. — Linker Hand entsteht die Tetraederform:

$$((f,\varphi)_{1,0},\ \chi)_{1,1} - ((f,\varphi)_{0,1},\ \chi)_{1,0},$$

und da sie hinsichtlich der x und y symmetrischer ist, als die im Systeme aufgezählte Form $(g_3, \chi^6)_{0,6}$, mit der sie den Grad in x und y gemein hat, so will ich statt letzterer die neue Form in das System aufnehmen und dementsprechend mit einem besonderen Buchstaben bezeichnen:

$$\nabla = ((f,\varphi)_{1,0},\ \chi)_{0,1} - ((f,\varphi)_{0,1},\ \chi)_{1,0}. \tag{16}$$

Man hat also:

$$(\chi^4+2f\chi-\varphi)\,\nabla = C\Delta, \tag{17}$$

und C durch Vergleich eines Gliedes:

$$C = -\tfrac{1}{4}.$$

§ 4.

Umgestaltung des Systems der Tetraederformen mit Hülfe der Ikosaederformen.

Den letzten Entwickelungen zufolge kann man im Systeme der Tetraederformen $(g_1, \chi^3)_{0,3}$ durch f, $(g_2, \chi^4)_{0,4}$ durch φ, $(g_3, \chi^6)_{0,6}$ durch ∇ ersetzen. Das System nimmt dann diejenige Gestalt an, welche die nachstehende Tabelle aufweist.

Formensystem des Tetraeders.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0							g_1'		g_2'				g_3'
1		χ				$(f,\chi^2)_{0,2}$		$(\varphi,\chi^3)_{0,3}$				$(\nabla,\chi^5)_{0,4}$	
2					$(f,\chi)_{0,1}$		$(\varphi,\chi^2)_{0,2}$				$(\nabla,\chi^4)_{0,4}$		
3				f		$(\varphi,\chi)_{0,1}$				$(\nabla,\chi^3)_{0,3}$			
4			$(f,\chi)_{1,0}$		φ				$(\nabla,\chi^2)_{0,2}$				
5		$(f,\chi^2)_{1,0}$		$(\varphi,\chi)_{1,0}$				$(\nabla,\chi)_{0,1}$					
6	g_1		$(\varphi,\chi^2)_{2,0}$				∇						
7		$(\varphi,\chi^3)_{3,0}$				$(\nabla,\chi)_{1,0}$							
8	g_2				$(\nabla,\chi^2)_{2,0}$								
9				$(\nabla,\chi^3)_{3,0}$									
10			$(\nabla,\chi^4)_{1,0}$										
11		$(\nabla,\chi^5)_{5,0}$											
12	g_3												

Die erste Horizontalreihe giebt wieder die Grade in den x, die erste Verticalreihe die Grade in den y.

Die Formen g_1, g_2, g_3 sind jetzt definirt als $(f, \chi^3)_{0,3}$, $(\varphi, \chi^4)_{0,4}$, $(\nabla, \chi^6)_{0,6}$, und entsprechend die g_1', g_2', g_3'. Aber natürlich kann man sie in mannigfachster Weise als Ueberschiebungen von Ikosaederformen mit Potenzen von χ darstellen. Man hat z. B. (was ich später gebrauche):

$$(18) \qquad g_2 = (\Theta, \chi)_{1,0},$$

$$(19) \qquad -g_1 g_2 = ((\tau, \Theta)_{1,0}, \chi)_{1,0},$$

und also*) folgende Formel:

$$(20) \qquad \chi \cdot \gamma_2 = -\Theta \cdot g_1 g_2 - (\tau, \Theta)_{1,0} \cdot g_2.$$

§ 5.

Associirte Formen.

Nach Formel (17) kann man ∇ durch f, φ, χ und Δ, und also auch durch f, φ, χ und das im vorigen Abschnitte eingeführte $c = \frac{(f, \tau)_{1,0}}{\Theta}$ rational ausdrücken. Wir können ferner unter die associirten Formen statt $(g_3, \chi^2)_{0,2}$ die Ueberschiebung $(f, \chi)_{1,0}$ aufnehmen. Dann haben wir also den Satz:

Alle Tetraederformen sind rationale Functionen von $f, \varphi, c, \chi, (f, \chi)_{1,0}$.

Die einzige zwischen diesen Formen bestehende Relation ist die alte des vorigen Abschnittes, welche c durch f, φ, ψ ausdrückt. —

Beschränkt man sich auf Tetraederformen gleichen Grades in x und y, so kommt selbstverständlich $(f, \chi)_{1,0}$ noch in Wegfall.

Ich will beispielsweise die beiden Functionen $\frac{g_2 \gamma_1}{\gamma_2}$ und $\frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3}$, welche beide gleichen Grad in den x und den y besitzen, ausrechnen. Zu dem Zwecke schiebe man τ über die Gleichung (15):

$$\psi = -\chi^5 - 5f\chi^2 + 5\varphi\chi,$$

und beachte, dass:

$$(f, \tau)_{1,0} = c\Theta, \quad (\varphi, \tau)_{1,0} = -\tfrac{3}{4} f\Theta, \quad (\psi, \tau)_{1,0} = -\varphi\Theta.$$

So kommt:

$$(21) \qquad \frac{(\tau, \chi)_{1,0}}{\Theta} = -\frac{3c\chi^3 + 3f\chi^2 - \varphi\chi}{3f\chi^2 - 4\varphi\chi + \psi}.$$

Nun benutze man die Identitäten:

$$\Theta(\tau, \chi)_{1,0} = \chi(\tau, \Theta)_{1,0} + \tau(\Theta, \chi)_{1,0},$$

$$(\tau, \Theta)_{1,0}(\tau, \chi)_{1,0} = \chi(\tau, (\tau, \Theta)_{1,0})_{1,0} + \tau((\tau, \Theta)_{1,0}, \chi)_{1,0},$$

---

*) Vermöge der Identität:

$$\chi((\tau, \Theta)_{1,0}, \Theta)_{1,0} = (\tau, \Theta)_{1,0}(\chi, \Theta)_{1,0} + \Theta((\tau, \Theta)_{1,0}, \chi)_{1,0}.$$

und ersetze $(\tau, (\tau, \Theta)_{1,0})_{1,0}$ durch seinen Werth $3\gamma_1\Theta$; $(\Theta, \chi)_{1,0}$, $((\tau, \Theta)_{1,0}, \chi)_{1,0}$ nach Formel (18), (19) durch g_1, $-g_1 g_2$. So ergiebt sich:

$$\frac{g_2\gamma_1}{\gamma_2} = -\gamma_1 \frac{\Theta^2 \cdot \dfrac{3c\chi^3 + 3f\chi^2 - \varphi\chi}{3f\chi^2 - 4\varphi\chi + \psi} + \chi \cdot (\tau, \Theta)_{1,0}}{\gamma_2 \tau}, \tag{22}$$

$$\frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2\gamma_3} = \gamma_1^2\Theta \frac{(\tau, \Theta)_{1,0} \cdot \dfrac{3c\chi^3 + 3f\chi^2 - \varphi\chi}{3f\chi^2 - 4\varphi\chi + \psi} + 3\gamma_1\chi}{\tau\gamma_2\gamma_3}, \tag{23}$$

Hier treten rechter Hand neben f, φ, ψ, χ, c nur solche Grössen auf, die in § 9. des vorigen Abschnittes als Function von f, φ, ψ, c ausgerechnet worden sind; ψ selbst ist aber durch Formel (15) in f, φ, χ gegeben.

Ich will noch die Formel anschreiben, die sich durch Division von (22) und (23) ergiebt; sie lautet:

$$\frac{g_1\gamma_1^2}{\gamma_3} = -\frac{\gamma_1^2\Theta}{\gamma_3} \cdot \frac{(\tau, \Theta)_{1,0} \dfrac{3c\chi^3 + 3f\chi^2 - \varphi\chi}{3f\chi^2 - 4\varphi\chi + \psi} + 3\gamma_1\chi}{\Theta^2 \dfrac{3c\chi^3 + 3f\chi^2 - \varphi\chi}{3f\chi^2 - 4\varphi\chi + \psi} + \chi(\tau, \Theta)_{1,0}}. \tag{24}$$

Abschnitt III.

Die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Die Entwickelungen des ersten und zweiten Abschnittes gestatten jetzt, die allgemeine Gleichung fünften Grades in mannigfacher Weise zu lösen, indem man letztere entweder auf eine *Ikosaedergleichung* zurückführt oder auf eine solche Gleichung vom fünften Grade, *die nur einen Parameter enthält*. Von letzterem betrachte ich nur solche, die schon bei Hermite und Brioschi (resp. Kronecker) oder in der Klein'schen Arbeit vorkommen*); ich bemerke aber ausdrücklich, dass die vorangehenden Betrachtungen weiter reichen, indem sie z. B. *alle* Gleichungen fünften Grades aufstellen und discutiren lassen, von denen die verschiedenen Tetraederformen abhängen.

§ 1.

Die Gleichung fünften Grades für das χ.

Durch quadratische (Tschirnhausen-) Transformation kann man aus einer Gleichung fünften Grades die beiden Glieder wegschaffen, welche die vierte und die dritte Potenz der Unbekannten enthalten. Eine so vereinfachte Gleichung kommt aber im vorigen Abschnitte

---

*) Auf letztere verweise ich zumal auch wegen der Literatur. Siehe übrigens Brioschi's Darstellung in diesen Annalen Bd. XIII, p. 109 ff.

vor: sie wird durch die Formel (15) daselbst geliefert, wenn man in ihr f, φ, ψ als gegeben, χ als Unbekannte ansieht:

$$(1) \qquad \chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi - \psi = 0.$$

Wendet man auf die x, y, in denen das χ vermöge der Formel

$$(2) \qquad \chi = - y_1(x_1+x_2) + y_2(x_1-x_2)$$

ausgedrückt ist, die 120 zusammengehörigen Ikosaedersubstitutionen an, so entstehen die *fünf* Wurzeln, welche (1) besitzt; sie lauten:

$$(3) \qquad \chi_\nu = - \varepsilon^\nu x_1 y_1 + \varepsilon^{2\nu} x_1 y_2 - \varepsilon^{3\nu} x_2 y_1 - \varepsilon^{4\nu} x_2 y_2.$$

Das Differenzenproduct dieser χ_ν ist keine andere Function als das im ersten Abschnitte eingeführte Δ. In der That stimmt die Formel (30) des ersten Abschnittes überein mit derjenigen, welche in bekannter Weise die Discriminante von (1) durch die Coefficienten f, φ, ψ ausdrückt.

Denken wir uns also bei der Gleichung (1) *die Coefficienten f, φ, ψ und die Quadratwurzel aus der Discriminante gegeben, so kennen wir die Ikosaederformen f, φ, ψ, c, durch welche sich alle anderen Ikosaederformen gleichen Grades in x und y rational ausdrücken lassen.*

Ikosaederformen, welche nicht gleichen Grad in den x und den y besitzen, sind rationale Functionen von f, φ, ψ, c und $\frac{\tau}{\Theta}$. Letzteres spielt, wenn man von der Gleichung (1) ausgeht, die Rolle eines willkürlichen Proportionalitätsfactors; doch will ich den hiermit angedeuteten Gesichtspunkt im Nachstehenden nicht weiter verfolgen.

§ 2.

Zurückführung auf eine Ikosaedergleichung.

Um die Gleichung (1) auf eine Ikosaedergleichung zurückzuführen, benutze man einfach die Rechnungen des neunten Paragraphen des ersten Abschnitts. Man berechne zuvörderst die drei Ausdrücke:

$$A = - \frac{8f\varphi + 3\psi c}{f^2 + 3c\varphi}, \quad B = \frac{-8\varphi^2 + f\psi}{f^2 + 3c\varphi}, \quad C = - \frac{-8\varphi^3 + 9f\varphi\psi + 3\psi^2 c}{f^2 + 3c\varphi}.$$

Dann hat man für $\frac{y_1}{y_2}$ sofort die Ikosaedergleichung:

$$(4) \qquad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} = \frac{(A^2 - 3B)^3}{C}.$$

Hat man sie auf irgend eine Weise durch Reihenentwickelung gelöst, so berechne man (Formel (2), (3) des zweiten Abschnitts):

$$(5) \quad \frac{g_2\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(y_1^2 - y_1y_2(1+\varepsilon)^2 - \varepsilon^2 y_2^2)(y_1^2 - y_1y_2(1+\varepsilon^2)^2 - \varepsilon^4 y_2^2)$$
$$\cdot (y_1^2 - y_1y_2(1+\varepsilon^3)^2 - \varepsilon y_2^2)(y_1^2 - y_1y_2(1+\varepsilon^4)^2 - \varepsilon^3 y_2^2),$$

$$(6)\quad \frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3} = \frac{\gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\lambda=4} (y_1^2 - y_1 y_2 (1+\varepsilon^\lambda)^2 - \varepsilon^{2\lambda} y_2^2)$$

$$\cdot (y_1^2 + y_2^2)(y_1^2 - 2(\varepsilon+\varepsilon^4) y_1 y_2 - y_2^2)(y_1^2 - 2(\varepsilon^2+\varepsilon^3) y_1 y_2 - y_2^2).$$

Dann giebt die Gleichung (20) desselben Abschnitts:

$$(7)\qquad \chi = -A \cdot \frac{g_2 \gamma_1}{\gamma_2} - D \cdot \frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3},$$

wo A der soeben berechnete Ausdruck ist und

$$D = \frac{\Theta \gamma_3}{\gamma_1^3} = \frac{AB^2 + 3cAB + 30fB}{\varphi}$$

(nach Glch. (41) des vorigen Abschnittes).

Die Gleichung (7) *drückt also* χ *durch eine Wurzel der Ikosaedergleichung* (4) *und die bekannten Grössen aus.*

Die übrigen Wurzeln χ_ν erhält man sofort, wenn man y_1, y_2 in allen Formeln durch $\varepsilon^\nu y_1$, $\varepsilon^{4\nu} y_2$ ersetzt.

§ 3.

Gleichungen fünften Grades mit einem Parameter.

Will man nicht explicite auf die Ikosaedergleichung zurückgehen, so bietet der zweite Abschnitt folgende *Normalformen von Gleichungen fünften Grades mit nur einem Parameter.* Es sei

$$(8)\qquad u = \frac{g_1}{\sqrt{\gamma_1}}, \quad v = \frac{g_2 \gamma_1}{\gamma_2}, \quad w = \frac{g_1 g_2 \gamma_1^3}{\gamma_2 \gamma_3}.$$

Dann haben wir für sie nach den Formeln (10), (11), (12) des vorigen Abschnitts unmittelbar folgende Gleichungen:

$$(9)\qquad u^5 - 10u^3 + 45u - \frac{\gamma_3}{\gamma_1^{2^1\!/_2}} = 0,$$

$$(10)\qquad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} \cdot v^5 - 40v^2 + 5v - 1 = 0,$$

$$(11)\qquad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} \cdot w^5 - 5\frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^5} \cdot w^2 - 135\frac{\gamma_3^4}{\gamma_1^{10}} \cdot w - \frac{\gamma_3^8}{\gamma_1^{20}} = 0,$$

in denen für $\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5}$ der soeben berechnete Werth einzutragen ist und γ_3 der Relation (5) des ersten Abschnitts:

$$\gamma_3^2 = \gamma_2^3 + 12^3 \gamma_1^5$$

zu entnehmen ist. Hier giebt Formel (9) die Brioschi'sche Resolvente, Formel (10) und (11) fallen mit denjenigen zusammen, die Klein auf pag. 523, 524 seiner Arbeit entwickelt hat.

Die Werthe von u, v, w in χ und den bekannten Grössen, d. h. die Transformationsformeln, welche die vorgelegte Gleichung (1) in

die Normalformen (9), (10), (11) verwandeln, ergeben sich aus den Formeln (22), (23), (24) des vorigen Abschnitts. Man setze:

$$Z = \frac{3c\chi^3 + 3f\chi^2 - \varphi\chi}{3f\chi^2 - 4\varphi\chi + \psi}.$$

Dann hat man, unter Benutzung der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnung:

$$(12) \qquad u = -\sqrt{B} \cdot \frac{3\chi + AZ}{A\chi + BZ},$$

$$(13) \qquad v = \qquad - \frac{A\chi + BZ}{A^2 - 3B},$$

$$(14) \qquad w = \frac{B}{D} \cdot \frac{3\chi + AZ}{A^2 - 3B}.$$

Um umgekehrt χ durch u oder v auszudrücken, beachte man, dass aus Formel (9) des zweiten Abschnitts folgt:

$$(15) \qquad v = \frac{1}{u^2 - 3}$$

und also

$$(16) \qquad w = \frac{\sqrt{B}}{D} \cdot \frac{u}{u^2 - 3}.$$

Man setze ferner einen Augenblick v an die Stelle von χ und also die Gleichung (10) an die Stelle von (1). Dann wird:

$$(17) \qquad w = \frac{v^3}{24v^2 - 4v + 1}.$$

Es ist hiernach w als Function von v, und v und w als Functionen von u definirt. Den verlangten Ausdruck für χ ergiebt jetzt die schon soeben benutzte Formel (20) des vorigen Abschnitts.

Man hat einfach:

$$(19) \qquad \chi = -Av - Dw = \frac{A + \sqrt{B} \cdot u}{3 - u^2}.$$

Will man die übrigen Wurzeln χ_ν berechnen, so hat man u oder v durch eine der anderen Wurzeln von (9) resp. (10) zu ersetzen.

§ 3.

Die Jerrard'sche Form.

Die sogenannte Jerrard'sche Form gehört nicht zu den Gleichungen fünften Grades mit einem Parameter, zu welchen die Betrachtung des Ikosaeders unmittelbar führt. Vielmehr müsste man, um zu ihr zu gelangen, eine cubische Gleichung auflösen, deren Coefficienten in $\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5}$ rational sind*). Aber sie kann ohne Weiteres als Special-

*) Cf. die Klein'sche Arbeit, pag. 525.

fall der Gleichung (1) betrachtet werden. In Folge dessen gestatten unsere Formeln, wie jetzt gezeigt werden soll, die Transformation der Gleichung (1) auf die Jerrard'sche Form und die Lösung der Gleichung (1) durch die Hermite'schen Formeln explicite anzugeben. Ich gehe hierauf um so lieber ein, als die Hermite'sche Lösung der Gleichungen fünften Grades die bekannteste ist und man bei neuen Methoden zweckmässigerweise verlangt, den Zusammenhang mit den älteren aufzuweisen.

Hermite's Formeln, etwas umgestellt, sind diese. *Es sei:*

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1, \quad \mathsf{K} = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}}, \quad \mathsf{K}' = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa'^2 \sin^2\varphi}}.$$

$$q = e^{-\pi \frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{K}}} = e^{i\pi\omega},$$

so dass

$$\sqrt[4]{\varkappa} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{2m^2+m}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}} = \varphi(\omega).$$

Setzt man dann:

$$\Phi(\omega) = \left(\varphi\left(\tfrac{\omega}{5}\right) + \varphi(5\omega)\right)\left(\varphi\left(\tfrac{\omega+16}{5}\right) - \varphi\left(\tfrac{\omega+64}{5}\right)\right)\left(\varphi\left(\tfrac{\omega+32}{5}\right) - \varphi\left(\tfrac{\omega+48}{5}\right)\right),$$

so hat man folgende Gleichung:

$$\Phi^5 - 2000\,\varkappa^2\varkappa'^4\,\Phi - 1600\sqrt{5}\cdot\varkappa'^4\varkappa^{\frac{1}{2}}(1+\varkappa^2) = 0.$$

Umgekehrt also lassen sich die Wurzeln von:

$$(20) \qquad h^5 - 5\varkappa'^4 h - 2\varkappa'^4\,\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}} = 0$$

folgendermassen durch elliptische Functionen darstellen:

$$(21) \qquad h_\nu = \frac{\Phi(\omega + 16\nu)}{2\sqrt{5}\,\sqrt[4]{\varkappa}}.$$

Vergleicht man jetzt zunächst die Gleichung (20) mit der allgemeinen:

$$\chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = 0,$$

so hat man

$$f = 0, \quad \varphi = \varkappa'^4, \quad \psi = -2\varkappa'^4\cdot\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}}.$$

Es wird also die quadratische Gleichung für das c:

$$18\varkappa c^2 - 3(1+\varkappa^2)^2 c + 2\varkappa\varkappa'^4 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$c = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\,\varkappa \\[2mm] \dfrac{\varkappa'^4}{6\varkappa}, \end{cases}$$

ich wähle die letztere

$$(22) \qquad c = \frac{\varkappa'^4}{6\varkappa}.$$

Dann bekomme ich:

$$(23) \qquad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} = -16 \cdot \frac{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)^3}{\varkappa^2\varkappa'^8},$$

$$(24) \qquad v = \frac{\varkappa}{4} \cdot \frac{1}{1+14\varkappa^2+\varkappa^4} \cdot \left\{2 \cdot \frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}} \cdot h + \varkappa^4\, \frac{h^3+2\varkappa h}{2\varkappa h+\sqrt{\varkappa}(1+\varkappa^2)}\right\},$$

$$(25) \qquad w = \frac{\varkappa^2\varkappa'^4\sqrt{\varkappa}}{4} \cdot \frac{1}{(1+\varkappa^2)(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)} \left\{3h - \frac{1+\varkappa^2}{2\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{h^3+2\varkappa h}{2\varkappa h+\sqrt{\varkappa}(1+\varkappa^2)}\right\},$$

$$(26) \qquad h = -2 \cdot \frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}} \left\{v - \frac{8}{\varkappa'^4}(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)\,w\right\}.$$

§ 5.

Die Jerrard'sche Transformation und die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch die Hermite'schen Formeln.

Man betrachte jetzt die Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Gleichungen:

$$\chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = 0,$$

welche dasselbe $\frac{y_1}{y_2}$, oder, was auf das Gleiche hinauskommt, dasselbe $\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5}$ und dasselbe v und w besitzen. Unter ihnen finden sich mehrere Jerrard-Hermite'sche Gleichungen. Um also die allgemeine Gleichung

$$\chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = 0$$

in die Jerrard-Hermite'sche Form zu transformiren, bietet sich jetzt der Weg, *zwischen den Formeln des* § 3. *und* § 4. *unter Voraussetzung gleichen* $\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5}$ *das* v, w *zu eliminiren.*

Vor allen Dingen also berechne man $\varkappa^2$ aus der Formel:

$$(27) \qquad \frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^5} = \frac{(A^2-3B)^3}{C} = -16 \cdot \frac{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)^3}{\varkappa^2\varkappa'^8}$$

und ersetze nun in den Gleichungen:

$$(26) \qquad h = -2 \cdot \frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}} \left\{v - \frac{8}{\varkappa'^4}(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)\,w\right\},$$

$$(19) \qquad \chi = -Av - Dw,$$

die v, w das eine Mal durch ihre Ausdrücke in χ, c, A, B, C, D, Z, das andere Mal durch ihre Ausdrücke in $\varkappa$, h. So kommt:

$$(28)\quad h = \frac{2 \cdot \frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}}}{A^2 - 3B} \left\{ \chi \left\{ A + \frac{24B}{D\varkappa'^4}(1 - 34\varkappa^2 + \varkappa^4) \right\} \right.$$

$$\left. + \left\{ B + \frac{8AB}{D\varkappa'^4}(1 - 34\varkappa^2 + \varkappa^4) \cdot Z \right\} \right\},$$

$$(29)\quad \chi = -\frac{A\varkappa}{4} \cdot \frac{1}{1 + 14\varkappa^2 + \varkappa^4} \left\{ 2\,\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}} \cdot h + 4\sqrt{\varkappa} \cdot \frac{h^3 + 2\varkappa h}{2h\sqrt{\varkappa} + \varkappa^2 + 1} \right\}$$

$$- D \cdot \frac{\varkappa^2 \varkappa'^4}{4} \cdot \frac{1}{(1 + 14\varkappa^2 + \varkappa^4)(1 - 34\varkappa^2 + \varkappa^4)} \cdot \left\{ \frac{3\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{h^3 + 2\varkappa h}{2h\sqrt{\varkappa} + \varkappa^2 + 1} \right\}.$$

Die erste dieser Formeln ist die Jerrard'sche Transformation, die zweite giebt die Auflösung von (1) *durch die Hermite'schen Formeln.*

Man hat also, wenn man letztere verwenden will, zur Auflösung der Gleichung

$$\chi^5 + 5f\chi^2 - 5\varphi\chi + \psi = 0$$

folgende Rechnungen auszuführen, die ich hier noch einmal zusammenstelle:

1) Man berechne c aus der Gleichung:

$$(f\psi - 8\varphi^2)c^2 - (9f^2\varphi - \tfrac{1}{3}\psi^2)c + \frac{(-27f^4 - 8\varphi^3 + 9f\varphi\psi)}{9} = 0$$

und A, B, C, D aus den Formeln:

$$A = -\frac{8f\varphi + 3c\psi}{f^2 + 3c\varphi},$$

$$B = \frac{-8\varphi^2 + f\psi}{f^2 + 3c\varphi},$$

$$C = -\frac{-8\varphi^3 + 9f\varphi\psi + 3c\psi^2}{f^2 + 3c\varphi},$$

$$D = \frac{AB^2 + 3cAB + 30fB}{\varphi}.$$

2) Man bestimme $\varkappa^2$ aus der algebraisch lösbaren Gleichung sechsten Grades:

$$-16 \cdot \frac{(1 + 14\varkappa^2 + \varkappa^4)^3}{\varkappa^2 \varkappa'^8} = \frac{(A^2 - 3B)^3}{C};$$

3) q aus der Formel:

$$\sqrt[4]{\varkappa} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{2m^2+m}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}} = \varphi(\omega);$$

4) h_ν aus der Gleichung:

$$h_\nu = 2\sqrt{5}\,\sqrt[4]{\varkappa}\left\{\varphi(5\omega) + \varphi\left(\frac{\omega+16\nu}{5}\right)\right\}\left\{\varphi\left(\frac{\omega+16(\nu+1)}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+16(\nu+4)}{5}\right)\right\}$$
$$\cdot\left\{\varphi\left(\frac{\omega+16(\nu+2)}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+16(\nu+3)}{5}\right)\right\}.$$

Dann ist:

$$5)\quad \chi_\nu = -\frac{A\varkappa}{4}\cdot\frac{1}{1+14\varkappa^2+\varkappa^4}\left\{2\,\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa}}\,h_\nu + 4\sqrt{\varkappa}\,\frac{h_\nu^3+2\varkappa h_\nu}{2h_\nu\sqrt{\varkappa}+\varkappa^2+1}\right\}$$
$$-D\frac{\varkappa^2\varkappa'^4}{4}\cdot\frac{1}{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)(1-34\varkappa^2+\varkappa^4)}\left\{3\,\frac{\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{h_\nu^3+2\varkappa h_\nu}{2h_\nu\sqrt{\varkappa}+\varkappa^2+1}\right\}.$$

Erlangen, im Januar 1878.

Ueber einige Relationen zwischen den Combinationssummen der Quadrate der geraden und ungeraden Zahlen.

Von

TH. VON OPPOLZER in Wien.

Bei der Untersuchung über das Fortschreitungsgesetz der numerischen Coefficienten bei der Methode der mechanischen Quadratur bin ich zu einigen nicht uninteressanten Relationen zwischen den Combinationssummen der Quadrate der geraden und ungeraden Zahlen geführt worden, die ich in den folgenden Zeilen kurz aufweise.

Betrachtet man das Product, in welchem n eine beliebige, d eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$(1)\quad P_{(d-1)}=(n+[d-1])(n+[d-2])\cdots(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n-[d-2])(n-[d-1]),$$

und multiplicirt vorerst je 2 symmetrisch gegen die Mitte gelegenen Factoren mit einander und führt nachher die angezeigten Multiplicationen wirklich aus, so lässt sich auch das vorstehende Product durch die folgende Summenformel darstellen:

$$(2)\quad P_{(d-1)}=\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}}C^{d-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\},$$

wobei dem Symbole C die Bedeutung beigemessen wird, dass es die Summe der Combinationen ohne Wiederholung der in der Klammer stehenden Elemente zur Classe $(d-p)$ darstellt; hierbei wird der Definition gemäss angenommen, dass die Combinationssumme der Elemente zur nullten Classe der Einheit gleich zu setzen ist.

Kehrt man nun zur Gleichung (1) zurück und setzt:

$$(3)\qquad n=m+\frac{1}{2}$$

und verfährt ähnlich wie früher, so erhält man leicht für das obige Product die Form:

$$(4)\quad P_{(d-1)} = \left(m+\left[d-\tfrac{1}{2}\right]\right)\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\,\frac{m^{2p-2}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\right\}.$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke (2) und (4) und Einführung von n in letzteren nach (3) resultirt die folgende interessante Relation:

$$(5)\quad \sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\,\frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\right\}$$
$$= (n+d-1)\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\,\frac{(n-\frac{1}{2})^{2p-2}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\right\},$$

die zu einer Reihe von Relationen führt, welche zwischen den Combinationssummen der Quadrate der geraden und ungeraden Zahlen bestehen.

Ehe ich jedoch auf die Ableitung einiger Folgerungen übergehe, die man aus der Gl. (5) erhalten kann, will ich auf einige Relationen eingehen, die sich aus der Productform (1) selbst ergeben. Bezeichnet man mit $P_{(d)}$ das mit (1) analoge Product, aber einerseits mit $(n+d)$ beginnend, anderseits mit $(n-d)$ abschliessend, so erhält man, je nachdem man n oder m einführt, sofort:

$$(6)\qquad P_{(d)} = (n^2-d^2)\,P_{(d-1)}\,,$$

$$(7)\qquad P_{(d)} = \left(m-d+\tfrac{1}{2}\right)\left(m+d+\tfrac{1}{2}\right)P_{(d-1)}\,,$$

und durch Einführung der Combinationssummen und der Grenze 0 aus (6):

$$(8)\quad \sum_{p=0}^{p=d}(-1)^{d-p}\,\frac{n^{2p+1}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{2^2, 4^2, \cdots (2d)^2\right\}$$
$$= (n^2-d^2)\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\,\frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\right\}.$$

Aus (7) erhält man durch ähnliche Schlussfolgerungen:

$$(9)\quad \sum_{p=0}^{p=d}(-1)^{d-p}\,\frac{m^{2p}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{1^2, 3^2, \cdots (2d-1)^2\right\}$$
$$= \left(m+d-\tfrac{1}{2}\right)\left(m-d+\tfrac{1}{2}\right)\sum_{p=1}^{p=d}(-1)^{d-p}\,\frac{m^{2p-2}}{2^{2(d-p)}}\,C^{d-p}\left\{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\right\}.$$

Während also die Gleichung (5) die Relationen zwischen den Combinationssummen der Quadrate der geraden und ungeraden Zahlen ent-

hält, geben die Gleichungen (8) und (9) die Relationen, die zwischen den Combinationssummen einerseits der Quadrate der geraden, anderseits der Quadrate der ungeraden Zahlen selbst bestehen.

Diese 3 für die vorliegende Untersuchung fundamentalen Ausdrücke können nun in der beliebigsten Weise zur Herleitung einer unendlichen Anzahl von Specialrelationen verwendet werden, und ich will im Folgenden einige derselben anführen, um die vielgestaltige Weise anzudeuten, nach welchen dieselben behandelt werden können.

Multiplicirt man z. B. die Gleichung (9) mit dm und integrirt, bestimmt die Integrationsconstante durch die Specialisirung $m = 0$, so findet sich:

$$\sum_{p=0}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{m^{2p+1}}{(2p+1)\,2^{2(d-p)}} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \cdots (2d-1)^2\}$$
$$= \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \left\{\frac{m^{2p+1}}{2p+1} - \left(\frac{2d-1}{2}\right)^2 \frac{m^{2p-1}}{2p-1}\right\} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\}.$$

Führt man in diese Gleichung die Specialisirung $m = \frac{1}{2}$ ein, so erhält man nach einigen leichten Umformungen eine Relation, die bei der Ermittelung der numerischen Coefficienten bei Doppelintegralen von Bedeutung ist:

$$\sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \cdots (2d-1)^2\}$$
$$+ 4d(d-1) \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p-1)} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\}$$
$$= -2 \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{C^{d-p}\{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\}}{(2p+1)(2p-1)}.$$

Ich begnüge mich mit diesem Beispiel der Verwerthung der Gleichung (9) zur Herstellung neuer Relationen, und bemerke, dass in ganz ähnlicher Weise die Gleichung (8) benutzt werden kann. Die aus (5) fliessenden Relationen will ich aber in einigen weiteren Beispielen erläutern, da in der That einige interessantere Gleichungen erlangt werden können.

Setzt man in der Gleichung (5) den Specialwerth $n = \frac{1}{2}$ ein und beachtet, dass links vom Gleichheitszeichen für $p = 1$ der auftretende unbestimmte Factor $(n - \frac{1}{2})^{2p-2} = 0^0$ der Einheit gleich gesetzt werden muss, so findet sich leicht die bemerkenswerthe Beziehung:

$$\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} C^{d-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\}$$
$$= (-1)^{d-1}(2d-1)(1^2 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot (2d-3)^2).$$

Setzt man aber in (5) $n = 0$, so erhält man nach einigen offenkundigen Reductionen:

$$\text{(a)}\qquad \sum_{p=0}^{p=d} (-1)^{d-p} C^{d-p} \{1^2, 3^2, \cdots (2d-1)^2\} = 0\,.$$

Setzt man endlich $n = 1$, so findet sich:

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p} \{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\} = 0.$$

Aus der Gleichung (5) erhält man durch Differentiation:

$$\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(2p-1)\,n^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p} \{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\}$$

$$= \frac{2d-1}{2} \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(2p-2)\,(n-\frac{1}{2})^{2p-3}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p} \{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\}$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(2p-1)\,(n-\frac{1}{2})^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p} \{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\}\,.$$

Die hier ausgeführte Differentiation erleichtert sich ganz ausserordentlich und führt sofort zu übersichtlichen Resultaten, wenn man rechts vom Gleichheitszeichen in (5) statt n wieder m einführt und die Differentiation rechts nach m ausführt, und nachher, da

$$dm = dn$$

ist, wieder n substituirt. Weitere Relationen können durch fortgesetzte Differentiation und dadurch erhalten werden, dass man vor der Differentiation rechts und links mit beliebigen Functionen von n multiplicirt. Doch will ich mich mit den gegebenen Andeutungen begnügen und einige Formen aufweisen, die durch die Integration erhalten werden. Multiplicirt man nämlich in (5) links mit $n\,dn$, rechts mit $(m+\frac{1}{2})\,dm$ und integrirt, so wird:

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}\, n^{2p+1}}{(2p+1)\,2^{2(d-p)}} C^{d-p} \{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\}$$

$$= \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2^{2(d-p)}} \Bigg\{ \frac{m^{2p+1}}{(2p+1)} + \frac{1}{2} \frac{m^{2p}}{2p}$$

$$+ \frac{2d-1}{2} \left(\frac{m^{2p}}{2p} + \frac{1}{2} \frac{m^{2p-1}}{2p-1} \right) \Bigg\} C^{d-p} \{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\} + J,$$

wo J die Integrationsconstante vorstellt, zu deren Bestimmung die Specialisirung $n = 0$ und $m = 0$ führt. Da beide Bestimmungen

identisch sein müssen, so resultirt aus dieser zweifachen Bestimmung der Integrationsconstante die Relation:

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C^{d-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\}$$
$$= \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{2p} \left\{\frac{2d-1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1}\right\} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\}.$$

Man kann die Gleichung (5) noch in der Weise zur Herstellung weiterer Relationen benutzen, indem man dieselbe dadurch abändert, dass man mit Hülfe der Relation (9) die Combinationssumme der Elemente $\{1^2, 3^2, \cdots (2d-3)^2\}$ durch $\{1^2, 3^2, \cdots (2d-1)^2\}$ ersetzt; man hat dann:

$$(n-d) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\}$$
$$= \sum_{p=0}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{m^{2p}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \cdots (2d-1)^2\}.$$

Multiplicirt man links mit dn, rechts mit dm, so findet sich durch die zweifache Darstellung der Integrationsconstante:

$$\sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C^{d-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\}$$
$$- d \sum_{p=1}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{p} C^{d-p}\{2^2, 4^2, \cdots (2d-2)^2\}$$
$$= \sum_{p=0}^{p=d} \frac{(-1)^{d-p}}{(2p+1)} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \cdots (2d-1)^2\}.$$

Die im Obigen entwickelten Resultate sollen nur die Fruchtbarkeit der Formeln (5), (8) und (9) zur Herstellung von Relationen nachweisen; die hier gewählten Specialfälle spielen in der Eingangs erwähnten Untersuchung eine wichtige Rolle.

Prof. M. A. Stern machte in einem Briefe über die vorstehenden Relationen an mich die folgende Bemerkung, die ich wegen ihrer Bedeutung zur Herstellung weiterer Relationen anfüge: „Die Relation (5) enthält eine Menge einzelner Relationen. Da nämlich n eine ganz unbestimmte Zahl ist und auf der linken Seite nur ungerade Potenzen von n vorkommen, so müssen, wenn die rechte Seite nach den Potenzen von n entwickelt wird, die Glieder, welche gerade Potenzen

von n enthalten, einzeln Null werden. Dies giebt ebensoviel einzelne Sätze, von welchen der letzte, der sich auf das Glied bezieht, in welchem gar kein n vorkommt, mit Ihrer Relation (a) identisch ist. Ferner müssen die einzelnen Glieder auf der rechten Seite, die eine gewisse ungerade Potenz von n enthalten, den entsprechenden Gliedern auf der linken Seite gleich sein. Dies giebt ebenfalls wieder so viele einzelne Sätze.“

Wien, 22. Januar 1878.

Zur Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von

A. V. Bäcklund in Lund.

In dem letzten Paragraphen meiner zweiten Abhandlung über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung mit intermediären ersten Integralen *) habe ich von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gesprochen, die charakteristische Mannigfaltigkeiten einer Dimension besitzen. Zu dieser Classe von Gleichungen gehört insbesondere, wie am angeführten Orte bemerkt worden ist, die Gleichung 2. O. mit dem vollständigen ersten Integrale: eine arbiträre $F(u_1, u_2, \cdots u_n) = 0$, und von einer jeden solchen Gleichung gilt der Satz, dass auf jeder Integral-M_n derselben zwei Schaaren von charakteristischen M_1 verlaufen. Diese charakteristischen M_1 zeichnen sich vor allen anderen einfach unendlichen Reihen von jener Gleichung zugehörenden Elementen $(z x_i p_i p_{ik})$ dadurch aus, dass eine jede Schaar von $(n-2)$-fach unendlich vielen charakteristischen M_1, die vereinigt liegen und also eine M_{n-1} bilden, eben eine unbegrenzt vielen Integral-M_n der Gleichung 2. O. gemeinsame M_{n-1} bildet, während durch eine jede anders zusammengesetzte M_{n-1} immer nur eine Integral-M_n gelegt werden kann. Oder, in anderen Worten, alle diejenigen Werthsysteme der dritten Differentialquotienten p_{ikl} von z, die den Elementen $(z x_i p_i p_{ik})$ einer solchen einfachen Reihe von Elementen $(z x_i p_i p_{ik})$, die eine charakteristische M_1 ist, zugehören, alle Werthsysteme p_{ikl} also, welche die $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen befriedigen:

$$dp_{ik} = p_{ik1}\, dx_1 + p_{ik2}\, dx_2 + \cdots + p_{ikn}\, dx_n\,,$$

wo für dx_i, dp_{ik} die der fraglichen Reihe zugehörigen Werthe zu setzen sind, genügen sämmtlich der partiellen Differentialgleichung 2. O. Und dies gilt ausschliesslich für die charakteristischen M_1.

---

*) Diese Annalen Bd. XIII, p. 69.

Aus ihnen setzen sich, auf unbegrenzt viele Arten, nicht nur, wie gesagt, M_{n-1}, sondern auch M_{n-2}, M_{n-3}, $\cdots$ M_2 zusammen, die für die Gleichung 2. O. insofern eine besondere Bedeutung haben, als durch dieselben unendlich viel mehr Integral-M_n als resp. durch andere M_{n-1}, M_{n-2}, M_{n-3}, $\cdots$ M_2 hindurchgelegt werden können. — Aber eine Gleichung 2. O. würde, auch ohne charakteristische M_1 zu haben, derartige M_{n-1}, M_{n-2}, $\cdots$ M_2, — charakteristische M_{n-1}, M_{n-2}, $\cdots$ M_2, — besitzen können, und zwar zu grösstmöglicher Anzahl, so dass jede Integral-M_n aus solchen M zusammengesetzt ist; und die Gleichung 2. O. würde charakteristische M_{n-1}, M_{n-2}, $\cdots$ M_3, ebenfalls zu grösstmöglicher Anzahl, besitzen können, ohne charakteristische M_2, M_1 zu haben; u. s. w. — Es gilt sogar der Satz, dass für die allgemeine Gleichung 2. O. mit n unabhängigen Variablen diejenigen charakteristischen Mannigfaltigkeiten, die in einer solchen Zahl vorhanden sind, dass jede Integral-M_n aus einer Reihe von unendlich vielen solchen Mannigfaltigkeiten besteht, Mannigfaltigkeiten von nicht weniger als $n-1$ Dimensionen sind. —

In den Nummern 25.—29. der genannten Abhandlung habe ich von Systemen von Gleichungen 2. O. gesprochen, die charakteristische M_1 und von ihnen erzeugte Integral-M_n zur grösstmöglichen Zahl gemeinsam besitzen*). Dabei habe ich bemerkt, dass, wenn die Anzahl der Gleichungen des Systems drei, vier, $\cdots$ ist, die ersten Derivirten derselben in Bezug auf x_1, $\cdots$ x_n sich resp. auf $3n-3$, $4n-6$, $\cdots$ Gleichungen reduciren. Dass dieses eine für Gleichungssysteme mit Integral-M_n zur grösstmöglichen Zahl und charakteristischen M_1 völlig charakteristische Bedingung ist, hatte ich damals nur für den Fall eines Systems von n Gleichungen erkannt. *Aber alle Systeme von drei, vier, $\cdots$ Gleichungen 2. O., deren erste Derivirte in Bezug auf x_1, $\cdots$ x_n sich resp. auf $3n-3$, $4n-6$, $\cdots\cdot$ Gleichungen reduciren, haben nicht nur Integral-M_n zur grösstmöglichen Zahl, sondern auch charakteristische M_1 gemein.* Dagegen kann es Systeme von Gleichungen 2. O. geben, mit Integral-M_n zur grösstmöglichen Zahl, aber ohne charakteristische M_1, — und von den ersten Derivirten der Gleichungen eines solchen Systems sind auch einige von den übrigen abhängig, aber die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen, auf die jene Derivirten sich reduciren, ist grösser als die entsprechende Zahl für das aus derselben Anzahl Gleichungen bestehende System der erstgenannten Art. Z. B.: *vier Gleichungen 2. O., von denen drei als Integrale verschiedener Schaaren einer linearen partiellen Differentialgleichung 3. O. zugehören, können*

*) Die Systeme der Nr. 25., 26. sind Systeme speciellerer Art. Sie gehören nämlich zu den in Nr. 29. betrachteten Systemen. (Man setze nur $k=2$.)

ein System bilden, mit Integral-M_n zur grösstmöglichen Zahl, aber ohne charakteristische M_1. Ihre ersten Derivirten reduciren sich auf $4n-4$ *Gleichungen.*

Hiermit wollte ich insbesondere eine am Ende der 27. Nr. meiner letzten Abhandlung gemachte Angabe berichtigt oder wenigstens näher erläutert haben.

Den ersten der oben hervorgehobenen Sätze zu beweisen, ist einer der Zwecke der folgenden Mittheilung.

---

1. Jedem Punkte einer Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen:

$$z = f(x_2 \cdots x_n),$$
$$x_1 = \varphi(x_2 \cdots x_n),$$

schliesst sich eine einfach unendliche Schaar von Werthen von p_1, $p_2, \cdots p_n$ an:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - p_i = 0, \quad (i = 2, 3, \cdots n).$$

Und ebenso schliesst sich jedem Elemente $(z x_i p_i)$ einer Mannigfaltigkeit von ∞^{n-1} Flächenelementen:

$$z = f(x_2, \cdots x_n),$$
$$x_1 = \varphi(x_2, \cdots x_n),$$
$$p_1 = \chi(x_2, \cdots x_n), -$$

wo $p_2, \cdots p_n$ durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmt werden — eine Schaar von einfach unendlich vielen p_{ik} (d. i. zweite Differentialquotienten von z) an, gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} - p_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - p_{12} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_3} - p_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - p_{13} = 0, \cdots \frac{\partial p_1}{\partial x_n} - p_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - p_{1n} = 0,$$
$$\frac{\partial p_2}{\partial x_2} - p_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - p_{22} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x_3} - p_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - p_{23} = 0, \cdots \frac{\partial p_2}{\partial x_n} - p_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - p_{2n} = 0,$$
$$\frac{\partial p_3}{\partial x_3} - p_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - p_{33} = 0, \cdots \frac{\partial p_3}{\partial x_n} - p_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - p_{3n} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial p_n}{\partial x_n} - p_{n1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - p_{nn} = 0,$$

in denen selbstverständlich für $p_1, p_2, \cdots p_n$ die der M_{n-1} zukommenden Werthe zu setzen sind.

Und jedem Elemente einer Reihe von ∞^{n-1} vereinigt liegenden Elementen $(z x_i p_i p_{ik})$:

$$\begin{aligned} z &= f(x_2, \cdots x_n)\,, \\ x_1 &= \varphi(x_2, \cdots x_n)\,, \\ p_1 &= \chi(x_2, \cdots x_n)\,, \\ p_{11} &= \chi_1(x_2, \cdots x_n)\,, \end{aligned}$$

($p_2, \cdots p_n,\ p_{12}, \cdots p_{nn}$ bestimmt durch die vorangehenden Gleichungen) gehört eine Schaar von einfach unendlich vielen p_{iki}, den dritten Differentialquotienten von z, nämlich die folgende Schaar zu:

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial p_{11}}{\partial x_2} - p_{111}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - p_{112} = 0, & \frac{\partial p_{11}}{\partial x_3} - p_{111}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - p_{113} = 0, & \frac{\partial p_{11}}{\partial x_4} - p_{111}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - p_{114} = 0, \cdots \\
\frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} - p_{121}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - p_{122} = 0, & \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3} - p_{121}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - p_{123} = 0, & \frac{\partial p_{12}}{\partial x_4} - p_{121}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - p_{124} = 0, \cdots \\
 & \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} - p_{131}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - p_{133} = 0, & \frac{\partial p_{13}}{\partial x_4} - p_{131}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - p_{134} = 0, \cdots \\
 & & \frac{\partial p_{14}}{\partial x_4} - p_{141}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - p_{144} = 0, \cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} - p_{221}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - p_{222} = 0, & \frac{\partial p_{22}}{\partial x_3} - p_{221}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - p_{223} = 0, & \frac{\partial p_{22}}{\partial x_4} - p_{221}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - p_{224} = 0, \cdots \\
 & \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} - p_{231}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - p_{233} = 0, & \frac{\partial p_{23}}{\partial x_4} - p_{231}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - p_{234} = 0, \cdots \\
 & & \frac{\partial p_{24}}{\partial x_4} - p_{241}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - p_{244} = 0, \cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
 & \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} - p_{331}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - p_{333} = 0, & \frac{\partial p_{33}}{\partial x_4} - p_{331}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - p_{334} = 0, \cdots \\
 & & \frac{\partial p_{34}}{\partial x_4} - p_{341}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - p_{344} = 0, \cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Hieraus folgt erstens, dass durch eine beliebige partielle Differentialgleichung 2. O. jedem Elemente jeder Mannigfaltigkeit von ∞^{n-1} vereinigt liegenden Elementen (zxp), d. i. jedem Elemente jeder M_{n-1}, gewisse Werthsysteme von der Gleichung 2. O. und der M_{n-1} gemeinsam zugehörenden p_{ik} zugeordnet werden. Zweitens aber, dass auch einem jeden der so bestimmten Elemente $(z\,x_i\,p_i\,p_{ik})$ ein Werthsystem der dritten Differentialquotienten p_{ikl} zugeordnet wird, das der M_{n-1} und der Gleichung 2. O. zu gleicher Zeit zugehört, ferner ein eben solches Werthsystem der vierten Differentialquotienten von z, u. s. w.

Denn dass alle diejenigen ∞^{n-2} Elemente $(z + dz\ x_i + dx_i \cdots \cdots p_{ik} + dp_{ik})$, die unserer Mannigfaltigkeit von ∞^{n-1} vereinigt liegenden Elementen $(z x_i p_i p_{ik})$ zugehören und einem beliebigen Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ derselben unendlich benachbart sind, einer und derselben

partiellen Differentialgleichung 2. O. $F=0$ genügen, drückt sich algebraisch so aus: Von den Gleichungen, denen diejenigen p_{ikl} zu genügen haben, die jenem Elemente $(zx_ip_ip_{ik})$ jener M'_{n-1}*) zugehören, müssen $n-1$ von der Form sein:

$$\lambda_1^{(i)}\frac{dF}{dx_1}+\lambda_2^{(i)}\frac{dF}{dx_2}+\cdots+\lambda_n^{(i)}\frac{dF}{dx_n}=0.$$
$$(i=1,2,\cdots n-1).$$

Die Gleichungen aber, welche die der Gleichung 2. O. zugehörenden p_{ikl} erfüllen, sind diese:

$$\frac{dF}{dx_1}=0,\quad \frac{dF}{dx_2}=0,\cdots \frac{dF}{dx_n}=0,$$

und den früheren Gleichungen, den Gleichungen für die eben genannten p_{ikl} der M'_{n-1}, hinzugefügt wirken sie also nur wie *eine* neue Gleichung. Da nun weiter alle die Gleichungen, die für unsere p_{ikl} gelten, linear sind, so folgt hieraus, dass durch eine partielle Differentialgleichung 2. O. ein einziges von den der M'_{n-1} zugehörenden Werthsystemen der dritten Differentialquotienten von z, eins der vierten etc. ausgeschieden wird, — wie oben behauptet wurde.

2. Die obigen Gleichungen für die der M'_{n-1} zugehörenden Werthe der p_{ikl} schreibe ich jetzt so:

$$p_{121}=a_{121}-p_{111}\frac{\partial x_1}{\partial x_2},\qquad \cdots p_{1n1}=a_{1n1}-p_{111}\frac{\partial x_1}{\partial x_n},$$

$$p_{221}=a_{221}-a_{121}\frac{\partial x_1}{\partial x_2}+p_{111}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^2,\cdots p_{2n1}=a_{2n1}-a_{121}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+p_{111}\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_n},$$

. . . .

$$p_{nn1}=a_{nn1}-a_{1n1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+p_{111}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2,$$

und erhalte dann durch Anwendung irgend einer der letzten Gleichungen der vorigen Nummer, z. B. der Gleichung $\frac{dF}{dx_1}=0$, die ich so schreibe:

$$A_{11}p_{111}+A_{12}p_{121}+\cdots+A_{nn}p_{nn1}=U,$$

$\left(A_{ik}=\frac{\partial F}{\partial p_{ik}}\right)$, denjenigen Werth von p_{111}, der durch die partielle Gleichung 2. O. dem Elemente $(zx_ip_ip_{ik})$ der obigen M'_{n-1} zugeordnet wird. Die Gleichung, die ihn bestimmt, lautet:

---

*) So bezeichne ich eine Mannigfaltigkeit von ∞^{n-1} vereinigt liegenden Elementen $(zx_ip_ip_{ik})$.

$$
\begin{aligned}
p_{111}\Big\{A_{11} &- A_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - A_{13}\frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \cdots - A_{1n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\
&+\left(A_{22}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + A_{23}\frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \cdots + A_{2n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\
&\qquad+\left(A_{33}\frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \cdots + A_{3n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial x_3} \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad+ A_{nn}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2\Big\} = V.
\end{aligned}
$$

Sie scheidet also eine gewisse, der vorliegenden M'_{n-1} zugehörende Reihe von ∞^{n-1} vereinigt liegenden Werthsystemen von $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$, ich sage, sie scheidet eine M''_{n-1} aus. Jedem Elemente $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ derselben gehört eine einfach unendliche Schaar von p_{iklm} zu, die durch Gleichungen von der Form:

$$
\begin{aligned}
&p_{1112}=a_{1112}-p_{1111}\frac{\partial x_1}{\partial x_2}, \qquad \cdots\; p_{111n}=a_{111n}-p_{1111}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}, \\
&p_{1122}=a_{1122}-a_{1112}\frac{\partial x_1}{\partial x_2}+p_{1111}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^2, \cdots\; p_{112n}=a_{112n}-a_{1112}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+p_{1111}\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

bestimmt wird. Und weil alle die fraglichen $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ der partiellen Differentialgleichung 2. O. zugehören, so ordnet diese Gleichung vermittelst der eben hingeschriebenen Gleichungen und der Gleichung:

$$\frac{d^2 F}{d x_1^2} = 0,$$

die von der Form ist:

$$A_{11}p_{1111} + A_{12}p_{1211} + \cdots + A_{nn}p_{nn11} = W,$$

jedem der genannten Elemente ein Werthsystem von, der M''_{n-1} zugehörenden p_{iklm} zu.

In Folge dessen erhält man für den fraglichen Werth von p_{1111} eine Gleichung von der Form:

$$
\begin{aligned}
p_{1111}\Big\{A_{11} &- A_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - A_{1n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\
&+\left(A_{22}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \cdots + A_{2n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad+ A_{nn}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2\Big\} = W'.
\end{aligned}
$$

Und für das von der partiellen Gleichung 2. O. zu einer aus

Elementen dieser Gleichung bestehenden M'''_{n-1} *) zugeordnete Werthsystem der p_{iklmn} gilt Aehnliches; u. s. w. —

Nun können wir insbesondere eine folgendermassen herzuleitende M_{n-1} betrachten. *Man gehe von einer beliebigen Integral-M_n:*

$$z = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

der partiellen Gleichung 2. O. aus, setze in die Gleichung:

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} &A_{11} - A_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - A_{1n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ &\quad + \left(A_{22}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \cdots + A_{2n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + A_{nn}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2 = 0, \end{aligned}$$

für die in den A_{ik} vorkommenden Grössen z, p_i, p_{ik} die Werthe ausgedrückt in x_1, x_2, $\cdots$ x_n ein, die ihnen als Elemente jener Integral-M_n zugehören, und suche sodann eine Lösung: $x_1 = \varphi(x_2, x_3, \cdots x_n)$ dieser partiellen Gleichung 1. O. (A) **). *Die $M''^{\cdots\prime}_{n-1}$, die durch die Gleichungen:*

$$\begin{aligned} z &= f(x_1, x_2, \cdots x_n), \\ x_1 &= \varphi(\quad x_2, \cdots x_n), \\ p_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ p_{11} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

dargestellt wird, ist eine Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen einer besonderen Art. — Sehen wir dieselbe zunächst nur als eine M'_{n-1}, d. h. als einen Inbegriff von ∞^{n-1} Elementen $(z x_i p_i p_{ik})$ an, so haben wir dieselbe in dem Sinne als eine ausgezeichnete M'_{n-1} zu betrachten, als alle die ∞^1 Werthsysteme von p_{ikl}, die ihr in einem beliebigen Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ zugehören, eben der partiellen Gleichung 2. O. genügen. Und als eine M''_{n-1} betrachtet, besitzt sie hinsichtlich ihrer p_{iklm} denselben Charakter wie als M'_{n-1} hinsichtlich ihrer p_{ikl}, u. s. w. — Während also nach dem, was oben von einer beliebigen M'_{n-1} aus-

---

*) So bezeichne ich eine Mannigfaltigkeit von ∞^{n-1} vereinigt liegenden $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl} p_{iklm})$.

**) Die Gleichung (A) würde möglicherweise eine durch zwei, drei, $\cdots$ Gleichungen ausgedrückte Lösung besitzen können. Diese Lösung würde dann resp. einer charakteristischen M_{n-2}, M'_{n-3}, $\cdots$ zugehören. In etwas anderer Weise wird in den nächstfolgenden Nummern das Criterium solcher M'_{n-2}, M'_{n-3}, $\cdots$ angegeben.

einandergesetzt wurde, durch eine partielle Differentialgleichung 2. O. jedem Elemente einer aus Elementen $(zx_ip_ip_{ik})$ der Gleichung bestehenden M'_{n-1} ein Werthsystem von $(p_{ikl}, p_{iklm}, \cdots)$ zugeordnet wird, so entsprechen dagegen für irgend eine in der eben genannten Art construirte M'_{n-1} jedem Elemente ∞^∞ Werthsysteme von $(p_{ikl}, p_{iklm}, \cdots)$, die ihr und der Gleichung 2. O. gemeinsam sind, indem nämlich alle diejenigen Werthsysteme, die der M'_{n-1} zugehören, auch der partiellen Gleichung 2. O. zukommen. — Oder, rein geometrisch ausgedrückt:

Während man durch eine beliebige M_{n-1} nur eine (oder einige) Integral-M_n einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung 2. O. legen kann, hat man dagegen durch die Gleichung (A), *in der oben näher beschriebenen Weise, M_{n-1} bestimmt, durch welche unbegrenzt unendlich viele, nach dieser M_{n-1} einander osculirende Integral-M_n der Gleichung 2. O. hindurchgehen. Jede Integral-M_n ist von unendlich vielen solchen M_{n-1} erzeugt. Diese M_{n-1} sind als für die partielle Gleichung 2. O. charakteristische M_{n-1} zu bezeichnen.*

3. Von den Gleichungen einer M_{n-2}:

$$\begin{aligned}
z &= f(x_3, x_4, \cdots x_n),\\
x_1 &= \varphi(\qquad\qquad),\\
x_2 &= \psi(\qquad\qquad),\\
p_1 &= \chi_1(\qquad\qquad),\\
p_2 &= \chi_2(\qquad\qquad),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p_n &= \chi_n(\qquad\qquad)
\end{aligned}$$

sind die $n-2$ letzten Gleichungen von den übrigen abhängig. Man hat nämlich:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - p_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - p_2\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - p_i = 0, \quad (i = 3, 4, \cdots n),$$

wodurch $\chi_3, \chi_4, \cdots \chi_n$ durch $f, \varphi, \psi, \chi_1, \chi_2$ vollkommen bestimmt sind. Die dieser M_{n-2} zugehörenden p_{ik} sind diejenigen, welche die Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_1}{\partial x_3} - p_{11}\varphi'(x_3) - p_{12}\psi'(x_3) - p_{13} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x_3} - p_{21}\varphi'(x_3) - p_{22}\psi'(x_3) - p_{23} = 0,\\
&\frac{\partial p_1}{\partial x_4} - p_{11}\varphi'(x_4) - p_{12}\psi'(x_4) - p_{14} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x_4} - p_{21}\varphi'(x_4) - p_{22}\psi'(x_4) - p_{24} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial p_1}{\partial x_n} - p_{11}\varphi'(x_n) - p_{12}\psi'(x_n) - p_{1n} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x_n} - p_{21}\varphi'(x_n) - p_{22}\psi'(x_n) - p_{2n} = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial x_3} - p_{31}\varphi'(x_3) - p_{32}\psi'(x_3) - p_{33} = 0,$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial x_4} - p_{31}\varphi'(x_4) - p_{32}\psi'(x_4) - p_{34} = 0, \quad \frac{\partial p_4}{\partial x_4} - p_{41}\varphi'(x_4) - p_{42}\psi'(x_4) - p_{44} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial x_n} - p_{31}\varphi'(x_n) - p_{32}\psi'(x_n) - p_{3n} = 0, \quad \frac{\partial p_4}{\partial x_n} - p_{41}\varphi'(x_n) - p_{42}\psi'(x_n) - p_{4n} = 0.$$

u. s. w.

Es wird also jedem Elemente $(z x_i p_i)$ eine Schaar von $\infty^3\, p_{ik}$ zugeordnet, denn man hat drei der p_{ik}, etwa p_{11}, p_{12}, p_{22} ganz arbiträre Werthe zu ertheilen. Durch eine partielle Differentialgleichung 2. O. werden zweifach unendlich viele p_{ik} ausgeschieden. — Ich setze nun:

$$p_{11} = \chi_{11}(x_3 x_4 \cdots x_n),$$
$$p_{12} = \chi_{12}(\qquad\qquad),$$

wo die Functionen χ_{11}, χ_{12} ganz beliebig gewählt sind: durch die partielle Differentialgleichung 2. O. wird dann p_{22} und damit auch zu einem jeden Elemente der M_{n-2} ein Werthsystem von, dieser M_{n-2} und der partiellen Differentialgleichung 2. O. gemeinsam zugehörenden p_{ik} bestimmt. Der Inbegriff dieser Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ möge als eine M'_{n-2} bezeichnet werden. Die derselben zugehörenden ∞^4 Werthsysteme von p_{ikl} sind durch die Gleichungen gegeben:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x_3} - p_{111}\varphi'(x_3) - p_{112}\psi'(x_3) - p_{113} = 0,$$

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x_4} - p_{111}\varphi'(x_4) - p_{112}\psi'(x_4) - p_{114} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial p_{12}}{\partial x_3} - p_{121}\varphi'(x_3) - p_{122}\psi'(x_3) - p_{123} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial p_{22}}{\partial x_3} - p_{221}\varphi'(x_3) - p_{222}\psi'(x_3) - p_{223} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} - p_{231}\varphi'(x_3) - p_{232}\psi'(x_3) - p_{233} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial p_{24}}{\partial x_4} - p_{241}\varphi'(x_4) - p_{242}\psi'(x_4) - p_{244} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus diesen Gleichungen müssen sich nothwendig $n - 2$ Gleichungen der Form:

$$\lambda_1^{(i)} \frac{dF}{dx_1} + \cdots + \lambda_n^{(i)} \frac{dF}{dx_n} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n-2)$$

zusammensetzen lassen; denn dieses ist die Bedingung dafür, dass alle Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ der M'_{n-2} Elemente der partiellen Differentialgleichung 2. O. $F=0$ sind. Um daher diejenigen Werthe von den jener M'_{n-2} zukommenden p_{ikl} zu erhalten, die zu gleicher Zeit der partiellen Differentialgleichung $F=0$ genügen, hat man nur noch die beiden Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx_1}=0, \qquad \frac{dF}{dx_2}=0$$

hinzuzufügen.

Sie sind von der Form:

$$\begin{aligned}
A_{11}p_{111} + A_{12}p_{121} + \cdots & \\
+ A_{22}p_{221} + \cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & = U, \\
A_{11}p_{112} + A_{12}p_{122} + \cdots & \\
+ A_{22}p_{222} + \cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & = V.
\end{aligned}$$

Und wenn in dieselben die obigen Werthe von p_{ikl} eingesetzt werden, bekommt man:

$$\begin{aligned}
p_{111}\Omega_{11} + p_{112}\Omega_{12} + p_{122}\Omega_{22} + \Omega &= 0, \\
p_{211}\Omega_{11} + p_{212}\Omega_{12} + p_{222}\Omega_{22} + \Omega' &= 0,
\end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} = A_{11} - A_{13}\frac{\partial x_1}{\partial x_3} - A_{14}\frac{\partial x_1}{\partial x_4} - \cdots\cdots & \\
+ \left(A_{33}\frac{\partial x_1}{\partial x_3} + A_{34}\frac{\partial x_1}{\partial x_4} + \cdots\right)\frac{\partial x_1}{\partial x_3} & \\
+ \left(A_{44}\frac{\partial x_1}{\partial x_4} + \cdots\right)\frac{\partial x_1}{\partial x_4} & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{12} = A_{12} - A_{13}\frac{\partial x_2}{\partial x_3} - A_{14}\frac{\partial x_2}{\partial x_4} - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
- A_{23}\frac{\partial x_1}{\partial x_3} - A_{24}\frac{\partial x_1}{\partial x_4} - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
+ \left(2A_{33}\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_2}{\partial x_3} + A_{34}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_2}{\partial x_4} + \frac{\partial x_1}{\partial x_4}\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right) + \cdots\right) & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{22} = A_{22} - A_{23}\frac{\partial x_2}{\partial x_3} - A_{24}\frac{\partial x_2}{\partial x_4} - \cdots\cdots & \\
+ \left(A_{33}\frac{\partial x_2}{\partial x_3} + A_{34}\frac{\partial x_2}{\partial x_4} + \cdots\right)\frac{\partial x_2}{\partial x_3} & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

Die M'_{n-2} würde also dann, und nur dann, eine für die partielle Differentialgleichung 2. O. ausgezeichnete Bedeutung haben, wenn die drei Gleichungen:

$$\Omega_{11} = 0, \quad \Omega_{12} = 0, \quad \Omega_{22} = 0$$

erfüllt wären. In diesem Falle würden eben alle diejenigen Werthsysteme von $(z x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$, die der M'_{n-2} zugehören, auch der Gleichung 2. O. genügen können. Solche M'_{n-2} bezeichne ich als charakteristische M'_{n-2}. Also: *Jede partielle Differentialgleichung 2. O. hat charakteristische M'_{n-1}; dagegen finden sich charakteristische M'_{n-2} zur grösstmöglichen Zahl, so dass sie alle Elemente der bez. Gleichung erfüllen, nur bei einer gewissen Gattung partieller Differentialgleichungen 2. O. — Den analytischen Ausdruck dieser Gattung erhält man, wenn man die Bedingung dafür aufstellt, dass die Gleichungen $\Omega_{11} = 0$, $\Omega_{12} = 0$, $\Omega_{22} = 0$, $F = 0$ gemeinsame Lösungen:*

$$\begin{aligned} z &= f\ (x_3, x_4, \cdots x_n), \\ x_1 &= \varphi\ (\qquad\qquad), \\ x_2 &= \psi\ (\qquad\qquad), \\ p_i &= \chi_i\ (\qquad\qquad), \\ p_{ik} &= \chi_{ik}(\qquad\qquad), \end{aligned}$$

besitzen, die alle Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ von $F = 0$ umfassen. Nicht jede für $F = 0$ charakteristische M'_{n-1} braucht von charakteristischen M'_{n-2} erzeugt zu sein.

4. In dieser Gattung von Gleichungen 2. O. ist insbesondere eine Gattung von Gleichungen enthalten, für welche nicht nur charakteristische M'_{n-1}, M'_{n-2}, sondern auch charakteristische M'_{n-3} existiren. Für die Existenz einer charakteristischen M'_{n-3} ist erforderlich, dass einem gewissen Systeme von sechs Gleichungen mit $n-4$ unabhängigen Variablen: $x_4, x_5, \cdots x_n$, etwa dem Systeme:

$$\Omega_{11} = 0, \quad \Omega_{12} = 0, \quad \Omega_{13} = 0, \cdots \Omega_{33} = 0,$$

durch die Gleichungen jener M'_{n-3}:

$$\begin{aligned} z &= f\ (x_4, \cdots x_n), \\ x_1 &= \varphi\ (\qquad\quad), \\ x_2 &= \psi\ (\qquad\quad), \\ x_3 &= \chi\ (\qquad\quad), \\ p_i &= \chi_i\ (\qquad\quad), \\ p_{ik} &= \chi_{ik}(\qquad\quad), \end{aligned}$$

genügt werde.

Allgemein: *Es giebt partielle Differentialgleichungen 2. O. mit charakteristischen M'_{n-k} zur grösstmöglichen Zahl, welche also alle Elemente der bez. Gleichung erfüllen. Diese Gleichungen $F(z x_i p_i p_{ik}) = 0$ sind analytisch durch die Bedingung definirt, dass die Gleichung $F = 0$ mit einem gewissen Systeme von $\frac{k(k+1)}{2}$ Gleichungen $\Omega_{ik} = 0$ Lösungen:*

$$\begin{aligned}
z &= f\;(x_{k+1}, \cdots x_n),\\
x_1 &= \varphi_1\;(\qquad\qquad),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_k &= \varphi_k\;(\qquad\qquad),\\
p_i &= \chi_i\;(\qquad\qquad),\\
p_{ik} &= \chi_{ik}\;(\qquad\qquad),
\end{aligned}$$

die alle Elemente $(zx_ip_ip_{ik})$ *von* $F=0$ *umfassen, gemein haben muss. Nicht jede charakteristische Mannigfaltigkeit höherer Dimensionszahl braucht aus solchen* M'_{n-k} *zu bestehen*

5. Betrachten wir insbesondere den Fall von charakteristischen M'_1. — Die p_{ikl}, die einem Elemente $(zx_ip_ip_{ik})$ einer einfachen Reihe von vereinigt liegenden solchen Elementen durch eben diese Reihe zugeordnet werden, sind die durch die folgenden Gleichungen bestimmten:

$$dp_{ik} = p_{ik1}\,dx_1 + p_{ik2}\,dx_2 + \cdots + p_{ikn}\,dx_n,$$
$$(i, k = 1, 2, \cdots n)$$

wo $dx_1, dx_2, \cdots dx_n, dp_{ik}$ die jener Reihe zugehörenden Werthe haben.

Ich nehme an, dass die Elemente $(zx_ip_ip_{ik})$ der Reihe die partielle Differentialgleichung 2. O. $F=0$ befriedigen. Dann werden durch die eben hingeschriebenen Gleichungen und durch diese:

$$\frac{dF}{dx_1}=0, \quad \frac{dF}{dx_2}=0, \cdots \frac{dF}{dx_{n-1}}=0$$

Werthe der p_{ikl} ausgeschieden, die gleichzeitig der Gleichung 2. O. und jener Reihe zugehören. Durch Elimination von je n der Grössen p_{ikl} mittelst des ersteren Gleichungssystems gehen die letzteren Gleichungen in die folgenden über:

$$\begin{aligned}
&p_{122}\Omega_{22}+p_{123}\Omega_{23}+p_{124}\Omega_{24}+\cdots+p_{133}\Omega_{33}+p_{134}\Omega_{34}+\cdots+p_{1nn}\Omega_{nn}=U,\\
&p_{222}\Omega_{22}+p_{223}\Omega_{23}+p_{224}\Omega_{24}+\cdots+p_{233}\Omega_{33}+p_{234}\Omega_{34}+\cdots+p_{2nn}\Omega_{nn}=U',\\
&p_{322}\Omega_{22}+p_{323}\Omega_{23}+p_{324}\Omega_{24}+\cdots+p_{333}\Omega_{33}+p_{334}\Omega_{34}+\cdots+p_{3nn}\Omega_{nn}=U'',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned}
\Omega_{22} &= A_{11}\,dx_2^2 - A_{12}\,dx_2\,dx_1 + A_{22}\,dx_1^2,\\
\Omega_{33} &= A_{11}\,dx_3^2 - A_{13}\,dx_3\,dx_1 + A_{33}\,dx_1^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Omega_{nn} &= A_{11}\,dx_n^2 - A_{1n}\,dx_n\,dx_1 + A_{nn}\,dx_1^2,\\
\Omega_{ik} &= 2A_{11}\,dx_i dx_k - A_{1i}\,dx_k dx_1 - A_{1k}\,dx_i dx_1 + A_{ik}\,dx_1^2,
\end{aligned}$$

und i, k zwei verschiedene der Zahlen $2, 3, \cdots n$ bezeichnen.

Wir haben also eine ausgezeichnete M'_1, falls die Differentialquotienten A_{ik} von F so beschaffen sind, dass die Gleichungen:

$$\Omega_{22}=0, \quad \Omega_{23}=0, \cdots \Omega_{nn}=0,$$

von den Richtungscoefficienten $(dx_1, \cdots dx_n)$ erfüllt werden, — und

nur in dem Falle, dass jene Gleichungen mit einander verträglich sind, kann es M_1' (zu einer grösstmöglichen Zahl) von einem ausgezeichneten Charakter geben, M_1', deren sämmtliche Elemente $(z\,x_i p_i p_{ik} p_{ikl})$ der partiellen Differentialgleichung 2. O. zugehören.

Jene Gleichungen $\Omega_{ii} = 0$, $\Omega_{ik} = 0$ können wir durch die folgenden ersetzen:

$$A_{ik} = A_{ii}\,\frac{dx_k}{dx_i} + A_{kk}\,\frac{dx_i}{dx_k},$$

wo wieder i, k zwei verschiedene Zahlen $1, 2, \cdots n$ bezeichnen.

Diese Gleichungen können wir auch so schreiben:

$$A_{ik} = \left(\frac{A_{kk}}{dx_k} : \frac{A_{ii}}{dx_i}\right) A_{ii} + \left(\frac{A_{ii}}{dx_i} : \frac{A_{kk}}{dx_k}\right) A_{kk}. —$$

Wenn also jene Gleichungen $\Omega = 0$ ein System Lösungen besitzen:

$$dx_1 = a_1, \quad dx_2 = a_2, \cdots dx_n = a_n,$$

so besitzen sie nothwendig auch ein zweites System Lösungen:

$$dx_1 = \frac{A_{11}}{a_1}, \quad dx_2 = \frac{A_{22}}{a_2}, \cdots dx_n = \frac{A_{nn}}{a_n}.$$

D. h. *Wenn eine partielle Differentialgleichung 2. O. jedem ihrer Elemente eine Richtung einer charakteristischen M_1 zuertheilt, so muss nothwendig noch eine zweite Richtung einer zweiten charakteristischen M_1 existiren. Oder: wenn auf einer Integral-M_n einer partiellen Differentialgleichung 2 O. sich eine, die M_n ganz bedeckende Schaar charakteristischer M_1 findet, so findet sich auf derselben M_n nothwendig noch eine zweite Schaar derartiger M_1.*

---

6. Zwei partielle Differentialgleichungen 2. O. $F = C$, $\Phi = C$ können so mit einander verbunden sein, dass von den $2n$ Gleichungen

$$\frac{dF}{dx_1} = 0, \cdots \frac{dF}{dx_n} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx_1} = 0, \cdots \frac{d\Phi}{dx_n} = 0,$$

die sie für die dritten Differentialquotienten von z ergeben, eine stets eine algebraische Folge der anderen ist. *Dann müssen diese Gleichungen gemeinsame Integral-M_n zu einer solchen Zahl besitzen, dass durch jede ihnen gemeinsame M_{n-1}' eine ihnen gemeinsame Integral-M_n hindurchgeht.* Denn es giebt jetzt eine lineare partielle Differentialgleichung 3. O. von der Form:

$$\lambda_1\,\frac{dF}{dx_1} + \lambda_2\,\frac{dF}{dx_2} + \cdots + \lambda_n\,\frac{dF}{dx_n} = 0,$$

die sowohl $F = C$ als $\Phi = C$ als erstes Integral besitzt. Durch jede M_{n-1}' geht eine, und nur eine Integral-M_n dieser Gleichung; sie ist, falls die M_{n-1}' aus gemeinsamen Elementen von $F = C$, $\Phi = C$ zu-

sammengesetzt ist, eine für $F=C$, $\Phi=C$ gemeinsame Integral-M_n, — denn sonst würden diese Gleichungen 2. O. keine Integral-M_n haben, die Integrale der partiellen Differentialgleichung 3. O. wären, so dass $F=C$, $\Phi=C$ keine ersten Integrale dieser Gleichung sein könnten.

Aber unter den, jenen Gleichungen 2. O. $F=C$, $\Phi=C$ gemeinsamen M'_{n-1} giebt es gewisse, die mehrere Integral-M_n bestimmen. Denn von den Gleichungen für diejenigen p_{ikl}, die einem beliebigen Elemente $(z x_i p_i p_{ik})$ einer, den Gleichungen 2. O. gemeinsamen M'_{n-1} zugehören, sind, nach der 1. Nummer, $n-1$ Gleichungen von der Form:

$$\lambda_1^{(i)} \frac{dF}{dx_1} + \lambda_2^{(i)} \frac{dF}{dx_2} + \cdots + \lambda_n^{(i)} \frac{dF}{dx_n} = 0,$$
$$(i=1, 2, \cdots n-1)$$

und $n-1$ Gleichungen von der Form:

$$\mu_1^{(i)} \frac{d\Phi}{dx_1} + \mu_2^{(i)} \frac{d\Phi}{dx_2} + \cdots + \mu_n^{(i)} \frac{d\Phi}{dx_n} = 0,$$
$$(i=1, 2, \cdots n-1),$$

wesshalb die Zufügung der einzigen Gleichung:

$$\frac{dF}{dx_1} = 0$$

ausreicht*), um auf der M'_{n-1} Werthe von p_{ikl} auszuscheiden, die dieser und den beiden Gleichungen 2. O. zu gleicher Zeit zugehören.

Daher muss, wenn man durch: $z=f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ eine für $F=C$, $\Phi=C$ gemeinsame Integral-M_n bezeichnet, und $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $p_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ setzt, die Gleichung:

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{12} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - A_{1n} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ + \left(A_{22} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \cdots + A_{2n} \frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + A_{nn} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2 = 0, \quad \left(A_{ik} = \frac{\partial F}{\partial p_{ik}}\right) \end{aligned}$$

als partielle Differentialgleichung 1. O. für x_1 aufgefasst, entweder (vgl. die 2. Nummer) zu Mannigfaltigkeiten M'_{n-1}, deren sämmtliche p_{ikl} den beiden Gleichungen 2. O. $F=C$, $\Phi=C$ gemeinsam angehören, oder zu Mannigfaltigkeiten mit nur einem, der Gleichung $\Phi=C$ zugehörenden, für dieselbe ausgezeichneten Werthsysteme jener p_{ikl} führen.

---

*) Nach der für F, Φ gemachten Voraussetzung werden nämlich die Gleichungen $\frac{d\Phi}{dx_i} = 0$ nun ebenfalls erfüllt.

Dass beide Fälle wirklich eintreten, sehen wir aus der algebraischen Formulirung des vorausgesetzten Zusammenhanges zwischen F und Φ. Es soll nämlich identisch sein:

$$\lambda_1 \frac{dF}{dx_1} + \lambda_2 \frac{dF}{dx_2} + \cdots + \mu_1 \frac{d\Phi}{dx_1} + \mu_2 \frac{d\Phi}{dx_2} + \cdots = 0,$$

also*):

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 A_{11} + \mu_1 B_{11} = 0,\\
&\lambda_1 A_{12} + \lambda_2 A_{11} + \mu_1 B_{11} + \mu_2 B_{11} = 0,\\
&\lambda_1 A_{13} + \lambda_3 A_{11} + \mu_1 B_{13} + \mu_3 B_{11} = 0,\\
&\lambda_1 A_{14} + \lambda_4 A_{11} + \mu_1 B_{11} + \mu_3 B_{11} = 0,\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_1 A_{22} + \lambda_2 A_{21} + \mu_1 B_{22} + \mu_2 B_{21} = 0,\\
&\lambda_1 A_{23} + \lambda_2 A_{31} + \lambda_3 A_{12} + \mu_1 B_{23} + \mu_2 B_{31} + \mu_3 B_{12} = 0,\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_1 A_{33} + \lambda_3 A_{31} + \mu_1 B_{33} + \mu_3 B_{31} = 0,\\
&\lambda_1 A_{34} + \lambda_3 A_{41} + \lambda_4 A_{13} + \mu_1 B_{34} + \mu_3 B_{41} + \mu_4 B_{13} = 0,\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_2 A_{22} + \mu_2 B_{22} = 0,\\
&\lambda_2 A_{23} + \lambda_3 A_{22} + \mu_2 B_{23} + \mu_3 B_{22} = 0,\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit bez. $1, -\frac{\partial x_1}{\partial x_2}, -\frac{\partial x_1}{\partial x_3}, -\frac{\partial x_1}{\partial x_4},$
$\cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^2, \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right), \cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\right)^2, \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_4}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\right), \cdots -\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^3, -\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^2, \cdots$
und Summirung:

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \lambda_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \cdots - \lambda_n \frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\Big(A_{11} - A_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - A_{1n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\\
&\qquad\qquad + \left(A_{22}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \cdots + A_{2n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad + A_{nn}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2\Big)\\
&+\left(\mu_1 - \mu_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \mu_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \cdots - \mu_n \frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\Big(B_{11} - B_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - B_{1n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\\
&\qquad\qquad + \left(B_{22}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \cdots + B_{2n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad + B_{nn}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2\Big) = 0.
\end{aligned}$$

---

*) $\frac{dF}{dx_i} = A_{11} p_{11i} + A_{12} p_{12i} + \cdots, \qquad \frac{d\Phi}{dx_i} = B_{11} p_{11i} + B_{12} p_{12i} + \cdots$

Ein Integral: $z=f(x_1, x_2, \cdots x_n)$, $x_1=\varphi(x_2, \cdots x_n)$, $p_i=\chi_i(x_2, \cdots x_n)$, $p_{ik}=\chi_{ik}(x_2, \cdots x_n)$, der Gleichungen für die charakteristischen M'_{n-1} von $F=C$:

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - A_{1n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ + \left(A_{22}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \cdots + A_{2n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + A_{nn}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2 = 0, \quad F=C, \end{aligned}$$

das zu gleicher Zeit der Gleichung $\Phi = C$ genügt,*) ist folglich entweder ein Integral von:

$$\mu_1 - \mu_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - \mu_n\frac{\partial x_1}{\partial x_n} = 0,$$

oder ein Integral der Gleichungen:

$$\begin{aligned} B_{11} - B_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - B_{1n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ + \left(B_{22}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \cdots + B_{2n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + B_{nn}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2 = 0, \quad \Phi = C. \end{aligned}$$

Wie durch Elimination der Grössen B aus dem obigen Gleichungssysteme ersichtlich ist, gelten die Relationen:

$$A_{ik} = A_{ii}\frac{\mu_k}{\mu_i} + A_{kk}\frac{\mu_i}{\mu_k},$$

(i, k zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \cdots n$)

so dass

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - A_{1n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ + \left(A_{22}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \cdots + A_{2n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + A_{nn}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2 \end{aligned}$$

gleich ist dem Producte:

$$\left(\mu_1 - \mu_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - \mu_n\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\left(\frac{A_{11}}{\mu_1} - \frac{A_{22}}{\mu_2}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \frac{A_{33}}{\mu_3}\frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \cdots - \frac{A_{nn}}{\mu_n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right);$$

*) D. h. geometrisch: das eine M'_{n-1} darstellt, die auf einer für $F=C$, $\Phi=C$ gemeinsamen Integral-M_n gelegen und speciell für $F=C$ eine charakteristische M'_{n-1} ist.

und aus demselben Grunde

$$B_{11} - B_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - B_{1n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}$$
$$+ \left(B_{22}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \cdots + B_{2n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$+ B_{nn}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)^2$$

gleich ist:

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - \lambda_n\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)\left(\frac{B_{11}}{\lambda_1} - \frac{B_{22}}{\lambda_2}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - \frac{B_{nn}}{\lambda_n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right).$$

Weiter erhält man:

$$\frac{B_{11}}{\lambda_1} = -\frac{A_{11}}{\mu_1}, \quad \frac{B_{22}}{\lambda_2} = -\frac{A_{22}}{\mu_2}, \ldots \frac{B_{nn}}{\lambda_n} = -\frac{A_{nn}}{\mu_n},$$

so dass die Gleichungen:

$$\frac{A_{11}}{\mu_1} - \frac{A_{22}}{\mu_2}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \cdots - \frac{A_{nn}}{\mu_n}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} = 0, \quad F = C, \ \Phi = C,$$

auf M'_{n-1} führen, *die für $F = C$, $\Phi = C$ gemeinsame charakteristische M'_{n-1} sind.*

Diese charakteristischen M'_{n-1} sind von charakteristischen M'_1 erzeugt, nämlich von den, die folgenden Gleichungen erfüllenden M'_1:

$$dx_1 = \frac{A_{11}}{\mu_1}, \quad dx_2 = \frac{A_{22}}{\mu_2}, \cdots dx_n = \frac{A_{nn}}{\mu_n}.$$

Auf jeder gemeinsamen Integral-M_n von $F = C$, $\Phi = C$ existiren noch zwei Schaaren von ausgezeichneten M_1; die eine befriedigt die Gleichungen:

$$dx_1 = \mu_1, \quad dx_2 = \mu_2, \cdots dx_n = \mu_n,$$

und besteht also aus für $F = C$ charakteristischen M_1, die andere befriedigt die Gleichungen:

$$dx_1 = \lambda_1, \quad dx_2 = \lambda_2, \cdots dx_n = \lambda_n,$$

und besteht also aus für $\Phi = C$ charakteristischen M_1.

Ich habe, wie in der Einleitung bemerkt, früher (in diesen Annalen Bd. XIII. p. 105—107) von Systemen von Gleichungen 2. O. gesprochen, die gemeinsame Integral-M_n mit gemeinsamen charakteristischen M_1 besitzen, und zugleich angegeben, wie die ersten Derivirten jener Gleichungen von einander abhängen, indem ich die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen bestimmte, auf die sich diese Derivirten reduciren müssen. Ich hatte aber nicht gezeigt, dass

hierdurch alle solche Gleichungssysteme definirt sind*). Dies folgt aber ohne Weiteres aus dem eben Auseinandergesetzten, *so dass ein jedes System von drei, vier, etc. Gleichungen 2. O., deren erste Derivirte sich auf bez.* $3n-3$, $4n-6$, *etc. Gleichungen reduciren, nicht nur Integral-*M_n *zur grösstmöglichen Zahl, sondern auch charakteristische* M_1' *besitzt.*

Denn z. B. drei Gleichungen 2. O.: $F=C$, $\Phi=C$, $\Psi=C$, deren erste Derivirte auf $3n-3$ Gleichungen sich reduciren, gehören paarweise einer linearen partiellen Differentialgleichung 3. O. als erste Integrale an.

Man hat also drei verschiedene Gleichungen 3. O., die den drei Combinationen der drei Gleichungen 2. O. zu je zweien zugeordnet werden. Deshalb müssen die drei Gleichungen 2. O. eine Charakteristikenschaar *gemeinsam* besitzen, denn sonst würden sie sich als Integrale *einer und derselben* linearen partiellen Differentialgleichung 3. O. darstellen lassen**). Dann aber würden ihre ersten Derivirten sich nur auf $3n-2$ von einander unabhängige Gleichungen reduciren.

---

*) Die Systeme der Nr: 25., 26. der früheren Abhandlung sind specielle Systeme dieser Art, nämlich an die beschränkenden Bedingungen gebunden, dass von ihren drei Gleichungen $u=C$, $v=C$, $w=C$ je zwei (z. B. $v=C$, $w=C$) mit $n-1$ anderen Gleichungen ($u_1=C$, $u_2=C, \cdots u_{n-1}=C$) Systeme von eben derselben Art bilden sollen.

**) In dem Falle nämlich, dass $F=C$, $\Phi=C$ eine andere Charakteristikenschaar gemein hätten, als $\Phi=C$, $\Psi=C$ und $\Psi=C$, $F=C$, würden die lineare Gleichung, der $F=C$, $\Phi=C$ als erste Integrale zugehören, und die lineare Gleichung, von der $\Phi=C$, $\Psi=C$ erste Integrale sind, jedem Elemente $(zx_ip_ip_{ik})$ dieselben drei charakteristischen Richtungen zuordnen und ausserdem ein gemeinsames Integral $\Phi=C$ besitzen. Das ist aber unmöglich, wenn nicht die beiden linearen Gleichungen 3. O. in eine zusammenfallen.

Nachträgliche Berichtigungen

zu dem Aufsatze: „Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen."

Math. Annalen Bd. XIII.

S. 74 Z. 2 v. u. lies *ersten. Integralen* statt *Integralen.*
S. 90 Z. 13 v. o. lies *vierten Differentialquotienten* statt *Differentialquotienten.*
S. 92 Z. 15 v. o. lies *fünften Differentialquotienten* statt *Differentialquotienten.*
S. 93 Z. 3 v. u. lies *Richtungen der Linienelemente* statt *Linienelemente.*
S. 94 Z. 2 v. u. lies *einer* statt *erster.*

Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurven nullten Geschlechts.

Von

H. Schubert in Hamburg.

(Zweite Abhandlung der „Beiträge zur abzählenden Geometrie.")

(Man vergleiche Band X, p. 1 bis 5.)

Die vorliegende, zweite Abhandlung der „Beiträge zur abzählenden Geometrie" schliesst sich auch in der *Numerirung* der Abschnitte und Paragraphen an die erste, in Band X, p. 1 bis 116, veröffentlichte Abhandlung an, so dass die Citate, welche nichts weiter als eine Abschnittsnummer oder Paragraphennummer enthalten, auf die vorliegende *und* auch auf die erste Abhandlung zu beziehen sind. Als Vorläufer dieser Abhandlung ist die Mittheilung anzusehen, welche ich im Mai des Jahres 1875 durch die Gött. Nachr. veröffentlicht habe. Beispielsweise ist die zweite Tabelle des § 50. schon dort veröffentlicht.

Der hier vorliegende Abschnitt IV. bespricht die von Chasles und Zeuthen begründete Anzahlbestimmung, bei welcher man die Anzahlen von *höheren* Gebilden auf die Anzahlen von *einfacheren* Gebilden *reducirt*. Diese Reduction wird durch Beispiele (§ 32. u. § 34.) erläutert. § 35. enthält ferner die Erweiterung der Zeuthen'schen*) Formeln für einstufige, in fester Ebene liegende Plancurvensysteme auf Plancurvensysteme *im Raume*. § 36. und § 37. bestimmen die im Folgenden benutzten *Kegelschnittanzahlen*.

Der Abschnitt V. bestimmt Anzahlen der *cubischen Plancurve mit Spitze*, der Abschnitt VI. Anzahlen der *cubischen Plancurve mit Doppelpunkt*. Bei der Reduction dieser Anzahlen auf die Anzahlen der Ausartungen der behandelten Curven sind die in Abschnitt III. entwickelten *Correspondenzformeln* benutzt (§ 40. und § 53.). Auch leisten die

---

*) Zeuthen giebt diese Formeln in § 24. seiner Abhandlung „Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver" (Vidensk. Selsk. (5) IV, p. 287 bis 393). Diese Abhandlung soll kurz mit „Alm. Eg." citirt werden.

in Abschnitt II. abgeleiteten *Incidenzformeln**) vortreffliche Dienste, sowohl dadurch, dass sie die auf die *allgemeinen* Curven bezüglichen Anzahlen *von einander abhängig* machen (§ 38. und § 52.), wie auch dadurch, dass sie die scheinbar mühsame Berechnung der *Ausartungsanzahlen erleichtern* (§ 43. bis § 47. und § 56.). Die Ausartungen sind fast sämmtlich durch eine gewisse *homographische Abbildung* aus der allgemeinen Curve erzeugt (§ 41. und § 54.). Bei der numerischen Ausrechnung ergeben sich zugleich genug Mittel, um die *Grade gewisser Gleichungen* zu erkennen, durch welche die Punkte, Tangenten, singulären Punkte und singulären Strahlen in ihrer Lage von einander abhängen (§ 51. und § 53.).

Die erste Tabelle in § 50. und die erste Tabelle in § 57. enthalten alle diejenigen auf die cubischen Plancurven bezüglichen Anzahlen, welche man kennen muss, um *die cubische Raumcurve* analog zu behandeln. Dies soll in der dritten Abhandlung geschehen, welche hoffentlich dieser zweiten Abhandlung schnell folgen wird.

IV. Abschnitt.

Allgemeine und vorbereitende Erörterungen.

§ 31.

Die Chasles-Zeuthen'sche Methode.

Die abzählende Geometrie hat als äusseres Ziel die Beantwortung aller Fragen von folgender Form:

„*Wievieldeutig ist ein Gebilde Γ von gegebener Definition und mit der Constantenzahl c durch eine einzelne oder zusammengesetzte c-fache Bedingung bestimmt?*“

Zwar beanspruchen die Zahlen, welche diese Frage beantworten, *an und für sich* kein dauerndes Interesse, obwohl sie, analytisch aufgefasst, die Grade gewisser, meist interessanter Eliminationsgleichungen sind, zu deren Aufstellung die Mittel der Algebra nur in wenigen Fällen ausreichen. Wohl aber verdienen die *Wege*, welche zu jenen Zahlen führen, das Interesse der Geometer dadurch, dass sie einen sonst kaum zu erreichenden Einblick in wichtige, analytisch oft noch nicht erkannte Eigenschaften des behandelten Gebildes Γ gewähren.

---

*) So bezeichne ich von jetzt an die in § 9. und § 10. entwickelten allgemeinen Formeln, indem ich mit Grassmann, Sturm und Andern *incident* nenne:
a) einen Punkt und einen Strahl, wenn der Punkt im Strahle liegt,
b) eine Ebene und einen Strahl, wenn der Strahl in der Ebene liegt,
c) eine Ebene und einen Punkt, wenn der Punkt in der Ebene liegt,
d) zwei Strahlen, wenn sie sich schneiden.

Die von Chasles 1864 (Comptes rendus) begründete, dann namentlich von Zeuthen durch dessen Alm. Eg. weiter ausgebaute Methode zur Bestimmung jener Anzahlen besteht wesentlich in der Aufstellung von Formeln, welche die gesuchten, dem Gebilde Γ zukommenden Anzahlen auf die als bekannt vorausgesetzten Anzahlen *anderer* einfacherer *Gebilde von kleinerer Constantenzahl* zurückführen.

Freilich lässt sich diese Zurückführung bisweilen dadurch umgehen, dass man durch *Moduln* (§ 2., p. 10) die gesuchten Anzahlen abhängig von anderen, aber *ebenfalls* Γ *angehörigen* und schon berechneten Anzahlen darstellen kann. So kann man z. B. immer durch gewisse *fundamentale* Anzahlen alle übrigen fundamentalen Anzahlen ausdrücken, und zwar vermöge der Moduln, welche der Verfasser im II. Abschnitt vom allgemeinsten Standpunkte aus aufgestellt hat. So kann man ferner bei Curven und Flächen die Anzahlen, welche sich auf die Berührungsbedingungen beziehen, durch andere Anzahlen darstellen (cf. § 28., Brill, Math. Annalen Bd. VIII, p. 534, und des Verfassers Mittheilung in den Gött. Nachr., Juli 1877, § 2.). Bei manchen Gebilden hat man sogar Gruppen von endlichvielen Bedingungen gefunden, durch welche allein *jede* andere Bedingung ausgedrückt werden kann, und in Folge dessen *Productensätze* (§ 26.) aufgestellt, d. h. die Formeln angegeben, welche die Zahl der zwei gegebenen Systemen *gemeinsamen* Elemente als Function von Anzahlen darstellen, deren jede auf das eine oder das andere der beiden Systeme *allein* Bezug nimmt. Derartige Gebilde sind z. B. der Punkt (Bezout's Fundamentalsatz der Algebra), die Ebene, der Strahl (Halphen), das aus Strahl und darauf liegendem Punkte bestehende Gebilde, das Punktepaar (der Verfasser in den Gött. Nachr. Juli 1877), und unter gewissen, von Halphen bemerkten Einschränkungen auch der Kegelschnitt und die Fläche zweiten Grades.

Für höhere Gebilde jedoch ist man vorzugsweise auf die oben zuerst erwähnte, immer mögliche *Chasles-Zeuthen'sche Reduction* der gesuchten Anzahlen auf Anzahlen *anderer* Gebilde von kleinerer Constantenzahl angewiesen. Beispielsweise führt man bei dieser Abzählungsmethode die Anzahlen, welche sich auf die im Folgenden vorzugsweise behandelte cubische Plancurve mit Spitze beziehen, auf diejenigen Anzahlen zurück, welche dem Punkte, der Ebene, dem Strahle, dem Kegelschnitte und den aus ihnen zusammengesetzten Gebilden angehören.

Die Formeln, welche diese Reductionen ermöglichen, haben zwei algebraische Quellen, erstens *das Princip von der Erhaltung der Anzahl* (§ 7.), und zweitens *das Chasles'sche Correspondenzprincip.* Aus dem ersten Princip fliessen die wichtigen *Incidenzformeln* des II. Abschnitts, aus dem zweiten Princip die allgemeinen *Correspondenzformeln*,

welche zwischen den Grundbedingungen eines Paars von Hauptelementen und denen seiner Coincidenz bestehen (Abschnitt III.). An diese letzten Formeln schliessen sich die Correspondenzformeln an, welche der Verfasser in den Math. Annalen Bd. XII, p. 180, für *Gruppen* von n Punkten und n Strahlen aufgestellt hat. Inwiefern die Incidenzformeln und die Correspondenzformeln die Chasles-Zeuthen'sche Reduction ermöglichen, wollen wir jetzt erörtern.

Man betrachte ein gewisses Paar von Hauptelementen, welches auf jedem Gebilde Γ mit der Constantenzahl c ein β-stufiges System erzeugen möge, und schreibe diesem Paare eine $(\beta+a)$-fache Grundbedingung zu. Dann legt man dadurch dem Gebilde Γ eine a-fache Bedingung auf. Da ferner das allgemeine Γ ein $(\beta-1)$-stufiges System von Coincidenzen jenes Paars enthält, so giebt eine $(\beta+a-1)$-fache, aber der *Coincidenz* zugeschriebene Grundbedingung ebenfalls eine a-fache Bedingung für Γ. So würden also aus den Correspondenzformeln des III. Abschnitts für ein zu Grunde gelegtes, a-stufiges System von Gebilden Γ viele Formeln abgeleitet werden können, welche *nur* a-fache Bedingungen enthielten, wenn nicht in einem solchen Systeme im Allgemeinen *speciellere* Gebilde Γ vorkämen, bei denen die *Stufe des Systems der Coincidenzen grösser* als $\beta-1$ ist. Wenn nun auf einem *specielleren* Gebilde Γ nicht wie im Allgemeinen ein $(\beta-1)$-stufiges, sondern ein $(\beta+\gamma-1)$-stufiges System von Coincidenzen jenes Hauptelementenpaares liegt, so wird auch im Allgemeinen ein a-stufiges System von Gebilden Γ ein $(a-\gamma)$-stufiges System solcher *besonderen Gebilde* Γ enthalten müssen. *Deshalb treten in die Formeln zwischen a-fachen Bedingungen für Γ im Allgemeinen auch $(a-\gamma)$-fache Bedingungssymbole, welche aber specielleren Gebilden Γ mit einer um γ verminderten Constantenzahl angehören.* Das Analoge ist auch der Fall bei der Anwendung von Correspondenzformeln für Punkt*gruppen,* oder bei der Anwendung des Princips von der Erhaltung der Anzahl. Jedes solche *speciellere* Γ mit einer um γ verminderten Constantenzahl soll *rücksichtlich* der gewählten Correspondenz zwischen den auf Γ liegenden Hauptelementen *γ-stufig ausgeartet* heissen (courbes singulières in den Alm. Eg.). Ist ein Gebilde Γ_2 durch die Correspondenz b_2 eine γ_2-stufige Ausartung eines gewissen Gebildes Γ_1, welches selbst wieder durch die Correspondenz b_1 eine γ_1-stufige Ausartung des Gebildes Γ ist, so ist Γ_2 als ein Gebilde Γ zu bezeichnen, welches durch die beiden Correspondenzen b_1 und b_2 $(\gamma_1+\gamma_2)$-stufig ausgeartet ist. Z. B. ist der Kegelschnitt, dessen Punkte zwei zusammenfallende Gerade, und dessen Tangenten zugleich zwei zusammenfallende Strahlbüschel bilden, $(1+1)$-stufig ausgeartet, und zwar durch die Correspondenz zwischen je zwei Kegelschnittpunkten und durch die Correspondenz zwischen je zwei Kegelschnitttangenten. Da wir im

Folgenden fast nur mit einstufigen Ausartungen zu thun haben werden, so werden wir unter Ausartung schlechthin immer eine *einstufige* verstehen.

Es wird nicht überflüssig sein, im nächsten Paragraphen einige Beispiele anzuführen, welche zeigen sollen, in welcher Weise sich bei der Ableitung von Formeln zwischen Bedingungssymbolen die ausgearteten Gebilde geltend machen.

§ 32.

Beispiele für das Eintreten von Ausartungen in die Formeln zwischen Bedingungen.

Erstes Beispiel.

Das Gebilde Γ sei ein Kegelschnitt, und es bezeichne für denselben:

μ die Bedingung, seine Ebene soll durch einen gegebenen Punkt gehen,

ν, er soll eine gegebene Gerade schneiden,

ϱ, er soll eine gegebene Ebene berühren,

P, er soll durch einen gegebenen Punkt gehen,

x, er soll eine gegebene Ebene so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts durch einen gegebenen Punkt gehe,

y, er soll eine gegebene Gerade so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts eine gegebene Gerade schneide.

Wir fassen nun je zwei Punkte eines Kegelschnitts als Punktepaar zusammen. Dann besitzt ein gegebenes, zweistufiges Kegelschnittsystem ein vierstufiges System solcher Punktepaare. Auf dieses System wenden wir die Formel (9) aus § 16. an, welche dort hiess:

$$c^3 d + c^2 d^2 + c d^3 = \varepsilon b g_p + \varepsilon b^2 g + \varepsilon b^3.$$

Es fragt sich nun, welche Bedingung ein Kegelschnitt erfüllen muss, damit eins seiner ∞^2 Punktepaare die Bedingungen $c^3 d$, $c^2 d^2$ u. s. f. erfüllt. Die Bedingung $c^3 d$ wird von jedem Kegelschnitt erfüllt, welcher durch den Punkt von c^3 geht, d. h. welcher die Bedingung P erfüllt, und zwar *zweimal*, weil die Ebene von d ihn in zwei Punkten schneidet. Analog findet man, dass $2P$ für cd^3, ν^2 für $c^2 d^2$, und, wenn von Ausartungen zunächst abgesehen wird, x für $\varepsilon b g_p$, y für $\varepsilon b^2 g$, P für εb^3 zu setzen ist. Doch ist in dem zweistufigen Kegelschnittsysteme ein *einstufiges* System specieller Kegelschnitte möglich, deren jeder ein *zweistufiges* System von Coincidenzen dadurch zu fassen vermag, dass jeder seiner ∞^1 Punkte nicht blos in einer, sondern in ∞^1 Richtungen einen unendlich nahen Punkt besitzt. Bei einem solchen Kegelschnitt bilden also die Punkte zwei zusammenfallende Gerade, und in Folge dessen die Tangenten zwei Strahlbüschel, deren

Scheitel auf der Doppelgeraden liegen, und deren Ebenen in die Ebene des Kegelschnitts fallen. Jeder Kegelschnitt von dieser Beschaffenheit würde also *rücksichtlich der Correspondenz zweier Kegelschnittpunkte einstufig ausgeartet sein.*

Bezeichnet $\eta\mu$ die Zahl derjenigen Kegelschnitte des Systems, welche so ausgeartet sind und dabei ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken, ηn die Zahl derer, welche so ausgeartet sind und dabei ihre Doppelgerade eine gegebene Gerade schneiden lassen, so umfasst dass Coincidenzsymbol $\varepsilon b g_p$ auch die Zahl $\eta\mu$, und $\varepsilon b^2 g$ auch die Zahl ηn. Also erhält man schliesslich die allgemeingültige Formel:

$$2P + \nu^2 + 2P = x + y + P + \eta\mu + \eta n.$$

Nun ist aber nach den allgemeinen Lageformeln (§ 10.):

$$P = \mu\nu - 2 \cdot \mu^2$$

und, wie § 36. und § 37. lehren wird:

$$x = \mu\nu + \mu\varrho - 2\mu^2, \qquad y = \tfrac{1}{2}\nu\varrho + \mu\nu - 2\mu^2,$$

$$\eta\mu = (2\nu - \varrho - 2\mu)\mu, \qquad \eta n = (2\nu - \varrho - 2\mu)\tfrac{1}{2}\nu.$$

Die Substitution dieser Moduln in die eben abgeleitete Formel ergiebt eine Bestätigung.

Zweites Beispiel.

Das Gebilde Γ sei eine cubische Plancurve mit Spitze. Es bedeute für dieselbe:

μ die Bedingung, dass ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt geht,

w, dass ihre Wendetangente eine gegebene Gerade schneide,

q, dass ihre Rückkehrtangente dies thue,

y, dass der Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente in einer gegebenen Ebene liege.

Wir setzen nun ein einstufiges Curvensystem voraus und fassen auf jeder Curve desselben die Wendetangente mit der Rückkehrtangente als Strahlenpaar zusammen. Dann erhalten wir ein einstufiges System solcher Strahlenpaare. Auf dieses System wenden wir die Formel (56) des § 20. an. Dann haben wir w für $g\sigma$, q für $h\sigma$, $\mu + y$ für $\beta\sigma$ zu setzen. Das Coincidenzsymbol kann nur von solchen Curven erfüllt werden, auf denen Wendetangente und Rückkehrtangente zusammenfallen. Enthält das System φ solcher Curven, so gilt also die Formel:

$$w + q - \mu - y = \varphi.$$

Demgemäss ist jede durch φ mitgezählte Curve *hinsichtlich der Correspondenz zwischen Wendetangente und Rückkehrtangente ausgeartet.*

Drittes Beispiel.

In § 7., p. 24 ist als Beispiel für die Anwendung des Princips von der Erhaltung der Anzahl die für alle zweistufigen *Elementarsysteme* von Plancurven C_3^3 gültige Formel:

$$\nu^2 = P + x + 3c_g + 6\mu^2$$

aufgestellt. Bei Zugrundelegung eines *beliebigen* zweistufigen Systems würde der rechten Seite dieser Formel die Zahl aller derjenigen hinreichend oft gerechneten Curven hinzuzufügen sein, welche ∞^1 vielfache Punkte besitzen, und den Ort dieser vielfachen Punkte eine gegebene Gerade schneiden lassen. Zu den *so ausgearteten* Curven gehören also alle diejenigen, deren Punkte auf drei Geraden liegen, von denen zwei, oder welche alle drei zusammenfallen.

Viertes Beispiel.

Das Gebilde Γ sei eine Fläche zweiter Ordnung, und es bezeichne für sie:

μ die Bedingung, durch einen gegebenen Punkt zu gehen,
γ' die Bedingung, eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte zu berühren,
x die Bedingung, eine gegebene Gerade zu enthalten.

Wir setzen nun ein dreistufiges Flächensystem voraus, und legen die Gerade der Bedingung γ' durch den Punkt der Bedingung μ. Dann giebt das Princip von der Erhaltung der Anzahl die schon in den Math. Annalen Bd. X, p. 352 abgeleitete Formel:

$$\mu\gamma' = x + 2m^2\sigma + u\varepsilon,$$

wo $m^2\sigma$ die Zahl derjenigen ausgearteten Flächen bedeutet, welche ihre Punkte auf einer Doppelebene haben, und diese Doppelebene durch eine gegebene Gerade schicken, und wo $u\varepsilon$ die Zahl derjenigen ausgearteten Flächen bedeutet, welche ihre Punkte auf zwei Ebenen haben, und eine dieser Ebenen durch eine gegebene Gerade schicken.

§ 33.

Die Eintheilung der Ausartungen.

Nach der obigen Definition hat der Begriff *Ausartung* eines Gebildet nur *rücksichtlich* der aufgestellten Correspondenzen oder der ausgeführten Lage-Specialisirungen, nicht aber an und für sich einen Sinn. In *irgend einer* Rücksicht kann *jedes* die Definition eines Gebildes Γ erfüllendes Individuum als ein ausgeartetes Gebilde Γ betrachtet werden. Im Folgenden aber können nur gewisse Sorten von Ausartungen auftreten. Dies rührt daher, dass nur die *Elemente der Plücker'schen Oerter* (§ 6.) den Correspondenzformeln oder dem

Principe von der Erhaltung der Anzahl unterworfen werden sollen. Bei dieser Einschränkung treten unter ∞^c Gebilden Γ immer nur ∞^{c-1} als ausgeartet auf, und in die Formeln treten keine andern Bedingungen ein, als solche, die wir in § 6. fundamental genannt haben. Deshalb nennen wir auch jene auf Plücker'sche Oerter bezüglichen Ausartungen *fundamentale*. Auf einer fundamentalen Ausartung eines Gebildes Γ müssen also entweder mindestens zwei Elemente der Plücker'schen Oerter nullter Stufe *coincidiren*, die dies bei dem allgemeinen Γ nicht thun, oder es muss auf ihr mindestens ein Ort von höherer als der nullten Stufe existiren, der *zerfallen* ist, d. h., *sich in mehrere selbstständige Oerter aufgelöst hat, deren Gradsumme gleich seinem Grade ist*. Da wir im Folgenden fast nur mit *einstufigen fundamentalen* Ausartungen zu thun haben werden, so soll unter Ausartung schlechthin immer nur eine solche speciellere verstanden werden, es müsste denn das Gegentheil ausdrücklich gesagt sein. Diese auf einem einstufigen Systeme in endlicher Anzahl vorhandenen Ausartungen spielen hinsichtlich des Systems etwa dieselbe Rolle, wie hinsichtlich einer Curve die gewöhnlichen Plücker'schen Singularitäten.

Meist verursacht das Zerfallen eines Plücker'schen Orts oder das Coincidiren von sonst getrennt liegenden Hauptelementen das Zerfallen noch anderer Oerter oder das Coincidiren noch anderer Hauptelemente. Hierfür einige Beispiele, die theils bekannt sind, theils im Folgenden vorkommen.

1) Das Zerfallen des Tangentenorts eines Kegelschnitts bedingt das Zerfallen des Punktorts.

2) Das Zerfallen des Tangentenorts einer Fläche zweiten Grades in zwei zusammenfallende Strahlenaxen bedingt das Zerfallen des Punktorts in zwei Punktfelder, und auch das Zerfallen des Orts der Tangentialebenen in zwei Ebenenbündel.

3) Das Zerfallen des Punktorts einer Plancurve C_3^3 in einen Kegelschnitt und eine Gerade bedingt nicht blos das Zerfallen des Tangentenorts, sondern auch die Coincidenz von Wendepunkt und Spitze, sowie die Coincidenz von Wendetangente und Rückkehrtangente.

4) Die Coincidenz eines Wendepunkts mit dem Doppelpunkt einer C_3^4 bedingt das Zerfallen des Tangentenorts, nicht aber nothwendig das Zerfallen des Punktorts.

5) Es kann aber auch vorkommen, dass bei Plancurven die Coincidenz singulärer Elemente weder das Zerfallen des Punktorts noch das des Tangentenorts verursacht. Hierfür bietet die Plancurve vierter Ordnung sechsten Ranges mit drei Doppelpunkten ein Beispiel. Wenn bei dieser die drei Doppelpunkte coincidiren, so braucht weder ihr Punktort noch ihr Tangentenort zu zerfallen. (Alm. Eg. Nr. 39.)

Wegen der eben durch Beispiele erläuterten Eigenschaft der Ge-

bilde, dass ihr Ausarten in einer Rücksicht meist auch ein Ausarten in anderen Rücksichten nach sich zieht, ist es weniger zweckmässig, die Ausartungen nach den Correspondenzen u. s. w. zu unterscheiden, als vielmehr, sie nach *dem Zerfallen und der gegenseitigen Lage der Plücker'schen Oerter* einzutheilen. Demgemäss werden wir zwei Gebilde Γ nur dann als *verschieden ausgeartet* bezeichnen, wenn sie bei einer genauen Beschreibung der Lage ihrer *sämmtlichen* Plücker'schen Oerter *verschiedene Definitionen* nöthig machen. Zu beachten ist dabei, dass zwei Ausartungen einer Plancurve, welche hinsichtlich des zerfallenden Punktorts und des zerfallenden Tangentenorts derselben Definition genügen, doch als verschieden gelten müssen, sobald die Lage der singulären Punkte und der singulären Tangenten bei beiden verschieden ist. (Man vergleiche die Ausartungen δ_1 und δ_2 der C_3^3 in § 41.)

Bisher hatte man in der Geometrie bei einer Curve Ausarten und Zerfallen ihres Punktorts meist identificirt, und selten darauf geachtet, in wiefern auf den ausgearteten Gebilden Γ die Γ charakterisirenden Plücker'schen Zahlen erhalten bleiben, z. B., wo auf einer cubischen Raumcurve, die in einen Kegelschnitt und eine ihn schneidende Gerade zerfallen ist, der Ort vierten Grades ihrer Tangenten oder der Ort dritten Grades ihrer Schmiegungsebenen zu finden ist. Die Untersuchungen der abzählenden Geometrie drängen aber darauf hin, den Begriff der Ausartung so allgemein zu fassen, wie es oben geschehen ist, und in die Eigenthümlichkeiten eines Gebildes dadurch einzudringen, dass man *die genauen Definitionen seiner verschiedenen Ausartungen aufsucht.* Dieses hat der Verfasser namentlich für die Plancurve C_3^3 (§ 41.) und für die cubische Raumcurve (dritte Abhandlung der Beitr.) gethan. Es wird sich zeigen, dass die Beschreibung der sämmtlichen fundamentalen Ausartungen der C_3^3 13 verschiedene Definitionen nöthig macht, oder kurz, indem das Wort Ausartung Sammelwort wird, dass die C_3^3 13 Ausartungen hat, ferner auch, dass die cubische Raumcurve 11 Ausartungen besitzt. (Dritte Abhandlung der „Beitr.")

Es ist wünschenswerth, dass verschieden definirte Ausartungen auch durch verschiedene Symbole gekennzeichnet werden. Wir setzen daher im Einklang mit unserer im ersten Abschnitt entwickelten Terminologie Folgendes fest:

1) Alle Ausartungen eines Gebildes Γ, welche hinsichtlich des Zerfallens und der Lage der Plücker'schen Oerter zu einander ein und dieselbe Definition erfüllen, werden durch ein gemeinsames Symbol zusammengefasst.

2) Ein Ausartungssymbol, z. B. α, bedeutet zugleich auch die *Zahl* derjenigen Ausartungen, welche, einem vorliegenden Systeme angehörig, die dem Symbole α zugehörige Definition erfüllen.

3) Das Symbol αz, wo α eine b-stufige Ausartung, z eine $(a-b)$-

fache Bedingung bedeutet, bezeichnet die *Zahl* derjenigen Ausartungen α, welche, einem a-stufigen Systeme angehörig, die Bedingung z erfüllen.

Herr Zeuthen hat in den Alm. Eg. nur *elementare* Systeme von Plancurven betrachtet, und deshalb auch nur die in ihnen vorkommenden Ausartungen, die er „ordinaires" nennt, zu behandeln brauchen. Setzt man aber, wie es im Folgenden geschehen ist, fundamentale Systeme voraus, so wird die Zahl der zu berücksichtigenden Ausartungen bedeutend vergrössert. Wir theilen daher mit Rücksicht auf unsere Unterscheidung der elementaren und der singulären Bedingungen (§ 6., p. 20) die fundamentalen Ausartungen noch weiter ein, und zwar in *Gattungen* gemäss der folgenden Definition:

„Ist zur Bestimmung der sämmtlichen Plücker'schen Oerter einer Ausartung ausser elementaren Bedingungen eine mindestens n-fache *singuläre* Bedingung erforderlich, so heisst diese Ausartung *n-ter Gattung.*"

Demgemäss deckt sich der Zeuthen'sche Begriff *„gewöhnliche Ausartung"* mit unserm Begriff *„Ausartung nullter Gattung."* Die letzten drei der in Lindemann's Vorles. v. Clebsch auf p. 417 erwähnten 4 Ausartungen der C_3^3 können bei fester Ebene durch eine sechsfache elementare Bedingung nicht bestimmt werden. Eine fünffache *elementare* Bedingung bestimmt sie jedoch nicht vollständig. Es muss vielmehr ausser der fünffachen elementaren Bedingung noch eine einfache, auf die Singularitäten bezügliche Bedingung gegeben sein. Diese drei Ausartungen sind daher nicht nullter, sondern *erster Gattung.*

§ 34.

Die Berechnung der Ausartungsanzahlen im Allgemeinen.

Bei der Ableitung der Formeln zwischen a-fachen Bedingungen einerseits und den mit $(a-1)$-fachen Bedingungen multiplicirten Ausartungssymbolen andererseits ist zu beachten, dass diejenigen Formeln allgemeiner und deshalb vorzuziehen sind, bei denen a *kleiner* ist, und bei denen das vorausgesetzte System *allgemeiner* ist, weil man dann mit recht vielen Bedingungen symbolisch multipliciren darf, und deshalb auch viele Beziehungen zwischen Anzahlen gewinnen kann. Wir werden daher bei der Aufsuchung der fundamentalen Anzahlen eines Gebildes vorzugsweise solche Formeln ableiten, welche die *einfachen* Bedingungen mit den Ausartungszahlen verknüpfen, und welche zugleich für *alle fundamentalen* Systeme gültig sind.

Wir setzen nun voraus, man kenne die genaue Beschreibung der sämmtlichen fundamentalen Ausartungen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$, welche in einem durch die Bedingung y definirten einstufigen Systeme vorkommen

können, und man habe ferner so viele für dieses System gültige Formeln entwickelt, dass daraus die einfache fundamentale Bedingung z als Function von den Ausartungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ allein dargestellt werden kann. Dann kann man die Zahl der die zusammengesetzte Bedingung yz erfüllenden Gebilde berechnen, sobald man nur die Ausartungssymbole

$$y\alpha_1, y\alpha_2, \cdots$$

zu berechnen vermag. Damit ist dann das Problem der Bestimmung der fundamentalen Anzahlen eines Gebildes Γ *zurückgeführt auf das Problem der Bestimmung der fundamentalen Anzahlen seiner fundamentalen Ausartungen.* Wir besprechen daher jetzt das letztgenannte Problem.

Die Ausartungen eines Gebildes Γ genügen einerseits der Definition des letztern hinsichtlich der Plücker'schen Gradzahlen vollkommen, nur dass ihre Constantenzahl durch das Ausarten um 1 verringert ist. Andererseits aber können sie doch immer wegen der auf ihnen vorhandenen *neuen* Coincidenzen oder des bei ihnen stattfindenden *Zerfallens* von Oertern so aufgefasst werden, als ob sie aus einfacheren Gebilden mit kleinerer Constantenzahl zusammengesetzt wären.

Für diese letztern oder jede beliebige, aus ihnen gebildete Gruppe wollen wir den Namen *Theilgebilde* einführen. So sind z. B. die Theilgebilde der sämmtlichen fundamentalen Ausartungen:

1) des Kegelschnitts die drei Hauptelemente (§ 36.);
2) der Plancurve C_3^3 dieselbe wie bei 1) und ausserdem der Kegelschnitt (§ 41.);
3) der C_3^4 dieselben wie bei 2) und die C_3^3 (§ 53. u. 54.);
4) der C_3^6 dieselben wie bei 3) und die C_3^4;
5) der cubischen Raumcurve dieselben wie bei 4) und ausserdem die dem Kegelschnitt, der C_3^3 und der C_3^4 dualistisch entsprechenden Kegel;
6) des linearen Complexes der Strahl;
7) der linearen Congruenz die drei Hauptelemente und die lineare Congruenz mit unendlich nahen erzeugenden Axen.

Die genaue Beschreibung einer Ausartung α eines Gebildes Γ von der Constantenzahl c wird immer Aufschluss darüber geben, in welcher Weise α eine gewisse fundamentale Bedingung z zu erfüllen vermag. Im Allgemeinen wird man annehmen müssen, dass α dies sowohl dadurch vermag, dass ein α angehöriges Theilgebilde die Bedingung z_1 erfüllt, wie auch dadurch, dass dasselbe oder ein anderes Theilgebilde die Bedingung z_2 erfüllt, u. s. f. Dadurch *spaltet sich* die α auferlegte Bedingung z, und man hat:

$$\alpha z = \alpha z_1 + \alpha z_2 + \alpha z_3 + \cdots$$

Berücksichtigt man dieses für jede Einzelbedingung, welche in einer

α zugeschriebenen $(c-1)$-fachen Bedingung u steckt, so erhält man schliesslich αu ausgedrückt durch eine Summe von Anzahlen, deren jede von gewissen, als bekannt vorauszusetzenden Anzahlen der *Theilgebilde* abhängt. Dadurch reducirt sich die Bestimmung der fundamentalen Anzahlen einer Ausartung α auf die Bestimmung gewisser Anzahlen der auf α liegenden Theilgebilde. Zur Erläuterung einer solchen Reduction diene das *folgende Beispiel.*

Wie in der dritten Abhandlung näher besprochen werden soll, besitzt die cubische Raumcurve eine Ausartung ω von folgender Beschaffenheit. Die Punkte von ω bilden einen Kegelschnitt und eine Gerade N, welche diesen Kegelschnitt in einem Punkte R schneidet, der Tangentenort von ω wird durch die Tangenten jenes Kegelschnitts, und durch die Strahlen zweier zusammenfallender Strahlbüschel gebildet, deren Scheitel R ist, und deren Ebene durch N geht, dabei aber den Kegelschnitt berührt. Aus dieser Beschreibung folgt, dass die Bedingung ν, die Raumcurve soll eine gegebene Gerade schneiden, sich für die ω *spaltet,* und zwar in die Bedingung n, dass die ω ihren *Kegelschnitt* die gegebene Gerade schneiden lässt, und in die Bedingung N, dass die ω ihre *Gerade* N die gegebene Gerade schneiden lässt. Daher ist:

$$\nu\omega = n\omega + N\omega.$$

Ferner folgt aus jener Beschreibung, dass die Bedingung ϱ, die Raumcurve soll eine gegebene Ebene berühren, sich für ω *spaltet*, und zwar in die Bedingung r, dass der Kegelschnitt die gegebene Ebene berühre, in die Bedingung S, *dass der eine der beiden oben erwähnten, zusammenfallenden Strahlbüschel einen in der gegebenen Ebene liegenden Strahl enthalte, und in die Bedingung S', dass der andere der beiden zusammenfallenden Strahlbüschel einen in der gegebenen Ebene liegenden Strahl enthalte. Jede der beiden Bedingungen S und S' ist aber ersetzbar durch die Bedingung R, dass der Punkt R auf der gegebenen Ebene liege.*

Also ist:

$$\varrho\omega = r\omega + R\omega + R\omega = r\omega + 2R\omega.$$

Durch symbolische Multiplication erhält man aus dieser und der vorigen Formel alle Ausartungssymbole von der Form $\omega\nu^a\varrho^{11-a}$ als Functionen der Symbole $\omega n^b r^c N^d R^{11-b-c-d}$, und damit die Berechnung der Ausartungszahlen ω zurückgeführt auf Anzahlen, die sich auf die Theilgebilde von ω, den Kegelschnitt und die drei Hauptelemente beziehen. Speciell ist:

$$\omega\nu^{10}\varrho = \omega(n+N)^{10}(r+2R),$$

und hieraus erhält man, nach Weglassung aller Symbole, die gleich null sind,

$$\begin{aligned}\omega\nu^{10}\varrho = \omega\,[10_2 \cdot N^2 n^8\,(2R)] \\ + \omega\,[10_3 \cdot N^3 n^7\,(r+2R)] \\ + \omega\,[10_4 \cdot N^4 n^6\,(r+2R)].\end{aligned}$$

Jedes der hier vorkommenden 5 Symbole lässt sich nun leicht durch die als bekannt (§ 36. u. 37.) vorausgesetzten, dem Kegelschnitt und dem Strahle angehörigen Anzahlen ausdrücken. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\omega n^8 N^2 R &= \mathbf{92} \cdot 2, \\ \omega n^7\; r N^3 &= 2 \cdot \mathbf{116} \cdot 2, \\ \omega n^7 R N^3 &= 2 \cdot \mathbf{92}, \\ \omega n^6\; r N^4 &= 2 \cdot \mathbf{116}, \\ \omega n^6 R N^4 &= 2 \cdot \mathbf{18},\end{aligned}$$

wo die fettgedruckten Zahlen 92, 116, 18 angeben, wieviel Kegelschnitte bezüglich

8 gegebene Gerade schneiden,
7 gegebene Gerade schneiden, und eine gegebene Ebene berühren,
6 gegebene Gerade schneiden, und durch einen gegebenen Punkt gehen.

Durch Substitution dieser Anzahlen erhält man schliesslich:

$$\omega\nu^{10}\varrho = 180240.$$

In dem eben besprochenen Beispiele konnten wir $2R\omega$ statt $S\omega + S'\omega$ setzen, weil wegen der Coincidenz der beiden Strahlbüschel die Bedingungen S und S' für ω identisch waren. Analog kann man bei allen solchen Coincidenzen verfahren, und demnach folgenden Satz aussprechen:

„Wenn auf einer Ausartung α eines Gebildes Γ n Theilgebilde $e_1, e_2, e_3, \cdots e_n$ in dem Gebilde e *vereinigt* zu denken sind, so ist die Γ zugeschriebene Bedingung, dass *irgend eines* dieser n Theilgebilde eine gewisse Bedingung z erfüllen soll, für die Ausartung gleich dem n-fachen der Bedingung, dass das Gebilde e dieselbe Bedingung erfüllen soll."

Es mögen z. B. auf einer Ausartung α einer Plancurve n^{ter} Ordnung die Punkte n zusammenfallende Gerade bilden, es möge ν die Bedingung bedeuten, dass die Plancurve eine gegebene Gerade schneiden soll, und g die Bedingung bezeichnen, welche α dadurch erfüllt, dass die die n Geraden in sich vereinigende Gerade eine gegebene Gerade schneidet. Dann ist:

$$\nu\alpha = n \cdot g\alpha,$$

also auch:

$$\nu^2\alpha = n^2 \cdot g^2\alpha, \qquad \nu^3\alpha = n^3 \cdot g^3\alpha,$$
$$\nu^4\alpha = n^4 \cdot g^4\alpha, \qquad \nu^5\alpha = 0, \text{ u. s. f.}$$

Um bei der Beschreibung der Ausartungen der Plancurven und Raumcurven eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen, führen wir einige Termini ein, welche sich an die in § 6., p. 21 gegebenen Festsetzungen über den Gebrauch der Wörter *Ordnung*, *Rang*, *Classe* anlehnen. Wir wollen nämlich bei ausgearteten Plancurven und Raumcurven die Theilgebilde des Punktorts *Ordnungscurven*, die des Tangentenorts *Rangcurven* nennen. Ferner sollen die Theilgebilde des Orts der Schmiegungsebenen einer ausgearteten Raumcurve *Classencurven* heissen. Sind diese Curven ersten Grades, so bezeichnen wir sie bezüglich mit den Namen *Ordnungsgerade*, *Rangbüschel*, *Classenaxe*. Der Scheitel des Rangbüschels soll *Rangpunkt*, seine Ebene *Rangebene* heissen. Bei einer Plancurve fällt jede Rangebene natürlich mit der Ebene der Curve zusammen, und man wird also dann, ohne Irrthum zu veranlassen, statt Rangbüschel auch nur *Rangpunkt* sagen dürfen („sommet“ bei Chasles und Zeuthen).

Mit Hülfe dieser Definition kann man einige Folgerungen aus dem Satze, welcher oben aus der Spaltung der Bedingungen bei Ausartungen abgeleitet ist, kurz so aussprechen:

„Eine Ausartung ist r^s-fach zu rechnen, wenn sie entweder

a) eine r-fache Ordnungsgerade hat, und diese s gegebene Gerade schneidet, oder, wenn sie

b) eine r-fache Classenaxe hat, und diese s gegebene Gerade schneidet, oder, wenn sie

c) einen r-fachen Rangpunkt hat, und durch diesen s gegebene Ebenen gehen, oder, wenn sie

d) eine r-fache Rangebene hat, und auf dieser s gegebene Punkte liegen, oder, wenn sie

e) einen r-fachen Rangbüschel hat, und diesem s gegebene Tangenten angehören.“

Aus den voranstehenden allgemeinen Erörterungen über die Berechnung eines Ausartungssymbols αu geht hervor, dass dieselbe nur unter den folgenden beiden Voraussetzungen möglich ist.

1) Man muss über die Natur der Ausartung α so genau Bescheid wissen, dass man angeben kann, in welcher Weise jede der in u steckenden Einzelbedingungen durch α erfüllt wird. Denn dann kann man die gesuchte Zahl αu als Function von Anzahlen darstellen, die den Theilgebilden von α angehören.

2) Man muss diese letztern, den Theilgebilden angehörigen Anzahlen schon kennen.

Die zweite Voraussetzung kann man durch einen systematischen Gang der Untersuchung erfüllen, indem man von einfachen Gebilden mit kleiner Constantenzahl allmählich aufsteigt zu höheren Gebilden

mit grösserer Constantenzahl. So erfordert die Berechnung der Ausartungssymbole der cubischen Raumcurve die Kenntniss vieler Anzahlen, welche den cubischen Plancurven dritten und vierten Ranges angehören. So hat die Berechnung der auf cubische Flächen bezüglichen Anzahlen mit der Berechnung der Anzahlen zu beginnen, welche der Cayley'schen Regelfläche angehören.

Die erste der beiden Voraussetzungen aber ist schwerer zu erfüllen. Zwar werden bei jedem Gebilde *gewisse* Ausartungen immer von vornherein leicht erkannt werden können, aber durchaus nicht alle. Es ist selten möglich, aus den analytischen Darstellungen eines Gebildes die genaue Beschreibung *aller* seiner Ausartungen abzuleiten. Zum Glück aber giebt die Möglichkeit der Berechnung *einer und derselben Anzahl aus mehreren ganz verschiedenen Gruppen von Ausartungssymbolen* Mittel genug an die Hand, um über die Art und Weise der Erfüllung einer Bedingung durch eine Ausartung, und damit auch über die eigenthümliche Verkettung der Plücker'schen Oerter auf ihr, genauen Aufschluss zu erhalten. Eine derartige Auffindung der genauen Definition einer Ausartung wollen wir *aposteriorisch* nennen. Freilich ist man oft im Stande, sich *einige* Kenntniss über Ausartungen eines Gebildes dadurch zu verschaffen, dass man dieselben aus dem allgemeinen Gebilde durch eine gewisse *Abbildung* (§ 41.) erzeugt. Ausserdem aber werden immer noch Bestimmungen aposteriori nothwendig sein. Namentlich wird man die Sicherheit, *dass keine Ausartung vergessen ist*, nicht anders als aposteriori erlangen können.

§ 35.

Ausdehnung der Anzahlen-Bestimmung von Plancurven in fester Ebene auf Plancurven im Raume.

Herr Zeuthen hat in den Alm. Eg. Nr. 24 Formeln angegeben, welche für ein zu Grunde gelegtes einstufiges System von Plancurven *in fester Ebene* die einfachen Grundbedingungen mit den Anzahlen gewisser im System vorhandener Ausartungen verbinden. Da diese Formeln allgemeingültig werden, sobald man nur den rechten Seiten die Vielfachen der noch nicht berücksichtigten Ausartungen hinzufügt, so bilden sie das *Fundament für den Formelapparat*, welcher zur Bestimmung aller fundamentalen Anzahlen jeder beliebigen Plancurve nach der Chasles-Zeuthen'schen Methode nothwendig ist. Wir geben in diesem Paragraphen nur die auch von Zeuthen schon kurz angedeutete *Erweiterung* dieser Formeln *von Plancurven in bestimmter Ebene auf Plancurven in nicht bestimmter Ebene.*

Wir bezeichnen mit μ, μ^2, μ^3 die Bedingung, dass die Ebene der Plancurve bezüglich durch einen gegebenen Punkt geht, durch eine gegebene Gerade geht, gegeben ist. Dann kann man sagen, dass die

Zeuthen'schen Formeln aus den hier entwickelten durch sbl. Mult. mit μ^3 hervorgehen.

Jede der Zeuthen'schen Formeln folgt aus einer oder mehreren Anwendungen des Chasles'schen Correspondenzprincips in der Punktaxe oder im Strahlbüschel. Wir setzen nun bei einem räumlichen Plancurvensystem als die Träger der Correspondenz statt der Punktaxe und des Strahlbüschels bezüglich einen Strahlbüschel und einen Ebenenbüschel. Dann erhalten wir bei analoger Bezeichnung dieselben Formeln, wie Herr Zeuthen, *nur dass wir* auf der linken Seite jeder aus dem Correspondenzprincip im Strahlbüschel resultirenden Formel *ein gewisses Vielfaches der Bedingung, welche wir oben μ genannt haben, subtrahiren müssen.* Da eine Wiederholung der Zeuthen'schen Formeln in ihrer vollen Gestalt wegen der vielen Symbole, die dann definirt werden müssten, zu viel Raum kosten würde, so beschränken wir uns darauf, die eben genannten Vielfachen von μ hier anzugeben, und zwar jedes *hinter derselben Nummer*, welche Zeuthen an der citirten Stelle vor die zugehörige Formel gesetzt hat. Für diejenigen Leser, denen die Alm. Eg. nicht zugänglich sein sollten, sei bemerkt, dass dieselben auch in Lindemann's „Vorl. v. Clebsch" p. 413–415 angegeben sind, und dass die hier *nachgesetzten Nummern* die Nummern der Formeln bei Lindemann sind. Wie bei Zeuthen bedeutet

n die Ordnung der Plancurve,
n' ihr Rang,
d die Zahl der Doppelpunkte,
d' die Zahl der Doppeltangenten,
c die Zahl der Spitzen,
c' die Zahl der Wendetangenten.

Tabelle der den Zeuthen'schen Formeln hinzuzufügenden Vielfachen von μ.

3)	$n(n-1)$,	14)	3')	0,
4)	0,	15)	4')	nd',
5)	0,	16)	5')	nc',
6)	0,	17)	6')	$d'(d'-1)$,
7)	0,	19)	7')	$c'd'$,
8)	0,	18)	8')	$c'(c'-1)$,
9)	$n'(n-2)$,	20)	9')	$n'(n'-2)$,
10)	$d\,(n-2)$,	21)	10')	$d'(n'-2)$,
11)	$c\,(n-2)$,	22)	11')	$c'\,(n'-2)$,
12)	$n'(n-2)(n-3)$,	23)	12')	$n(n'-2)(n'-3)$,
13)	$d\,(n-2)(n-3)$,	24)	13')	$d'(n'-2)(n'-3)$,

14)	$e(n-2)(n-3)$.	25) 14′)	$e'(n'-2)(n'-3)$.
15)	$2d(2d-1)$.	15′)	0.
16)	$2n'$.	16′)	n^2.
22)	$2nd$.		
23)	ne.		
24)	$n\cdot\frac{1}{2}d(d-1)$.		
25)	nde.		
26)	$n\cdot\frac{1}{2}e(e-1)$.		

Beispielsweise leiten wir die linke Seite der Formel 14) ab. Dabei wollen wir jedoch, der Kürze wegen, nicht das Correspondenzprincip in seiner ursprünglichen Gestalt, sondern die Punktpaarformel anwenden, welche aus der Punktpaarformel erster Dimension (§ 16., I) durch sbl. Mult. mit g hervorgeht, also:

$$c^2 + d^2 + g_e - g_p = \varepsilon g.$$

Es bezeichne ν die Bedingung, dass die Plancurve n^{ter} Ordnung mit e Spitzen eine gegebene Gerade schneide, c die Bedingung, dass irgend eine ihrer e Spitzen auf einer gegebenen Ebene liege. Wir denken uns nun durch jede Spitze jeder Curve des einstufigen Systems alle möglichen in der Curvenebene liegenden Geraden gezogen. Jede dieser Geraden bestimmt noch $n-2$ weitere Schnittpunkte, und je zwei dieser letztern fassen wir als Punktepaar zusammen. Dann giebt es von solchen Punktepaaren auf jeder Curve ein einstufiges System, im Curvensysteme also ein zweistufiges System. Auf dieses System wenden wir die obige Formel an. Dann ist zu setzen:

$$c^2 = d^2 = \nu\cdot e(n-3), \quad g_e = c(n-2)(n-3), \quad g_p = \mu\cdot e(n-2)(n-3),$$

so erhalten wir als linke Seite von Formel 14):

$$2\nu\cdot e(n-3) + c(n-2)(n-3) - \mu\cdot e(n-2)(n-3).$$

Wir fassen nun die oben angegebenen Erweiterungen der Zeuthen'schen Formeln auf Plancurven im Raume zusammen mit dem Satze, welcher am Schluss des § 10. ausgesprochen ist. Dann erhalten wir das folgende wichtige Resultat:

„Kennt man bei irgend einer Plancurve die Formeln zwischen den Grundbedingungen und den Ausartungssymbolen, sowie die Ausartungen selbst so vollständig, dass man dadurch die fundamentalen Anzahlen *bei fester Ebene* berechnen kann, so braucht man nur noch zu den Formeln gewisse Vielfache der Bedingung μ hinzuzufügen, und die allgemeinen Formeln des § 10. genügend zu berücksichtigen, um auch den Weg zur Bestimmung *aller* fundamentalen Anzahlen derselben Plancurve *bei beweglicher Ebene* zu erhalten."

Die folgenden Untersuchungen setzen demgemäss meist von vornherein Plancurven *im Raume* voraus.

§ 36.

Die charakteristischen Anzahlen des Kegelschnitts.

Wir streben nach der Berechnung der fundamentalen Anzahlen der cubischen Plancurve C_3^3 mit Spitze (Abschnitt V). Die Theilgebilde der Ausartungen der C_3^3 bestehen aber aus Punkten, Ebenen, Strahlen und Kegelschnitten. Wir haben daher zunächst zu prüfen, ob uns die Anzahlen bekannt sind, welche sich auf die so zusammengesetzten Gebilde beziehen. Diese Anzahlen lassen sich sämmtlich ausdrücken durch die *elementaren Anzahlen des Kegelschnitts* und die *axiomatischen Anzahlen* vom Werthe 1, welche angeben, wie vieldeutig die Hauptelemente durch fundamentale Bedingungen bestimmt sind, z. B., wie viel Ebenen durch einen gegebenen Punkt und eine gegebene Gerade gehen. Wir beschäftigen uns daher mit den elementaren Kegelschnittanzahlen. Dieselben sind zuerst von Chasles (Comptes rendus 1867) angegeben. Nach der oben erörterten Methode erhält man sie ohne Schwierigkeit, da der Kegelschnitt nur zwei Ausartungen δ und ε besitzt, und da deren Theilgebilde nur aus Hauptelementen bestehen.

Die Ausartung δ besteht aus zwei Ordnungsgeraden, welche sich in einem doppelten Rangpunkte schneiden, die Ausartung ε besteht aus einer doppelten Ordnungsgeraden, auf welcher zwei einfache Rangpunkte liegen.

Wie immer bei Plancurven, bezeichnen μ, ν, ϱ bezüglich die Bedingungen, dass die Curve ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicke, eine gegebene Gerade schneide, eine gegebene Ebene berühre. Die 3 Zahlen μ, ν, ϱ sind mit den beiden Zahlen δ und ε durch zwei für jedes einstufige System gültige Gleichungen verbunden, welche aus Nr. 3 und Nr. 3′ der auf den Raum erweiterten Zeuthen'schen Formeln (§ 35.) folgen, nämlich:

$$2\nu - \varrho - 2\mu = \varepsilon,$$
$$2\varrho - \nu = \delta,$$

woraus folgt:

$$\nu = \tfrac{1}{3}(2\varepsilon + \delta + 4\mu),$$
$$\varrho = \tfrac{1}{3}(\varepsilon + 2\delta + 2\mu).$$

Alle übrigen Zeuthen'schen Formeln geben für den Kegelschnitt $0=0$.

Die beiden, eben angegebenen Gleichungen reichen aus, um die Kegelschnittzahlen $\mu^m \nu^n \varrho^r$, $(m+n+r=8)$ aus den Ausartungsanzahlen

$$\delta \mu^m \nu^n \varrho^r \text{ und } \varepsilon \mu^m \nu^n \varrho^r, \quad (m+n+r=7)$$

zu berechnen. Als Beispiel für die Berechnung der Ausartungsanzahlen selbst mögen dienen:

$$\begin{aligned}
\delta\nu^6\varrho &= 2^1\cdot[6_4\cdot\mathbf{2}+\tfrac{1}{2}\cdot 6_3\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}] = 140,\\
\delta\mu^2\nu^3\varrho^2 &= 2^2\cdot[3_2\cdot\mathbf{2}] = 24,\\
\varepsilon\mu\nu^2\varrho^4 &= 2^2\cdot[4_3\cdot\mathbf{1}+\tfrac{1}{2}\cdot 4_2\cdot\mathbf{2}] = 40.
\end{aligned}$$

Im letzten Beispiel steht der Coefficient 2^2, weil eine *doppelte* Ordnungsgerade zwei gegebene Gerade schneidet (§ 34.); die Combinationszahlen 4_3 resp. $\frac{1}{2}\cdot 4_2$ geben an, auf wie vielfache Weise sich 4 Ebenen zu 3 und 1 resp. zu 2 und 2 gruppiren lassen; die fettgedruckte Zahl 2 ist die Zahl der Geraden, welche 4 gegebene Geraden schneiden.

Liegen nun die elementaren Ausartungssymbole berechnet vor, so bestimmt man vermittelst der obigen Formeln zunächst die Zahlen ν und ϱ der Systeme, welche $\mu^3\nu^n\varrho^r$, $(n+r=4)$, als definirende Bedingung enthalten, weil bei diesen $\mu=0$ ist. So gewinnt man die 6 Anzahlen $\mu^3\nu^n\varrho^r$, $(n+r=5)$. Diese geben dann die Zahlen μ für die Systeme $\mu^2\nu^n\varrho^r$, $(n+r=5)$. Mit ihrer Hülfe erhält man aus jenen Formeln die Anzahlen $\mu^2\nu^n\varrho^r$, $(n+r=6)$. In derselben Weise gelangt man von diesen Anzahlen zu den 8 Anzahlen $\mu\nu^n\varrho^r$, $(n+r=7)$, und endlich von den letztgenannten zu den 9 Anzahlen $\nu^n\varrho^r$, $(n+r=8)$. So erhält man jede elementare Kegelschnittanzahl, bei der sowohl n wie r von null verschieden ist, *zweimal*, nämlich aus einem System als Zahl ν, aus einem andern Systeme als Zahl ϱ. Eine solche mehrfache Bestimmung einer und derselben Anzahl aus verschiedenen Ausartungsanzahlen ist durch unsere Abzählungsmethode oft ermöglicht, und kann dann einerseits zur Controle der Rechnung, andererseits auch zu einem Rückschlusse über die Beschaffenheit der Ausartungen ausgenutzt werden.

Die Kegelschnittzahlen $\mu^m\nu^n\varrho^r$ sind schon mehrfach publicirt (in deutschen Journalen jedoch nur durch des Verfassers Abhandlung in Crelle-Borch. Journal, Bd. 71). Wir wiederholen sie hier zur Bequemlichkeit der Leser, weil sie später fortwährend benutzt werden.

Tabelle der charakteristischen Kegelschnittanzahlen.

			$\nu^8 = 92$
		$\mu\nu^7 = 34$	$\nu^7\varrho = 116$
	$\mu^2\nu^6 = 8$	$\mu\nu^6\varrho = 52$	$\nu^6\varrho^2 = 128$
$\mu^3\nu^5 = 1$	$\mu^2\nu^5\varrho = 14$	$\mu\nu^5\varrho^2 = 76$	$\nu^5\varrho^3 = 104$
$\mu^3\nu^4\varrho = 2$	$\mu^2\nu^4\varrho^2 = 24$	$\mu\nu^4\varrho^3 = 72$	$\nu^4\varrho^4 = 64$
$\mu^3\nu^3\varrho^2 = 4$	$\mu^2\nu^3\varrho^3 = 24$	$\mu\nu^3\varrho^4 = 48$	$\nu^3\varrho^5 = 32$
$\mu^3\nu^2\varrho^3 = 4$	$\mu^2\nu^2\varrho^4 = 16$	$\mu\nu^2\varrho^5 = 24$	$\nu^2\varrho^6 = 16$
$\mu^3\nu\varrho^4 = 2$	$\mu^2\nu\varrho^5 = 8$	$\mu\nu\varrho^6 = 12$	$\nu\varrho^7 = 8$
$\mu^4\varrho^5 = 1$	$\mu^2\varrho^6 = 4$	$\mu\varrho^7 = 6$	$\varrho^8 = 4$

§ 37.

Die sonstigen, im Folgenden benutzten Kegelschnittanzahlen.

Ausser μ, ν, ϱ hat der Kegelschnitt, wie jede Plancurve, noch folgende 4 elementare Bedingungen:

P, durch einen Punkt zu gehen,

ϱ', eine Tangente durch einen gegebenen Punkt zu schicken,

t, einen Strahl eines gegebenen Strahlbüschels zu berühren,

T, einen gegebenen Strahl zu berühren.

Diese 4 Bedingungen lassen sich bei jeder Plancurve durch μ, ν, ϱ ausdrücken, gemäss den Incidenz-Formeln des § 10. (p. 36). Man hat in unserem Falle $a = 2$ zu setzen, und erhält die Moduln:

$$\begin{aligned} P &= \mu\nu - 2\mu^2, \\ \varrho' &= 2\mu, \\ t &= \mu\varrho, \\ T &= \mu^2\varrho - 2\mu^3. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man von Anzahlen, die nicht schon aus der Tabelle des § 36. unmittelbar ersichtlich sind, nur noch folgende.

Tabelle der Zahlen $P\nu^n\varrho^r$, $P\mu\nu^n\varrho^r$, $P^2\nu^n\varrho^r$ und $T\nu^n\varrho^r$.

$P\nu^6 = 18$			
$P\nu^5\varrho = 24$	$P\mu\nu^5 = 6$		$T\nu^5 = 12$
$P\nu^4\varrho^2 = 28$	$P\mu\nu^4\varrho = 10$	$P^2\nu^4 = 4$	$T\nu^4\varrho = 20$
$P\nu^3\varrho^3 = 24$	$P\mu\nu^3\varrho^2 = 16$	$P^2\nu^3\varrho = 6$	$T\nu^3\varrho^2 = 16$
$P\nu^2\varrho^4 = 16$	$P\mu\nu^2\varrho^3 = 16$	$P^2\nu^2\varrho^2 = 8$	$T\nu^2\varrho^3 = 8$
$P\nu\varrho^5 = 8$	$P\mu\nu\varrho^4 = 12$	$P^2\nu\varrho^3 = 8$	$T\nu\varrho^4 = 4$
$P\varrho^6 = 4$	$P\mu\varrho^5 = 6$	$P^2\varrho^4 = 8$	$T\varrho^5 = 2$

Um alle für die späteren Berechnungen nothwendigen Kegelschnittanzahlen zu gewinnen, haben wir ausser den elementaren Bedingungen noch diejenigen Bedingungen zu berücksichtigen, welche sich für eine Plancurve dadurch ergeben, dass *das aus einer Tangente und ihrem Berührungspunkte bestehende Gebilde* alle möglichen Grundbedingungen erfüllt. Ist g die Tangente, c ihr Berührungspunkt, so hat dieses Gebilde die folgenden mehrfachen Grundbedingungen:

$$\begin{aligned} &c^2, \quad cg, \quad g_p, \quad g_e, \\ &c^3, \quad cg, \quad cg_p, \quad cg_e, \quad g_s, \\ &c^3g, \quad c^2g_p, \quad c^2g_e, \quad cg_s, \quad G, \\ &c^3g_p, \quad c^2g_s, \quad cG. \end{aligned}$$

Durch die allgemeinen Lageformeln des § 9. lassen sich auf gewisse

dieser Symbole alle übrigen zurückführen, so dass nur folgende übrig bleiben:

$$\begin{aligned}&c^2, \quad g_p, g_e,\\ &c^3, \quad cg_e, g_s,\\ &c^2g_e, G,\\ &cG.\end{aligned}$$

Nun ergeben aber c^2, g_p, g_e, c^3, g_s, G dem Kegelschnitte Bedingungen, welche schon oben betrachtet sind, nämlich:

c^2 giebt ν, g_p giebt ϱ', g_e giebt ϱ, c^3 giebt P, g_s giebt t, G giebt T.

So bleiben nur noch die Symbole

$$cg_e, \quad c^2g_e, \quad cG$$

übrig, welche dem Kegelschnitt bezüglich die Bedingungen liefern:

1) x, dass er eine Ebene in einem Punkte einer auf ihr gegebenen Geraden berühre,
2) y, dass er eine Ebene in einem auf ihr gegebenen Punkte berühre,
3) z, dass er eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühre.

Die elementaren Moduln von x, y, z erhält man durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl, wie folgt.

1) Man betrachte die zusammengesetzte Bedingung $\nu\varrho$, und lege die Gerade von ν in die Ebene von ϱ. Dann wird $\nu\varrho$ *zweimal* von jedem Kegelschnitt erfüllt, welcher die Ebene von ϱ in einem Punkte der Geraden von ν berührt, d. h., welcher die Bedingung x erfüllt. Bei Curven höherer Ordnung könnte $\nu\varrho$ auch noch in anderer Weise erfüllt werden, bei Kegelschnitten jedoch nicht. Also ist:

$$x = \tfrac{1}{2}\nu\varrho. \tag{1}$$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}P\varrho \quad \text{oder}\\ y &= \tfrac{1}{2}(\mu\nu - 2\mu^2)\,\varrho = \tfrac{1}{2}\mu\nu\varrho - \mu^2\varrho. \end{aligned} \tag{2}$$

3) Man betrachte die zusammengesetzte Bedingung μy, und lege den Punkt von μ in die Ebene von y. Dann wird μy erstens von jedem Kegelschnitt erfüllt, welcher in der Ebene von y liegt, und dabei durch den Punkt von y geht, welcher also $\mu^3\nu$ erfüllt, zweitens aber auch von jedem Kegelschnitt, welcher die Verbindungslinie des Punktes von μ mit dem Punkte von y in letzterem berührt, d. h., welcher z erfüllt. Also ist:

$$\begin{aligned} z &= \mu y - \mu^3\nu \quad \text{oder}\\ z &= \mu(\tfrac{1}{2}\mu\nu\varrho - \mu^2\varrho) - \mu^3\nu = \tfrac{1}{2}\mu^2\nu\varrho - \mu^3\nu - \mu^3\varrho. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus den Incidenzformeln des § 9. erhält man nun die Moduln aller Bedingungen, die ausserdem noch berücksichtigt werden sollten.

So folgen aus den 4 Formeln:

$$\begin{aligned} cg &= c^2 + g_e, \\ cg_p &= c^3 + g_s, \\ c^2 g &= c^3 + cg_e, \\ cg_s &= c^2 g_p + G \end{aligned}$$

bezüglich die folgenden 4 Resultate:

4) Die Bedingung, ein Kegelschnitt soll eine Ebene so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts eine gegebene Gerade schneidet, hat den Modul:

$$\nu + \varrho.$$

5) Die Bedingung, ein Kegelschnitt soll eine Ebene so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts durch einen gegebenen Punkt geht, hat den Modul:

$$P + t = \mu\nu + \mu\varrho - 2\mu^2.$$

6) Die Bedingung, ein Kegelschnitt soll eine Gerade so schneiden, dass die Tangente des Schnittpunkts eine gegebene Gerade schneidet, hat den Modul:

$$P + x = \tfrac{1}{2}\nu\varrho + \mu\nu - 2\mu^2.$$

7) Die Bedingung, ein Kegelschnitt soll eine Ebene so berühren, dass der Berührungspunkt auf einer in der Ebene gegebenen Geraden liegt, während die zugehörige Tangente durch einen in der Ebene gegebenen Punkt geht, hat den Modul:

$$T + y = \tfrac{1}{2}\mu\nu\varrho - 2\mu^3.$$

Ein Theil der eben angegebenen Moduln ist von Halphen im Bull. de la Soc. math. de Fr. Bd. 2, p. 26 angegeben, ein Theil der darauf bezüglichen Anzahlen schon von Chasles in den Comptes rendus des Jahres 1867 zusammengestellt.

Beachtenswerth ist, dass ausser den elementaren Bedingungen P, ϱ', t, T auch die unter 4) und 5) genannten Bedingungen bei *jeder* Plancurve *elementare* Moduln besitzen, während die fünf ausserdem behandelten Bedingungen nur beim Kegelschnitt diese Eigenschaft haben.

Beispielsweise berechnen wir mit Hülfe des Moduls von z die Zahlen

$$z\nu^n\varrho^r, \quad (n+r=4),$$

und erhalten:

$$z\nu^4 = 4, \quad z\nu^3\varrho = 6, \quad z\nu^2\varrho^2 = 4, \quad z\nu\varrho^3 = 2, \quad z\varrho^4 = 1.$$

Die obigen Moduln werden später bei der Berechnung der Ausartungen,

welche Kegelschnitte zu Theilgebilden haben, fortwährend benutzt; und zwar sollen dann, der bessern Uebersicht wegen, nur die hier und in § 36. numerisch gegebenen 59 Zahlen wirklich geschrieben werden, die übrigen Zahlen dagegen in nicht ausgerechneter Form durch die Moduln dargestellt werden.

V. Abschnitt.

Die cubische Plancurve mit Spitze.

§ 38.

Die fundamentalen Einzelbedingungen der C_3^3 und die Beziehungen zwischen ihnen.

Wir steuern jetzt darauf hin, nach der im IV. Abschnitt auseinandergesetzten Methode alle fundamentalen Anzahlen der C_3^3 zu bestimmen. Wir stellen daher zunächst die schon in § 6. beispielsweise angegebenen *fundamentalen Einzelbedingungen* dieser Curve zusammen. Dieselben zerfallen in *elementare* und *singuläre*, die elementaren Einzelbedingungen wieder in *wesentliche* und *unwesentliche* (§ 10., p. 37). Die drei wesentlichen sind:

$\mu =$ die Ebene der C_3^3 soll durch einen gegebenen Punkt gehen;
$\nu =$ die C_3^3 soll eine gegebene Gerade schneiden;
$\varrho =$ die C_3^3 soll eine gegebene Ebene berühren.

Durch diese Bedingungen lassen sich die unwesentlichen elementaren Bedingungen vermittelst der Incidenzformeln des § 10. (p. 36 unten) ausdrücken. Man erhält, da Ordnung und Rang der C_3^3 gleich 3 sind, folgendes Resultat.

1) Die Bedingung μ_g, die C_3^3 soll ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, hat den Modul:

$$\mu_g = \mu^2.$$

2) Die Bedingung M, die C_3^3 soll in einer gegebenen Ebene liegen, hat den Modul:

$$\mathsf{M} = \mu^3.$$

3) Die Bedingung P, die C_3^3 soll durch einen gegebenen Punkt gehen, hat den Modul:

$$P = \mu\nu - 3\mu^2.$$

4) Die Bedingung ϱ', die C_3^3 soll eine Tangente durch einen gegebenen Punkt schicken, hat den Modul:

$$\varrho' = 3\mu.$$

5) Die Bedingung t, die C_3^3 soll eine Tangente in einem gegebenen Strahlbüschel besitzen, hat den Modul:

$$t = \mu\varrho.$$

6) Die Bedingung T, die C_3^3 soll eine gegebene Gerade berühren, hat den Modul:

$$T = \mu^2 \varrho - 3\mu^3 .$$

Hiernach brauchen bei der Bestimmung der Fundamentalzahlen der C_3^3 von den elementaren Bedingungen nur

$$\mu, \nu, \varrho$$

und die aus ihnen zusammengesetzten Bedingungen berücksichtigt zu werden.

Die Symbole der singulären Einzelbedingungen der C_3^3 ergeben sich nach der Bezeichnungsregel in § 5., p. 19, wenn wir festsetzen, dass immer bezeichnet werden soll mit

c *die Spitze*,
v *der Wendepunkt*,
y *der Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente*,
w *die Wendetangente*,
q *die Rückkehrtangente*,
z *die Verbindungsgerade von Spitze und Wendepunkt.*

Die eben genannten 3 Punkte und 3 Strahlen bilden die Ecken und Seiten eines Dreiecks, welches wir das *Singularitätendreieck* nennen wollen. Demselben gehören, den obigen Bezeichnungen gemäss, folgende *singuläre Einzelbedingungen* an:

a) *wesentliche:*

$$c,\ c_g,\ v,\ v_g,\ y,\ y_g,\ w,\ w_e,\ q,\ q_e,\ z,\ z_e;$$

b) *unwesentliche:*

$$C,\ V,\ Y,\ w_p,\ w_s,\ W,\ q_p,\ q_s,\ Q,\ z_p,\ z_s,\ Z.$$

Natürlich gelten für jede Ecke und jede Seite des Singularitätendreiecks die in § 8. gegebenen Beziehungen zwischen den Grundbedingungen eines Hauptelementes, also z. B.

$$v_g = v^2, \quad w w_e = w_s, \quad q^2 = q_p + q_e, \quad C = c^3.$$

Für c_g, v_g, y_g werden wir daher immer bezüglich c^2, v^2, y^2, und für C, V, Y bezüglich c^3, v^3, y^3 schreiben. Dagegen darf für w_e, q_e, z_e nur dann w^2, q^2, z^2 geschrieben werden, wenn eine feste Ebene vorausgesetzt, d. h. mit μ^3 symbolisch multiplicirt ist. Nach den Incidenzformeln lassen sich die unwesentlichen singulären Bedingungen durch die wesentlichen ausdrücken, wie hier folgt (§ 10., p. 36):

$$\begin{aligned}
c^3 &= \mu c^2 - \mu^2 c + \mu^3 ,\\
v^3 &= \mu v^2 - \mu^2 v + \mu^3 ,\\
y^3 &= \mu y^2 - \mu^2 y + \mu^3 ,\\
w_p &= \mu w - \mu^2 ,\\
q_p &= \mu q - \mu^2 ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_p &= \mu z - \mu^2, \\
w_s &= \mu w_e - \mu^3, \\
q_s &= \mu q_e - \mu^3, \\
z_s &= \mu z_e - \mu^3, \\
W &= \mu^2 w_e - \mu^3 w, \\
Q &= \mu^2 q_e - \mu^3 q, \\
Z &= \mu^2 z_e - \mu^3 z.
\end{aligned}
$$

So ist das Problem der Bestimmung *aller* fundamentalen Anzahlen der C_3^3 zurückgeführt auf das Problem, alle diejenigen zehnfachen Symbole numerisch zu bestimmen, welche aus den Potenzen von μ, ν, ϱ und aus den Bedingungen

$$c,\ c^2,\ v,\ v^2,\ y,\ y^2,\ w,\ w_e,\ q,\ q_e,\ z,\ z_e$$

zusammengesetzt sind.

Doch kann die Zahl der zu berechnenden Symbole noch weiter reducirt werden. Man beachte nämlich, dass jede Ecke des Singularitätendreiecks auf jeder von zwei Seiten desselben liegt, und wende dann die Incidenzformeln an, welche die Grundbedingungen eines Strahls mit denen eines in dem Strahle liegenden Punktes verbinden (§ 9., I.). Dadurch erhält man:

$$
\begin{aligned}
cq &= c^2 + q_e, \\
cz &= c^2 + z_e, \\
vz &= v^2 + z_e, \\
vw &= v^2 + w_e, \\
yw &= y^2 + w_e, \\
yq &= y^2 + q_e,
\end{aligned}
$$

und ausserdem alle Formeln, welche aus diesen durch symbolische Multiplicationen und geeignete Eliminationen hervorgehen, z. B.

$$
\begin{aligned}
cq_p &= c^3 + q_s, \\
v^2 w_p &= v^3 w + W.
\end{aligned}
$$

§ 39.

Die durch ein einstufiges Curvensystem gebildeten Paare von Punkten und Strahlen.

Um Formeln erster Dimension für die C_3^3 zu gewinnen, setzen wir ein ganz beliebiges, *einstufiges*, fundamentales System von Curven C_3^3 voraus, und betrachten die in demselben liegenden Systeme derjenigen einer und derselben Curve zugehörigen 25 Hauptelementenpaare, welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die jedem Paare nachgesetzte römische Nummer bezeichnet die Stufe des

Systems, welches von dem Paare in einem einstufigen Curvensysteme erzeugt wird.

Tabelle der 25 Paare.

1) Punkt c und Punkt v, I.
2) Strahl w und Strahl q, I.
3) v und y, I.
4) q und z, I.
5) y und c, I.
6) z und w, I.

7) c und ein Curvenpunkt, II.
8) w und eine Tangente, II.
9) v und ein Curvenpunkt, II.
10) q und eine Tangente, II.
11) y und ein Curvenpunkt, II.
12) z und eine Tangente, II.

13) Ein Curvenpunkt und der einfache Schnittpunkt der in ihm berührenden Tangente, II.
14) Eine Tangente und die von ihrem Berührungspunkt ausgehende andere Tangente, II.

15) Zwei Curvenpunkte, III.
16) Zwei Tangenten, III.

17) c und eine Tangente, II.
18) w und ein Curvenpunkt, II.
19) v und eine Tangente, II.
20) q und ein Curvenpunkt, II.
21) y und eine Tangente, II.
22) z und ein Curvenpunkt, II.

23) c und w, I.
24) v und q, I.
25) y und z, I.

Die ersten 22 der hier aufgezählten Paare sind so beschaffen, dass jedes mit einer geraden Nummer versehene *dem vorangehenden feld-dualistisch**) entspricht. Die 3 letzten Paare dagegen entsprechen *sich selbst* feld-dualistisch.

---

*) Ich möchte im Anschluss an die in § 4. eingeführte Terminologie *feld-dualistisch* diejenige dualistische Verwandtschaft nennen, welche in einer Ebene zwischen ihrem Punktfelde und ihrem Strahlenfelde besteht, *bündel-dualistisch* diejenige, welche in einem Punkte zwischen seinem Ebenenbündel und seinem Strahlenbündel besteht, *raum-dualistisch* oder dualistisch schlechthin diejenige, welche im Raume zwischen seinem Punktraume und seinem Ebenenraume besteht.

Auf jedes der von den 25 Paaren erzeugten 25 Systeme soll eine von den Formeln angewendet werden, welche im III. Abschnitt aus dem Chasles'schen Correspondenzprincip abgeleitet sind. Welche Formeln jedesmal anzuwenden sind, ist aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich, bei welcher die Bezeichnung des III. Abschnitts benutzt ist.

a) Auf die einstufigen Systeme von Punktepaaren, also auf 1), 3), 5) ist anzuwenden die Punktepaarformel erster Dimension, also

$$c + d - g = \varepsilon \quad (\S\ 16., \text{I.}).$$

b) Auf die zweistufigen Systeme von Punktepaaren, also auf 7), 9), 11), 13) ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei a) durch Multiplication mit g hervorgeht, also

$$c^2 + d^2 + g_e - g_p = \varepsilon g.$$

c) Auf das dreistufige System von Punktepaaren, also auf 15), ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei a) durch Multiplication mit g_e hervorgeht, also

$$cg_e + dg_e - g_s = \varepsilon g_e.$$

d) Auf die einstufigen Systeme von Strahlenpaaren, also auf 2), 4), 6) ist anzuwenden die Strahlenpaarformel erster Dimension für zwei sich schneidende Strahlen, also

$$g\sigma + h\sigma - \mu\sigma - c\sigma = \varepsilon\sigma \quad (\S\ 20., \text{I.}).$$

e) Auf die zweistufigen Systeme von Strahlenpaaren, also auf 8), 10), 12), 14) ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei d) durch Multiplication mit c hervorgeht, also

$$g_e\sigma + h_e\sigma + c^2\sigma - \mu c\sigma = \varepsilon\sigma c.$$

f) Auf das dreistufige Sytem von Strahlenpaaren, nämlich auf 16) ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei e) durch Multiplication mit c hervorgeht, also

$$cg_e\sigma + ch_e\sigma + \mu^3\sigma - \mu^2 c\sigma = \varepsilon\sigma c^2.$$

g) Auf die einstufigen Systeme der aus Punkt und Strahl bestehenden Paare, also auf 23), 24), 25) ist die in § 23., Nr. 4. für solche Paare aufgestellte Formel erster Dimension anzuwenden, nämlich

$$c + g - \mu = \varepsilon.$$

h) Auf die drei unter 17), 19), 21) genannten zweistufigen Systeme von Paaren ist anzuwenden die Formel, welche aus der Formel bei g) durch Multiplication mit g hervorgeht, also

$$cg + g_e - \mu^2 = \varepsilon g.$$

i) Auf die drei unter 18), 20), 22) genannten zweistufigen Systeme von Paaren ist anzuwenden die Formel, welche aus der bei g) durch Multiplication mit c hervorgeht, also

$$cg + c^2 - \mu c = \varepsilon c.$$

Natürlich würde auch in jedem der 25 Fälle eine ein- oder mehrmalige Anwendung des ursprünglichen Chasles'schen Correspondenzprincips zum Ziele führen. Doch wären dann in jedem einzelnen Falle immer wieder die Ueberlegungen nothwendig, welche im III. Abschnitt bei der Erweiterung des Correspondenzprincips *allgemein* und deshalb *ein für alle Mal* gemacht sind.

Einige unter den 25 Fällen erledigen sich durch die allgemeinen Formeln des § 35. für $n = 3$, $n' = 3$, $d = 0$, $d' = 0$, $e = 1$, $e' = 1$.

§ 40.

Die Formeln für einstufige fundamentale Curvensysteme.

Die 25 Formeln, welche aus den im vorigen Paragraphen besprochenen Anwendungen resultiren, sind hier mit denselben Nummern wie dort zusammengestellt. Die Zahl der Coincidenzen ist immer rechts vom Gleichheitszeichen geschrieben. Hinsichtlich der Curven, welche in Bezug auf jede der 25 Formeln ausgeartet sind, ist Folgendes zu bemerken.

Herr Zeuthen und Herr Maillard haben bei ihrer Bestimmung (cf. die allgemeine Einleitung in Bd. X) der elementaren Anzahlen der C_3^3 für eine feste Ebene gezeigt, dass diese Curve nur eine einzige Ausartung nullter Gattung besitzt, d. h. nur eine Ausartung von solcher Beschaffenheit, dass sie durch elementare Bedingungen allein vollständig bestimmbar ist. Wir bezeichnen diese Ausartung und also auch ihre Anzahl in einem einstufigen Systeme mit σ. Sie lässt sich mit Hülfe der in § 34. eingeführten Definitionen der Ordnungscurve und Rangcurve kurz so beschreiben.

„*σ hat einen Ordnungskegelschnitt, der zugleich Rangkegelschnitt ist, und von einer einfachen Ordnungsgeraden in einem einfachen Rangpunkte berührt wird. Die Spitze, der Wendepunkt und der Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente fallen in den Rangpunkt, die Wendetangente, die Rückkehrtangente und der Verbindungsstrahl von Spitze und Wendepunkt fallen in die Ordnungsgerade.*“

Die Zahlen σ führen wir sofort in jede der 25 Formeln ein. Aber die Zahl aller Curven, welche sonst noch in Bezug auf die mit der Nr. i) versehene Formel ausgeartet sind, bezeichnen wir zunächst mit α_i, indem wir auf die Zusammensetzung jeder der 25 Zahlen α_i aus Anzahlen für *verschiedene* Ausartungen hier noch nicht eingehen wollen. Jede Zahl α_i soll der *singuläre Defect* derjenigen Formel heissen, welche die Nummer i) trägt. Bei Voraussetzung eines *elementaren* Systems ist natürlich der singuläre Defect jeder Formel gleich Null.

Tabelle der 25 Formeln.

$$
\begin{array}{rl}
1) & c + v - z = \sigma + \alpha_1 , \\
2) & w + q - y - \mu = \sigma + \alpha_2 , \\
3) & v + y - w = \sigma + \alpha_3 , \\
4) & q + z - c - \mu = \sigma + \alpha_4 , \\
5) & y + c - q = \sigma + \alpha_5 , \\
6) & z + w - v - \mu = \sigma + \alpha_6 , \\
 & \\
7) & \nu + c - \mu = 2q + \alpha_7 , \\
8) & \varrho + w - \mu = 2v + \alpha_8 , \\
9) & \nu + 2v - 2\mu = w + 2\sigma + \alpha_9 , \\
10) & \varrho + 2q - 2\mu = c + 2\sigma + \alpha_{10} , \\
11) & \nu + 3y - 3\mu = 4\sigma + \alpha_{11} , \\
12) & \varrho + 3z - 3\mu = 4\sigma + \alpha_{12} , \\
 & \\
13) & 2\nu + \varrho - 3\mu = 2q + w + \alpha_{13} , \\
14) & 2\varrho + \nu - 3\mu = 2v + c + \alpha_{14} , \\
 & \\
15) & 2\nu + 2v - 6\mu = \varrho + 3c + \alpha_{15} , \\
16) & 2\varrho + 2\varrho = \nu + 3w + \alpha_{16} , \\
 & \\
17) & 3c + \varrho = 3q + \sigma + \alpha_{17} , \\
18) & 3w + \nu - 3\mu = 3v + \sigma + \alpha_{18} , \\
19) & 3v + \varrho = 3w + \sigma + \alpha_{19} , \\
20) & 3q + \nu - 3\mu = 3c + \sigma + \alpha_{20} , \\
21) & 3y + \varrho = 2w + q + \sigma + \alpha_{21} , \\
22) & 3z + \nu - 3\mu = 2c + v + \sigma + \alpha_{22} , \\
 & \\
23) & c + w - \mu = 2\sigma + \alpha_{23} , \\
24) & v + q - \mu = 2\sigma + \alpha_{24} , \\
25) & y + z - \mu = 2\sigma + \alpha_{25} ,
\end{array}
$$

Hier bedeutet also z. B. α_1 die Zahl aller derjenigen in dem gegebenen einstufigen Systeme vorhandenen, hinlänglich oft gezählten Ausartungen von höherer als der nullten Gattung, bei denen Spitze und Wendepunkt zusammenfallen, α_{13} die Zahl aller derjenigen, welche eine Tangente durch eine gegebene Gerade so schicken, dass ihr Berührungspunkt mit ihrem einfachen Schnittpunkte zusammenfällt.

Aus den 25 Formeln der obigen Tabelle erhält man auf mehrfache Weise jede der 7 Zahlen

$$2\sigma,\ 3c,\ 6v,\ 3y,\ 3w,\ 6q,\ 3z$$

als eine Function von μ, ν, ϱ, welche um eine Function der Zahlen α vermindert ist. So gewinnt man 7 Hauptformeln, welche wir bezüglich σ-Formel, c-Formel, v-Formel u. s. w. nennen wollen. Die in jeder dieser 7 Hauptformeln auftretende Function der Zahlen α soll wieder ihr *singulärer Defect* heissen, und bezüglich mit

$$\alpha_\sigma,\ \alpha_c,\ \alpha_v,\ \alpha_y,\ \alpha_w,\ \alpha_q,\ \alpha_z$$

bezeichnet werden.

Tabelle der 7 Hauptformeln.

26) $2\sigma = \nu + \varrho - 3\mu - \alpha_\sigma$,

27) $3c = 4\nu - \varrho - 6\mu - \alpha_c$,

28) $3w = 4\varrho - \nu - \alpha_w$,

29) $6v = 7\varrho - \nu - 3\mu - \alpha_v$,

30) $6q = 7\nu - \varrho - 9\mu - \alpha_q$,

31) $3y = 2\varrho + \nu - 3\mu - \alpha_y$,

32) $3z = 2\nu + \varrho - 3\mu - \alpha_z$.

§ 41.

Erzeugung der Ausartungen durch homographische Abbildung.

Jede der im vorigen Paragraphen eingeführten Zahlen α ist eine Summe von Anzahlen, von denen jede angiebt, wieviel Ausartungen von gewisser Definition in dem gegebenen, fundamentalen, einstufigen Systeme vorhanden sind. Derartiger Definitionen giebt es nun im Ganzen 12 verschiedene, mit andern Worten, die C_3^3 *hat ausser der Ausartung* σ *noch* 12 *andere fundamentale Ausartungen.* Die genaue Beschreibung derselben erhält man sehr leicht aus der allgemeinen C_3^3 durch eine gewisse homographische Abbildung*), welche jetzt besprochen werden soll.

Man nehme in fester Ebene einen Punkt S als *Centrum*, einen Strahl r als *Axe der Homographie* an, und bestimme dann das *Bild* A' jedes Punktes A in folgender Weise. Man ziehe den Strahl SA, welcher r in R_a schneide, und bestimme A' so, dass das Doppelverhältniss:

$$\frac{SA}{R_a A} : \frac{SA'}{R_a A'}$$

einen constanten Werth λ erhalte. Daraus folgt, dass man den Ort der Bilder aller Punkte eines Strahls a, oder kurz, das *Bild des Strahls* a

*) Auf diese Methode, die Ausartungen der C_3^3 aufzufinden, hat mich Herr Zeuthen brieflich aufmerksam gemacht, als ich dieselben schon auf dem mühsameren Wege a posteriori gefunden hatte.

erhält, indem man den Schnittpunkt von a und r mit S verbindet, und zu dem Verbindungsstrahle s_a, zu a und zu r denjenigen vierten Strahl construirt, welcher durch das Doppelverhältniss λ diesen 3 Strahlen so zugehört, wie A' zu R_a, A, S gehörte. Speciell erhält man das Bild der Tangente des Bildes A' eines Curvenpunktes A, indem man den Punkt, wo die A angehörige Tangente die Axe r schneidet, mit A' verbindet. Ueberhaupt wird bei der homographischen Abbildung einer Plancurve Ordnung und Rang erhalten, und das Bild jedes singulären Punktes oder Strahls wird im Allgemeinen wieder ein Punkt oder Strahl mit der nämlichen Singularität.

Wir setzen nun speciell $\lambda = 0$ und untersuchen die dadurch entstehenden Bilder einer festen Plancurve C_3^3 für die Fälle, dass die Axe der Homographie r zu der C_3^3 eine allgemeine und feste Lage hat, und dass das Centrum S der Homographie *alle möglichen Lagen zu der* C_3^3 *einnimmt.* Die so gewonnenen Bilder der C_3^3 und die ihnen dualistisch entsprechenden geben die sämmtlichen fundamentalen Ausartungen der C_3^3 ausser σ. Die Ecken und Seiten des Singularitätendreiecks der festen C_3^3 bezeichnen wir wieder mit den in § 38. für sie eingeführten Buchstaben, also mit

$$c,\ v,\ y,\ w,\ q,\ z.$$

1) *S liegt nicht auf der C_3^3 und auch nicht auf w oder q oder z.* Dann bilden die Bilder der sämmtlichen Punkte der C_3^3 drei mit der Axe r zusammenfallende Gerade. Von S gehen an die C_3^3 drei Tangenten, welche r in drei ausgezeichneten Punkten schneiden. Jeder durch einen dieser 3 Punkte gezogene Strahl ist nämlich als Tangente aufzufassen, weil für jeden solchen Strahl $\lambda = 0$ wird. Die drei ausgezeichneten Punkte sind also *Rangpunkte.* Die Bilder der Punkte c, v, y liegen auf r und sind von den drei Rangpunkten verschieden. Dagegen fallen die Wendetangente, die Rückkehrtangente und der Verbindungsstrahl von Spitze und Wendepunkt bei dem Bilde der C_3^3 mit r zusammen. Das so entstehende Bild*) ist eine ausgeartete C_3^3, welche in der Folge immer *mit ε_2 bezeichnet* werden soll.

2) *S liegt auf w, ohne v oder y zu sein.* Dann bilden die Punkte des Bildes wieder drei Gerade, welche mit r zusammenfallen. Die von S ausgehende Wendetangente schneidet r in einem *zweifachen* Rangpunkte, in den zugleich das Bild von v und von y fällt. Ausser der Wendetangente geht von S nur noch eine Tangente aus, welche r in einem *einfachen Rangpunkte* schneidet. Das Bild von c ist ein Punkt auf r, welcher nicht mit den Rangpunkten zusammenfällt. Das Bild

*) Der Leser zeichne sich die Ausartungen nach den gewonnenen Beschreibungen auf.

von w geht durch den doppelten Rangpunkt, ohne mit r zusammenzufallen. Die Bilder von q und von z fallen mit r zusammen. Die so entstandene Ausartung der C_3^3 bekommt *das Symbol* η_2.

3) *S liegt auf q, ohne c oder y zu sein.* Dann wird r wieder eine dreifache Ordnungsgerade. q schneidet r in einem *einfachen* Rangpunkte, in welchen zugleich die Bilder von c und y fallen. Ausser der Rückkehrtangente gehen von S noch *zwei* andere Tangenten aus, welche r in *zwei einfachen* Rangpunkten schneiden. Das Bild von v ist ein von den Rangpunkten verschiedener Punkt auf r. Das Bild von q ist ein durch das Bild von c gehender, von r verschiedener Strahl. Die Bilder von w und z fallen mit r zusammen. Die entstandene Ausartung der C_3^3 *soll* ε_1 *heissen.*

4) *S liegt auf z, ohne c oder v zu sein.* Dann wird r wieder dreifache Ordnungsgerade mit *drei einfachen Rangpunkten*, nämlich den Schnittpunkten der drei von S ausgehenden Tangenten. z schneidet r in einem Punkte, welcher die Bilder von c und v vereinigt, während ein durch diesen Punkt gehender, von r verschiedener Strahl das Bild von z giebt. Das Bild von y ist ein von den übrigen ausgezeichneten Punkten verschiedener Punkt auf r. Die Bilder von w und von q fallen mit r zusammen. Die entstandene Ausartung *heisse* ε_3.

5) *S ist der Punkt y.* Dann ist r wieder eine dreifache Ordnungsgerade. w schneidet r in einem *zweifachen*, q in einem *einfachen Rangpunkte.* Der zweifache Rangpunkt ist zugleich das Bild von v, der einfache das von c. Das Bild von w geht durch das Bild von v und ist von r verschieden, das Bild von q geht durch das Bild von c und ist auch von r verschieden. Die Bilder von w und von q schneiden sich in dem Bilde von y. Das Bild von z fällt mit r zusammen. Bei dieser Ausartung, *welche* η_1 *heissen soll*, erscheint also das *Singularitätendreieck* nicht specialisirt, sondern *in allgemeiner Gestalt.*

6) *S ist ein Curvenpunkt, jedoch von c und von v verschieden.* Jede Gerade durch S schneidet dann die Curve noch in *zwei* anderen Punkten, deren Bilder auf r fallen. r wird also *doppelte Ordnungsgerade.* Als Bild von S kann jeder Punkt der in S berührenden Tangente aufgefasst werden. Diese wird also *einfache Ordnungsgerade.* Ihr Schnittpunkt mit r wird *doppelter Rangpunkt.* Ausserdem geht von S noch eine andere Tangente an die C_3^3, welche r in einem *einfachen Rangpunkte* schneidet. Die Bilder von c, v, y sind Punkte auf r, welche von den Rangpunkten verschieden sind. Die Bilder von w, q, z fallen mit r zusammen. *Diese Ausartung heisse* δ_2.

7) *S ist der Punkt c.* Dann schneidet jede Gerade durch S die Curve nur noch in einem Punkte, dessen Bild auf r fällt. Also wird r *einfache Ordnungsgerade.* Die Rückkehrtangente q wird *zweifache*

Ordnungsgerade und schneidet r in einem *dreifachen Rangpunkte*. Das Bild von v liegt auf der einfachen, das von c auf der zweifachen Ordnungsgeraden. Mit der ersteren fällt daher das Bild von w, mit der letzteren das von q zusammen. Das Bild von y fällt in den dreifachen Rangpunkt, und das Bild von z verbindet die Bilder von c und von v. Diese Ausartung entspricht der oben mit η_1 bezeichneten feld-dualistisch, und *soll* ϑ_1 *heissen*.

8) *S ist der Punkt* v. Dann erhalten wir genau wieder die eben beschriebene und mit η_1 bezeichnete Ausartung, nur dass jetzt r die *zweifache* Ordnungsgerade wird.

Aus den eben aufgefundenen 7 Ausartungen

$$\varepsilon_2,\ \eta_2,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_3,\ \eta_1,\ \delta_2,\ \vartheta_1$$

erhält man durch feld-dualistische Uebersetzung der Beschreibungen, oder auch, indem man das *Centrum* der homographischen Abbildung festhält, der *Axe* alle möglichen Lagen ertheilt und $\lambda = \infty$ setzt, 7 *Ausartungen*, welche bezüglich folgende Symbole bekommen:

$$\tau_2,\ \vartheta_2,\ \tau_1,\ \tau_3,\ \vartheta_1,\ \delta_1,\ \eta_1.$$

Hiermit sind zwölf verschiedene Ausartungen erzeugt. Die Symbole für dieselben sind so gewählt, dass solche Ausartungen, deren Beschreibungen hinsichtlich des Punktorts und des Tangentenorts genau übereinstimmen, *mit denselben Buchstaben*, *jedoch verschiedenen Indices* bezeichnet sind. Es bestehen nämlich:

1) δ_1 und δ_2 aus einer doppelten und einer einfachen Ordnungsgeraden, mit einem doppelten Rangpunkte im Schnittpunkte beider, und einem einfachen Rangpunkte auf der doppelten Ordnungsgeraden;
2) τ_1, τ_2, τ_3 aus drei einfachen Ordnungsgeraden, die sich in einem dreifachen Rangpunkte schneiden;
3) ε_1, ε_2, ε_3 aus einer dreifachen Ordnungsgeraden, auf welcher drei einfache Rangpunkte liegen;
4) ϑ_1, ϑ_2 aus einer zweifachen und einer einfachen Ordnungsgeraden, die sich in einem dreifachen Rangpunkte schneiden;
5) η_1 und η_2 aus einer dreifachen Ordnungsgeraden, auf welcher ein einfacher und ein zweifacher Rangpunkt liegen.

Mit σ haben wir nunmehr 13 fundamentale Ausartungen der C_3^3 aufgefunden. Diese kommen in den einstufigen, fundamentalen Systemen sämmtlich vor, ausserdem aber keine andern; ein Resultat, welches der Verfasser auf dem am Schluss von § 34. a posteriorisch genannten Wege erkannt hat. Jede der 13 Ausartungen hat also im Raume die Constantenzahl 9. Der Punktort und der Tangentenort ist aber bei

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$$

durch eine 8-fache, bei

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \eta_1,\ \eta_2$$

durch eine 7-fache elementare Bedingung bestimmt. Folglich sind die erstgenannten 8 Ausartungen *erster Gattung*, die 4 letztgenannten *zweiter Gattung* (Schluss von § 33.). Ferner folgt daraus, dass die Ausartungen die Constantenzahl 9 haben, die wichtige Eigenschaft, dass auf

$$\delta_2,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$$

die auf der vielfachen Ordnungsgeraden liegenden 4, 5 oder 6 ausgezeichneten Punkte *keine beliebige Lage* zu einander haben können, und dass ebenso auf

$$\delta_1,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$$

die durch den vielfachen Rangpunkt gehenden, ausgezeichneten Strahlen in ihrer Lage *nicht von einander unabhängig* sein können. In der That wird die gegenseitige Lage dieser Punkte resp. Strahlen durch gewisse *Gleichungen* bedingt, *deren Gradzahlen der Verfasser a posteriori bestimmt.* Diese Gleichungen gewinnen dadurch an Werth, dass sie durch unsere homographische Abbildung auch auf die allgemeine C_3^3 übertragen werden können. Näheres darüber folgt in § 51.

§ 42.

Die singulären Defecte der Formeln des § 40.

Ist ξ eins der Symbole, welche im vorigen Paragraphen für die Ausartungen eingeführt sind, so bezeichnet ξ zugleich auch die Anzahl aller Ausartungen ξ des zu Grunde liegenden, einstufigen, fundamentalen Systems, und ξz, wo z eine a-fache Bedingung ist, die Zahl aller derjenigen Ausartungen eines vorgelegten $(a+1)$-stufigen Systems, welche die Bedingung z erfüllen. Jede der ersten 25 Zahlen α des § 40. ist natürlich eine Summe der mit gewissen Coefficienten multiplicirten 12 Ausartungssymbole, und zwar sind diese Coefficienten entweder Null oder positive ganze Zahlen. Aus der Beschreibung der Ausartungen ersieht man in jedem der $25 \cdot 12$ Fälle leicht, ob der Coefficient Null ist oder nicht. Ist er nicht gleich Null, so kann man sowohl algebraisch, wie auch a posteriorisch leicht ermitteln, welchen Werth er hat.

In der hier folgenden tabellarischen Zusammenstellung der $25 \cdot 12$ Coefficienten konnte wegen der Eigenschaft der C_3^3, dualistisch sich selbst zu entsprechen, fast die Hälfte der Coefficienten gespart werden. Man hat nämlich die Zahlen α der 25 Formeln des § 40. durch die Ausartungsanzahlen vermittelst der nachstehenden Tabelle *nach folgender Regel* zu ersetzen:

„Jede links resp. rechts stehende Zahl α ist gleich der Summe der 12 Producte, deren jedes einen in derselben Horizontalreihe stehenden Coefficienten zum einen Factor und diejenige Ausartungszahl zum andern Factor hat, welche mit diesem Coefficienten in derselben Verticalreihe oben resp. unten steht.“

Tabelle der Coefficienten der Ausartungsanzahlen in den 25 Formeln des § 40.

	δ_1	δ_2	τ_1	τ_2	τ_3	ε_1	ε_2	ε_3	ϑ_1	ϑ_2	η_1	η_2	
α_1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	α_2
α_3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	α_4
α_5	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	α_6
α_7	1	0	1	1	1	3	1	1	0	0	1	1	α_8
α_9	2	1	0	2	2	2	2	2	0	2	1	3	α_{10}
α_{11}	3	2	3	3	0	3	3	3	1	3	0	3	α_{12}
α_{13}	2	1	3	3	3	5	3	3	1	3	2	4	α_{14}
α_{15}	1	2	0	0	0	6	6	6	1	3	2	6	α_{16}
α_{17}	2	0	3	3	3	3	0	0	0	0	1	0	α_{18}
α_{19}	2	0	0	3	3	0	0	0	0	3	1	3	α_{20}
α_{21}	2	0	3	3	0	1	0	0	1	3	0	2	α_{22}
α_{23}	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	α_{23}
α_{24}	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	α_{24}
α_{25}	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	α_{25}
	δ_2	δ_1	ε_1	ε_2	ε_3	τ_1	τ_2	τ_3	η_1	η_2	ϑ_1	ϑ_2	

Hieraus ergeben sich mit vielen Bestätigungen auch die Werthe der singulären Defecte der 7 *Hauptformeln* des § 40. Man hat nämlich zu setzen:

$$\alpha_\sigma = 2\delta_1 + 2\delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2\,,$$

$$\alpha_c = \delta_1 + 2\delta_2 + 6\varepsilon_1 + 6\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + 2\eta_1 + 6\eta_2\,,$$

$$\alpha_w = 2\delta_1 + \delta_2 + 6\tau_1 + 6\tau_2 + 6\tau_3 + 2\vartheta_1 + 6\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2\,,$$

$$\alpha_v = 2\delta_1 + 4\delta_2 + 15\tau_1 + 9\tau_2 + 9\tau_3 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 5\vartheta_1 + 9\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2\,,$$

$$\begin{aligned}\alpha_q &= 4\delta_1 + 2\delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 + 15\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 9\varepsilon_3\\ &\quad + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + 5\eta_1 + 9\eta_2\,,\\ \alpha_y &= \delta_1 + 2\delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 6\tau_3 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3\\ &\quad + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + 2\eta_1 + 3\eta_2\,,\\ \alpha_z &= 2\delta_1 + \delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3\\ &\quad + 2\vartheta_1 + 3\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2\,.\end{aligned}$$

Nach Einführung dieser Werthe in die 7 Hauptformeln hat man hinreichende Mittel, um alle fundamentalen Anzahlen der C_3^3 zu berechnen und zugleich wegen der zahlreichen *Verificationen Rückschlüsse* über die Natur der Ausartungen und etwa zweifelhafte Coefficienten zu machen; vorausgesetzt, dass die sämmtlichen fundamentalen Ausartungsanzahlen berechnet vorliegen. Die Berechnung der letztern ist daher unser nächstes Ziel.

§ 43.

Die Berechnung der Anzahlen für die Ausartung nullter Gattung σ.

Indem wir die Beschreibung der Ausartung σ hier wiederholen, führen wir zugleich einige bei der Berechnung benutzte Symbole ein.

Die Ausartung σ besteht aus einem in der Ebene μ gelegenen Ordnungskegelschnitt k, der von einer Ordnungsgeraden a in einem Punkte d berührt wird. k ist zugleich Rangkegelschnitt und d Rangpunkt. Die Ecken c, v, y des Singularitätendreiecks fallen sämmtlich mit d, die Seiten w, q, z desselben mit a zusammen. Die Bedingung, dass σ seinen Kegelschnitt eine gegebene Gerade schneiden lasse, heisse n, und die Bedingung, dass σ seinen Kegelschnitt eine gegebene Ebene berühren lasse, heisse r. Jede aus Potenzen von μ, n, r zusammengesetzte i-fache Bedingung heisse k_i.

Hiernach spaltet sich die Berührung ν für die Ausartung σ in die beiden Bedingungen a und n, also

$$\sigma\nu = \sigma a + \sigma n,$$

und überhaupt:

$$\sigma\nu^\alpha = \sigma(a+n)^\alpha.$$

Ebenso:

$$\sigma\varrho^\alpha = \sigma(d+r)^\alpha.$$

Ferner ist, der Beschreibung gemäss:

$$\begin{aligned}\sigma c &= \sigma v = \sigma y = \sigma d\,,\\ \sigma c^2 &= \sigma v^2 = \sigma y^2 = \sigma d^2,\\ \sigma w &= \sigma q = \sigma z = \sigma a\,,\\ \sigma w_e &= \sigma q_e = \sigma z_e = \sigma a_e\,.\end{aligned}$$

Natürlich auch:

$$\sigma c^3 = \sigma d^3, \quad \sigma q_s = \sigma a_s, \text{ u. s. f.}$$

Hiernach kann man alle möglichen fundamentalen Zahlen σ schliesslich durch die folgenden 11 Gruppen von *Stammzahlen* ausdrücken:

$$\sigma k_8 a, \quad \sigma k_8 d,$$
$$\sigma k_7 a_p, \quad \sigma k_7 a_e, \quad \sigma k_7 d^2,$$
$$\sigma k_6 a_s, \quad \sigma k_6 d^3, \quad \sigma k_6 d a_e,$$
$$\sigma k_5 A, \quad \sigma k_5 d^2 a_e,$$
$$\sigma k_4 A d.$$

Die Symbole, welche zu fehlen scheinen, lassen sich durch die allgemeinen Lageformeln auf die eben angegebenen Stammzahlen zurückführen. Z. B.:

$$\sigma k_7 a d = \sigma k_7 a_e + \sigma k_7 d^2,$$
$$\sigma k_6 a d^2 = \sigma k_6 d a_e + \sigma k_6 d^3,$$
$$\sigma k_5 a^3 d = 2\sigma k_5 a_s d = 2\sigma k_5 A + 2\sigma k_5 d^2 a_e.$$

Die Stammzahlen lassen sich nun durch die in § 37. und § 38. berechneten Kegelschnittanzahlen leicht ausdrücken. Man beachte dabei nur, dass a den Kegelschnitt k in d berührt. Dann erhält man folgende Tabelle, wo die Symbole rechts vom ersten Gleichheitszeichen nicht auf σ, sondern auf den *Kegelschnitt* zu beziehen sind, und wo die Symbole der §§ 37. und 38. angewandt sind, nur dass statt ν immer n, statt ϱ immer r geschrieben ist.

1) $\sigma k_8 a = 2k_8$,
2) $\sigma k_8 d = 2k_8$,
3) $\sigma k_7 a_p = 2\mu k_7$,
4) $\sigma k_7 a_e = r k_7$,
5) $\sigma k_7 d^2 = n k_7$,
6) $\sigma k_6 a_s = t k_6 = \mu r k_6$,
7) $\sigma k_6 d^3 = P k_6 = (\mu n - 2\mu^2) k_6$,
8) $\sigma k_6 d a_e = x k_6 = \frac{1}{2} n r k_6$,
9) $\sigma k_5 A = T k_5 = (\mu^2 n - 2\mu^3) k_5$,
10) $\sigma k_5 d^2 a_e = y k_5 = (\frac{1}{2}\mu n r - \mu^2 r) k_5$,
11) $\sigma k_4 A d = z k_4 = (\frac{1}{2}\mu^2 n r - \mu^3 n - \mu^3 r) k_4$.

Damit ist die Berechnung aller fundamentalen Zahlen σ theoretisch geleistet.

Die numerische Ausrechnung ersehe man aus folgenden Beispielen:

1) *Berechnung von* $\sigma \nu^5 \varrho^4$.

$$
\begin{aligned}
\sigma\nu^5\varrho^4 &= \sigma(r+d)^4(n+a)^5 \\
&= 4_0 \cdot \sigma r^4 \cdot [5_1{}^{*)} \cdot n^4 a + 5_2 \cdot n^3(a_p + a_e) + 5_3 \cdot 2 \cdot n^2 a_s + 5_4 \cdot 2 \cdot n A] \\
&\quad + 4_1 \cdot \sigma r^3 \cdot [5_0 \cdot n^5 d + 5_1 \cdot n^4(d^2 + a_e) + 5_2 \cdot n^3(a_s + d^3 + d a_e) \\
&\qquad + 5_3 \cdot 2 \cdot n^2(A + d^2 a_e) + 5_4 \cdot 2 \cdot n A d] \\
&\quad + 4_2 \cdot \sigma r^2 \cdot [5_0 \cdot n^5 d^2 + 5_1 \cdot n^4(d a_e + d^3) + 5_2 \cdot n^3(A + 2 d^2 a_e) \\
&\qquad + 5_3 \cdot 2 \cdot n^2 d A] \\
&\quad + 4_3 \cdot \sigma r \cdot [5_0 \cdot n^5 d^3 + 5_1 \cdot n^4 d^2 a_e + 5_2 \cdot n^3 A d] \\
&= 4_0 \cdot [5_1 \cdot 64 \cdot 2 + 5_2 \cdot (48 \cdot 2 + 32) + 5_3 \cdot 2 \cdot 24 + 5_4 \cdot 2 \cdot 4] \\
&\quad + 4_1 \cdot [5_0 \cdot 104 \cdot 2 + 5_1 \cdot (104 + 64) + 5_2 \cdot (24 + 48 + \tfrac{1}{2} \cdot 64) \\
&\qquad + 5_3 \cdot 2 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot 48 - 4 \cdot 2) + 5_4 \cdot 2 \cdot 2] \\
&\quad + 4_2 \cdot [5_0 \cdot 128 + 5_1 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot 104 + 28) + 5_2 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot 72 - 4 \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot 24) \\
&\qquad + 5_3 \cdot 2 \cdot 4] \\
&\quad + 4_3 \cdot [5_0 \cdot 24 + 5_1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 28 + 5_2 \cdot 6] \\
&= \mathbf{18816}.
\end{aligned}
$$

2) *Berechnung von* $\sigma q_e \mu^2 \varrho^5$.

$$
\begin{aligned}
\sigma q_e \mu^2 \varrho^5 &= \sigma a_e \mu^2 (r+d)^5 \\
&= 5_0 \cdot \sigma a_e \mu^2 r^5 + 5_1 \cdot \sigma a_e d \mu^2 r^4 + 5_2 \cdot \sigma a_e d^2 \mu^2 r^3 \\
&= 5_0 \cdot 4 + 5_1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 8 + 5_2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2 \\
&= \mathbf{34}.
\end{aligned}
$$

3) *Berechnung von* $\sigma w q z_e \varrho^5$.

$$
\begin{aligned}
\sigma w q z_e \varrho^5 &= \sigma a a a_e (r+d)^5 = \sigma A (r+d)^5 \\
&= 5_0 \cdot \sigma A r^5 + 5_1 \cdot \sigma A d r^4 \\
&= 5_0 \cdot 2 + 5_1 \cdot 1 \\
&= \mathbf{7}.
\end{aligned}
$$

4) *Berechnung von* $\sigma w y \nu^2 \mu \nu^3 \varrho$.

$$
\begin{aligned}
\sigma w y \nu^2 \mu \nu^3 \varrho &= \sigma a d d^2 \mu (n+a)^3 (r+d) \\
&= \sigma a d^3 \mu (n+a)^3 r \\
&= 3_0 \cdot \sigma a_e d^2 \mu n^3 r + 3_1 \cdot \sigma A d \mu n^2 r \\
&= 3_0 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 16 + 3_1 \cdot 2 \\
&= \mathbf{14}.
\end{aligned}
$$

Hierzu fügen wir noch die numerischen Werthe aller derjenigen Zahlen σ, welche *nur* elementare Bedingungen enthalten, und aller derjenigen

---

*) Hier, wie immer, bezeichne ich die Zahl, welche angiebt, wie oft man aus p Elementen je i absondern kann, mit p_i.

Zahlen σ, welche ausser elementaren Bedingungen nur *eine einfache* Singularitätenbedingung, also entweder a oder d enthalten. Hinsichtlich der Anordnung dieser Zahlen innerhalb der folgenden Tabelle ist zu beachten, dass immer diejenige Zahl, welche einer mit σ multiplicirten α-fachen Bedingung *als* i^{te} *nachgesetzt ist*, die Bedingung $\nu^{10-\alpha-i}\varrho^{i-1}$ enthält.

Tabelle von Zahlen σ.

$\sigma\mu^3$ = 42, 87, 141, 168, 141, 87, 42.
$\sigma\mu^2$ = 588, 1086, 1584, 1767, 1518, 1053, 606, 294.
$\sigma\mu$ = 4296, 7068, 9222, 9393, 7626, 5136, 3003, 1587, 768.
σ = 20040, 28344, 31356, 26994, 18816, 11190, 6054, 3051, 1464, 696.
$\sigma a\mu^3$ = 12, 27, 45, 54, 45, 27.
$\sigma a\mu^2$ = 172, 340, 508, 571, 490, 337, 190.
$\sigma a\mu$ = 1272, 2220, 2960, 3037, 2466, 1652, 955, 495.
σa = 5912, 8840, 9980, 8640, 6008, 3542, 1890, 935, 440.
$\sigma d\mu^3$ = 27, 45, 54, 45, 27, 12.
$\sigma d\mu^2$ = 338, 506, 569, 488, 335, 188, 86.
$\sigma d\mu$ = 2196, 2938, 3017, 2448, 1636, 941, 483, 222.
σd = 8680, 9844, 8526, 5914, 3466, 1830, 889, 406, 184.

Es bedeutet also z. B. die vierte Zahl hinter $\sigma a\mu$, also 3037, dass es 3037 in eine Curve σ ausgeartete cubische Plancurven mit Spitze giebt, welche ihre Ordnungsgerade eine gegebene Gerade schneiden lassen, ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken und dabei 4 gegebene Gerade schneiden, sowie 3 gegebene Ebenen berühren.

§ 44.

Die Berechnung der Anzahlen für die Ausartungen zweiter Gattung ϑ_1, ϑ_2, η_1, η_2.

Wir behandeln die Ausartungen *zweiter* Gattung vor denen erster Gattung, weil bei den ersteren zwischen den ausgezeichneten Punkten und Strahlen *keine* Lagebeziehungen bestehen und daher die Berechnung erleichtert wird.

Bei allen Ausartungen der C_3^3 *bezeichnen wir*

1) einfache Ordnungsgeraden mit a,
2) die mehrfache Ordnungsgerade mit b,
3) einfache Rangpunkte mit d,
4) den mehrfachen Rangpunkt mit e.

Hiernach kommt, gemäss § 41., den 4 Ausartungen zweiter Gattung folgende Beschreibung zu.

1) *Die Ausartung* ϑ_1 *besitzt eine mit der Wendetangente* w *identische, einfache Ordnungsgerade* a, *und eine mit der Rückkehrtangente* q *identische, zweifache Ordnungsgerade* b. *Beide schneiden sich in einem dreifachen Rangpunkte* e, *in welchen also auch* y *fällt. Die Spitze* c *ist ein Punkt der zweifachen, der Wendepunkt* v *ein Punkt der einfachen Ordnungsgeraden. Beide Punkte verbindet* z. *Hiernach kann eine Zahl* ϑ_1 *nur dann von Null verschieden sein, wenn sie ausser elementaren Bedingungen entweder die Bedingung* cv *oder* cz *oder* vz *oder* z_e *oder Bedingungen enthält, welche eine dieser Bedingungen als Factor enthalten, wie etwa* $z_s = zz_e$.

2) *Die Ausartung* ϑ_2 *besitzt eine einfache Ordnungsgerade* a *und eine mit* q *und mit* z *zusammenfallende, zweifache Ordnungsgerade* b. *Beide schneiden sich in einem dreifachen Rangpunkte* e, *in welchen auch* v *und* y *fallen. Die Spitze* c *ist ein auf* b *gelegener Punkt, die Wendetangente* w *ein durch* e *gehender Strahl. Hiernach kann eine Zahl* ϑ_2 *nur dann von Null verschieden sein, wenn sie ausser elementaren Bedingungen die Bedingung* cw *oder eine aus* cw *ableitbare Bedingung enthält, wie etwa* $c^2 w_e$.

3) *Die Ausartung* η_1 *entspricht* ϑ_1 *feld-dualistisch. Sie besitzt eine in der Ebene* μ *gelegene dreifache Ordnungsgerade* b, *welche mit* z *zusammenfällt. Auf dieser liegen ein mit* v *zusammenfallender zweifacher Rangpunkt* e *und ein mit* c *zusammenfallender einfacher Rangpunkt* d. *Die Wendetangente* w *ist ein Strahl durch* d *und die Rückkehrtangente* q *ein Strahl durch* e. *Beide schneiden sich in* y. *Hiernach kann eine Zahl* η_1 *nur dann von Null verschieden sein, wenn sie ausser elementaren Bedingungen entweder die Bedingung* wq *oder* wy *oder* qy *oder* y^2 *oder Bedingungen enthält, die sich aus einer von diesen Bedingungen ableiten lassen, wie etwa* $w_e q_e$.

4) *Die Ausartung* η_2 *entspricht* ϑ_2 *feld-dualistisch. Sie besitzt eine in der Ebene* μ *gelegene dreifache Ordnungsgerade* b, *welche mit* q *und* z *zusammenfällt. Auf dieser liegen ein einfacher Rangpunkt* d, *ferner die Spitze* c *und endlich ein einfacher Rangpunkt* e, *welcher mit* v *und* y *zusammenfällt und von welchem die Wendetangente* w *ausgeht. Hiernach kann eine Zahl* η_2 *nur dann von Null verschieden sein, wenn sie ausser elementaren Bedingungen die Bedingung* cw *oder eine aus* cw *hervorgehende Bedingung enthält, wie etwa* cW.

Diesen Beschreibungen zufolge kann man immer setzen:

$$\vartheta_1 \nu^\alpha \varrho^\beta = \vartheta_1 (a+2b)^\alpha \cdot (3e)^\beta,$$
$$\vartheta_2 \nu^\alpha \varrho^\beta = \vartheta_2 (a+2b)^\alpha \cdot (3e)^\beta,$$
$$\eta_1 \nu^\alpha \varrho^\beta = \eta_1 (3b)^\alpha \cdot (d+2e)^\beta,$$
$$\eta_2 \nu^\alpha \varrho^\beta = \eta_2 (3b)^\alpha \cdot (d+2e)^\beta,$$

$$\vartheta_1 w = \vartheta_1 a, \quad \vartheta_1 q = \vartheta_1 b, \quad \vartheta_1 y = \vartheta_1 e,$$
$$\vartheta_2 q = \vartheta_2 z = \vartheta_2 b, \quad \vartheta_2 v = \vartheta_2 y = \vartheta_2 e,$$
$$\eta_1 c = \eta_1 d, \quad \eta_1 v = \eta_1 e, \quad \eta_1 z = \eta_1 b,$$
$$\eta_2 v = \eta_2 y = \eta_2 e, \quad \eta_2 q = \eta_2 z = \eta_2 b.$$

Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres, was man für die mehrfachen singulären Bedingungungen zu setzen hat, z. B.

$$\vartheta_1 c w_e q_s = \vartheta_1 c a_e b_s,$$
$$\eta_2 q w v^3 = \eta_2 b w e^3.$$

Da die beiden Ordnungsgeraden a und b jeder der beiden ϑ durch e gehen und in μ liegen, so können alle mehrfachen, auf a und b bezüglichen Bedingungen durch μ, e und die einfachen Bedingungen a oder b ausgedrückt werden. Ebenso kann man bei η_1 und η_2 alle mehrfachen, auf d oder e bezüglichen Bedingungen durch μ, b und die einfachen Bedingungen d und e ausdrücken. Z. B.

$$\vartheta_1 a_e = \vartheta_1 ea - \vartheta_1 e^2,$$
$$\vartheta_2 b_s = \vartheta_1 {}_2\mu eb - \vartheta_2 e^3 - \vartheta_2 e\mu^2,$$
$$\eta_1 d^2 = \eta_1 bd - \eta_1 b_e,$$
$$\eta_2 e^3 = \eta_2 \mu be - \eta_2 \mu^2 e - \eta_2 b_s.$$

Ebenso lassen sich auch bei ϑ_1 und ϑ_2 die Potenzen von a und b, und bei η_1 und η_2 die Potenzen von d und e *reduciren*. Z. B.

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 a^3 b^2 &= 2\vartheta_1 a_s b_p + 2\vartheta_1 a_s b_e \\
&= 2\vartheta_1(\mu ea - \mu^2 e - e^3)(\mu b - \mu^2) \\
&\quad + 2\vartheta_1(\mu ea - \mu^2 e - e^3)(eb - e^2) \\
&= 2\vartheta_1(\mu^2 eab - \mu^3 ea - \mu^3 eb - \mu e^3 b + \mu^3 e^2) \\
&\quad + 2\vartheta_1(\mu e^2 ab - \mu e^3 a - \mu^2 e^2 b + \mu^2 e^2)\,^{*)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_2 a^4 b^3 &= 2 \cdot 2 \cdot \vartheta_2 A b_s \\
&= 4\vartheta_2 \mu^3 e^2 ab,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_2 d^2 e^2 &= \eta_2(db - b_e)(eb - b_e) \\
&= \eta_2 b^2 de - \eta_2 b_s e - \eta_2 b_s d + \eta_2 B.
\end{aligned}$$

Analog kann man auch bei ϑ_2 und η_2 die mehrfachen Bedingungen von w und c reduciren. Z. B.

$$\vartheta_2 w_e = \vartheta_2 ew - \vartheta_2 e^2,$$
$$\eta_2 c^3 = \eta_2 \mu cb - \eta_2 \mu^2 c - \eta_2 b_s.$$

Führt man nun die eben besprochenen Reductionen bei allen denkbaren, den Ausartungen ϑ_1, ϑ_2, η_1, η_2 auferlegten, neunfachen funda-

---

*) Diese Reductionen sind schon in § 13. eingehend behandelt.

mentalen Bedingungen aus, so gelangt man schliesslich nur zu folgenden, von Null verschiedenen Symbolen:

$$\vartheta_1\mu^3e^2abcv,\quad \vartheta_1\mu^3e^2abvz,\quad \vartheta_1\mu^3e^2abcz,\quad \vartheta_1\mu^3e^2abz_e,$$
$$\eta_1\mu Bdewq,\quad \eta_1\mu Bdeqy,\quad \eta_1\mu Bdewy,\quad \eta_1\mu Bdey^2,$$
$$\vartheta_2\mu^3e^2abcw,\quad \eta_2\mu^3e^2abcw.$$

Diese Symbole aber haben sämmtlich den Werth 1.

Damit ist die Berechnung aller fundamentalen Anzahlen der Ausartungen zweiter Gattung theoretisch geleistet.

Die numerische Ausrechnung ersehe man aus folgenden Beispielen:

1) *Berechnung von* $\vartheta_1\mu^2\nu^4cwv$.

$$\begin{aligned}\vartheta_1\mu^2\nu^4cwv &= \vartheta_1\mu^2(a+2b)^4acv\\ &= \vartheta_1\mu^2cv(4_1\cdot a^4\cdot 2^1b + 4_2\cdot a^3\cdot 2^2b^2 + 4_3\cdot a^2\cdot 2^3b^3\\ &\qquad + 4_4\cdot a\cdot 2^4b^4)\\ &= 4_2\cdot 2^2\cdot 2 + 4_3\cdot 2^3\cdot 2\\ &= \mathbf{112}.\end{aligned}$$

2) *Berechnung von* $\vartheta_2\mu^2cw_e\nu^3\varrho$.

$$\begin{aligned}\vartheta_2\mu^2cw_e\nu^3\varrho &= \vartheta_2\mu^2c(ew-e^2)\,(a+2b)^3\cdot 3^1e\\ &= 3^1\vartheta_2\mu^2e^2cw(a+2b)^3\\ &= 3^1\vartheta_2\mu^2e^2cw(3_1\cdot 2^1a^2b + 3_2\cdot 2^2\cdot ab^2)\\ &= 3^1\cdot[3_1\cdot 2^1\cdot 2 + 3_2\cdot 2^2\cdot 2]\\ &= \mathbf{108}.\end{aligned}$$

3) *Berechnung von* $\eta_1\mu\nu^4\varrho^2y^2$.

$$\begin{aligned}\eta_1\mu\nu^4\varrho^2y_y &= \eta_1\mu(3b)^4\,(d+2e)^2y^2\\ &= 3^4\eta_1\,2\mu B(2_1\cdot 2^1\cdot de)y^2\\ &= \mathbf{648}.\end{aligned}$$

4) *Berechnung von* $\eta_2w_pqzvc\nu\varrho^2$.

$$\begin{aligned}\eta_2w_pqzvc\nu\varrho^2 &= \eta_2(\mu w-\mu^2)b^2ec(3^1e)\,(d+2e)^2\\ &= 3^1\eta_2\mu wcb^2e^2(d^2+2_1\cdot 2^1\cdot de)\\ &= 3^1\cdot(2+2_1\cdot 2^1\cdot 1)\\ &= \mathbf{18}.\end{aligned}$$

Hierzu fügen wir noch die numerischen Werthe einiger Zahlen ϑ und η. Wir ordnen dieselben wieder so, dass diejenige Zahl, welche einer α-fachen Bedingung als i^{te} nachgesetzt ist, die Bedingung ν $(10-\alpha-i)$-mal und die Bedingung ϱ $(i-1)$-mal enthält.

Tabelle von Zahlen ϑ und η.

$\vartheta_1\mu^3 ecv = \vartheta_1\mu^3 ez_e = \vartheta_2\mu^3 ecw = 18,\ 12,\ 0.\ 0.$

$\vartheta_1\mu^3 ebcv = \vartheta_2\mu^2 ecw = 152,\ 108,\ 36,\ 0,\ 0.$

$\vartheta_1\mu ecv = \vartheta_2\mu ecw = 660,\ 456,\ 162,\ 0,\ 0,\ 0.$

$\vartheta_1 ecv = \vartheta_2 ecw = 1240,\ 720,\ 216,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$

$\vartheta_1\mu^3 ebcv = \vartheta_2\mu^3 ebcw = 5,\ 3,\ 0.$

$\vartheta_1\mu^2 ebcv = \vartheta_2\mu^2 ebcw = 44,\ 30,\ 9,\ 0.$

$\vartheta_1\mu ebcv = \vartheta_2\mu ebcw = 194,\ 132,\ 45,\ 0,\ 0.$

$\vartheta_1 ebcv = \vartheta_2 ebcw = 340,\ 192,\ 54,\ 0,\ 0,\ 0.$

$\vartheta_1\mu^2 cv = \vartheta_2\mu^2 cw = 240,\ 456,\ 324,\ 108,\ 0,\ 0.$

$\vartheta_1\mu^2 acv = \vartheta_2\mu^2 acw = 112,\ 192,\ 144,\ 54,\ 0.$

$\vartheta_1\mu^2 aecv = \vartheta_2 aecw = 64,\ 48,\ 18,\ 0.$

$\vartheta_1\mu e^3 cv = \vartheta_2\mu e^3 cw = 18,\ 0,\ 0,\ 0.$

$\eta_1\mu^3 ewq = \eta_1\mu^3 ey^2 = \eta_2\mu^3 ecw = 0,\ 9,\ 15,\ 6.$

$\eta_1\mu^2 ewq = \eta_2\mu^2 ecw = 0,\ 54,\ 90,\ 75,\ 32.$

$\eta_1\mu ewq = \eta_2\mu ecw = 0,\ 162,\ 270,\ 225,\ 96,\ 40.$

$\eta_1 ewq = \eta_2 ecw = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$ *).

$\eta_1\mu^3 bewq = \eta_2\mu^3 becw = 0,\ 3,\ 5.$

$\eta_1\mu^2 bewq = \eta_2\mu^2 becw = 0,\ 18,\ 30,\ 25.$

$\eta_1\mu bewq = \eta_2\mu becw = 0,\ 54,\ 90,\ 75,\ 32.$

$\eta_1 bewq = \eta_2 becw = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$

$\eta_1\mu^2 wq = \eta_2\mu^2 cw = 0,\ 0,\ 216,\ 324,\ 264,\ 120.$

$\eta_1\mu^2 dewq = \eta_2\mu^2 decw = 54,\ 54,\ 39,\ 18.$

$\eta_1\mu^2 e^2 wq = \eta_2\mu^2 e^2 cw = 0,\ 18,\ 18,\ 7.$

$\eta_1\mu^2 dwq = \eta_2\mu^2 dcw = 0,\ 108,\ 144,\ 114,\ 56.$

$\eta_1\mu d^3 wq = \eta_2\mu d^3 cw = 0,\ 18,\ 12,\ 8.$

§ 45.

Die Berechnung der Anzahlen für die beiden Ausartungen δ_1 und δ_2.

Die in § 41. angegebene Erzeugung der Ausartungen giebt für δ_1 und δ_2 die folgenden Beschreibungen.

Die Ausartungen δ_1 und δ_2 bestehen beide aus einer doppelten Ordnungsgeraden b und einer einfachen Ordnungsgeraden a, welche sich in einem doppelten Rangpunkte e schneiden, während ein anderer Punkt d

---

*) Ueberhaupt muss jede Zahl η Null sein, zu deren Bestimmung keine die Ebene μ festlegende Bedingung gegeben ist.

auf b einfacher Rangpunkt ist. Bei δ_1 fallen die Ecken c, v, y des Singularitätendreiecks mit e zusammen, während dessen Seiten w, q, z drei durch e gehende Strahlen sind, welche im Allgemeinen von a und b verschieden sind. Bei δ_2 dagegen fallen w, q, z mit b zusammen, während c, v, y drei auf b liegende Punkte sind, die im Allgemeinen von d und e verschieden sind.

Hiernach kann man setzen:

$$\delta v^\alpha = \delta(a+2b)^\alpha,$$
$$\delta \varrho^\alpha = \delta(d+2e)^\alpha,$$

wo in jeder Gleichung das δ ohne Index sowohl als δ_1 wie auch als δ_2 gedeutet werden darf, eine Bezeichnung, die auch im Folgenden angewandt werden soll.

Ferner ist:

$$\delta_1 c = \delta_1 v = \delta_1 y = \delta_1 e,$$

und reciprok:

$$\delta_2 w = \delta_2 q = \delta_2 z = \delta_2 b.$$

Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres, was bei δ für alle möglichen fundamentalen Bedingungen zu setzen ist. Z. B.

$$\delta_1 v^2 \mu v \varrho w_s = \delta_1 e^2 \mu (a+2b)(d+2e) w_s,$$
$$\delta_2 w_e q z c \quad = \delta_2 b_e b b c = \delta_2 B c.$$

Man drücke dann, gemäss den Incidenzformeln bei δ_1, jede auf w, q, z, a, b, d bezügliche mehrfache Bedingung durch die einfachen Bedingungen w, q, z, a, b, d und durch die Potenzen von e und μ aus. Analog drücke man bei δ_2 jede auf c, v, y, d, e, a bezügliche mehrfache Bedingung durch die einfachen Bedingungen c, v, y, d, e, a und durch die auf b und μ bezüglichen Bedingungen aus. Z. B.

$$\delta_1 w_e q_e = \delta_1 (ew - e^2)(\mu e q - \mu c^2 - \mu^3),$$
$$\delta_2 c^3 a_e = \delta_2 (c b_p - b_s)(ea - e^2).$$

Bei der Reduction der Potenzen von a und b kann man mit Vortheil von den allgemeinen Formeln des § 13. Gebrauch machen. Z. B.

$$\delta a^3 b^2 = 2\delta a b(\mu^2 e + \mu e^2) - 2\delta a \mu^2 e^2 - 4\delta b \mu^2 e^2 + 4\delta \mu^3 e^2. \quad (\text{§ 13., F. 9})$$

So kann man schliesslich alle fundamentalen Anzahlen von δ_1 auf die 24 *Stammzahlen* zurückführen, welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die zugleich dort beigesetzten numerischen Werthe sind vom Verfasser allmählich a posteriori erschlossen. Sie charakterisiren die Lagebeziehungen, welche bei δ_1 zwischen den 5 von e ausgehenden Strahlen a, b, w, q, z bestehen.

Tabelle der Stammzahlen bei δ_1:

$$\delta_1\mu^3e^2dabw = \delta_1\mu^3e^2dabq = \delta_1\mu^3e^2dabz = 1,$$
$$\delta_1\mu^3e^2dawq = \delta_1\mu^3e^2dawz = \delta_1\mu^3e^2daqz = 1,$$
$$\delta_1\mu^3e^2dbwq = \delta_1\mu^3e^2dbwz = \delta_1\mu^3e^2dbqz = 1,$$
$$\delta_1\mu^3e^2dwqz = 1;$$
$$\delta_1\mu^3edabwq = \delta_1\mu^3edabwz = \delta_1\mu^3edabqz = 2,$$
$$\delta_1\mu^3edawqz = \delta_1\mu^3edbwqz = 2;$$
$$\delta_1\mu e^3dabwq = \delta_1\mu e^3dabwz = \delta_1\mu e^3dabqz = 2,$$
$$\delta_1\mu e^3dawqz = \delta_1\mu e^3dbwqz = 2;$$
$$\delta_1\mu^3dabwqz = 1;$$
$$\delta_1 e^3dabwqz = 1;$$
$$\delta_1\mu^2edabwqz = 7;$$
$$\delta_1\mu e^2dabwqz = 7;$$

Von den Stammzahlen, auf welche die sämmtlichen Zahlen δ_2 reducirt werden können, stimmen die μ^3 als Factor enthaltenden mit gewissen Stammzahlen der obigen Tabelle überein, weil δ_2 und δ_1 sich feld-dualistisch entsprechen, z. B.

$$\delta_2\mu^3\,badecv = \delta_1\mu^3edabwq.$$

Die Werthe der auf δ_2 bezüglichen Stammzahlen enthält die folgende Tabelle.

Tabelle der Stammzahlen bei δ_2.

$$\delta_2\mu^3b_eadec = \delta_2\mu^3b_eadev = \delta_2\mu^3b_eadey = 1,$$
$$\delta_2\mu^3b_eadcv = \delta_2\mu^3b_eadcy = \delta_2\mu^3b_eadvy = 1,$$
$$\delta_2\mu^3b_eaecv = \delta_2\mu^3b_eaecy = \delta_2\mu^3b_eaevy = 1,$$
$$\delta_2\mu^3b_eacvy = 1;$$
$$\delta_2\mu^3badecv = \delta_2\mu^3badecy = \delta_2\mu^3badevy = 2,$$
$$\delta_2\mu^3badcvy = \delta_2\mu^3baecvy = 2;$$
$$\delta_2\mu^3adecvy = 1;$$
$$\delta_2\mu b_padecvy = 3.$$

Ausserdem ist zu beachten, dass jedes auf δ_2 bezügliche Symbol gleich Null ist, wenn es keine die Ebene μ bestimmende Bedingung enthält, also z. B.

$$\delta_2Badecv = 0, \quad \delta_2b_sadecvy = 0.$$

Hiermit ist nun die Berechnung aller Zahlen δ_1 und δ_2 theoretisch geleistet.

Für die Ausrechnung der Zahlen δ lässt sich der Umstand benutzen, dass in der Tabelle der Stammzahlen von δ_1 resp. von δ_2 die Symbole w, q, z, resp. c, v, y beliebig mit einander vertauscht werden können. Man bezeichne daher bei δ_1 mit

$$g_1, g_2, g_3$$

bezüglich die Bedingungen, dass von den drei Strahlen w, q, z einer eine gegebene Gerade schneiden soll, dass jeder von zweien und dass jeder von allen dreien eine gegebene Gerade schneiden soll. Dann hat man von den sämmtlichen, auf δ_1 bezüglichen Symbolen nur diejenigen auszuwerthen, welche ausser den elementaren Bedingungen μ, ν, ϱ die folgenden Bedingungen enthalten:

$$\begin{array}{lll} g_1, & g_2, & g_3, \\ e\,g_1, & e\,g_2, & e\,g_3, \\ e^2 g_1, & e^2 g_2, & e^2 g_3, \\ e^3 g_1, & e^3 g_2, & e^3 g_3. \end{array}$$

Analoges gilt für δ_2, wo man die Bedingungen

$$p_1,\ p_2,\ p_3$$

einzuführen hat, d. h. die Bedingungen, dass von den drei singulären Punkten c, v, y bezüglich einer auf einer gegebenen Ebene liegen soll, dass jeder von zweien, und dass jeder von allen dreien auf einer gegebenen Ebene liegen soll.

Einige Beispiele mögen die Berechnung der Zahlen δ verdeutlichen.

1) *Berechnung von* $\delta_1 \mu \nu^5 \varrho^2 w$.

$$\begin{aligned} \delta_1 \mu \nu^5 \varrho^2 w &= \delta_1 \mu \nu^5 \varrho^2 g_1 \\ &= \delta_1 \mu (a+2b)^5 (d+2e)^2 g_1 \\ &= \delta_1 \mu d^2 g_1 (5_1 \cdot 2^1 \cdot a^4 b + 5_3 \cdot 2^2 \cdot a^3 b^2 + 5_3 \cdot 2^3 \cdot a^2 b^3) \\ &\quad + 2_1 \cdot 2^1 \cdot \delta_1 \mu d e g_1 (5_1 \cdot 2^1 \cdot a^4 b + 5_2 \cdot 2^2 \cdot a^3 b^2 + 5_3 \cdot 2^3 \cdot a^2 b^3 + 5_4 \cdot 2^4 \cdot a b^4) \\ &= 5_1 \cdot 2^1 \cdot 2 + 5_2 \cdot 2^2 \cdot 4 + 5_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \\ &\quad + 2_1 \cdot 2^1 \cdot (5_1 \cdot 2^1 \cdot 2 + 5_2 \cdot 2^2 \cdot 4 + 5_3 \cdot 2^3 \cdot 4 + 5_4 \cdot 2^4 \cdot 2) \\ &= \mathbf{2980}. \end{aligned}$$

Dieses ist zugleich die Zahl für die Symbole $\delta_1 \mu \nu^5 \varrho^2 q$, $\delta_1 \mu \nu^5 \varrho^2 z$, $\delta_2 \mu \nu^5 \varrho^2 c$, $\delta^2 \mu \nu^5 \varrho^2 v$, $\delta_2 \mu \nu^5 \varrho^2 y$.

2) *Berechnung von* $\delta_2 \nu^2 \varrho^4 c q_e$.

$$\begin{aligned} \delta_2 \nu^2 \varrho^4 c q_e &= \delta_2 (a+2b)^2 (d+2e)^4 p_1 b_e \\ &= \delta_2 a^2 p_1 b_e (4_2 \cdot 2^2 \cdot d^2 e^2) \\ &= 4_2 \cdot 2^2 \cdot 1 \\ &= \mathbf{24}. \end{aligned}$$

3) *Berechnung von* $\delta_2 \mu^2 \nu^4 c w v$.

$$\begin{aligned} \delta_2 \mu^2 \nu^4 c w v &= \delta_2 \mu^2 (a+2b)^4 p_2 b \\ &= \delta_2 \mu^2 p_2 b (4_1 \cdot 2^1 \cdot a^3 b + 4_2 \cdot 2^2 \cdot a^2 b^2) \\ &= 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot \mu^3 b_e a e p_2 + 4_2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \mu^3 b_e a e p_2 \\ &= 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot 1 + 4_2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= \mathbf{64}. \end{aligned}$$

4) *Berechnung von* $\delta_1 \nu^4 \varrho w_e q z$.

$$\delta_1 \nu^4 \varrho w_e q z = \delta_1 (a+2b)^4 (d+2e)(ew-e^2) q z$$
$$= \delta_1 (a+2b)^4 d (e g_3 - e^2 g_2)$$
$$= \delta_1 \cdot [4_0 \cdot 2^0 \cdot 2A + 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot a_s b + 4_2 \cdot 2^2 (a_p + a_e)(b_p + b_e)$$
$$+ 4_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot a b_s + 4_4 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot B] d (e g_3 - e^2 g_2)$$
$$= 4_0 \cdot 2^0 \cdot 2 \cdot (\mu e^3 a - \mu^2 e^3) d (g_3 - e g_2)$$
$$+ 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot (\mu e^2 a b - \mu^2 e^2 b) d (g_3 - e g_2)$$
$$+ 4_2 \cdot 2^2 \cdot [\mu^2 e a b + 2 \mu e^2 a b + e^3 a b - (\mu^3 e + \mu^2 e^2 + \mu e^3)(a+b)$$
$$+ 2 \mu^2 e^3] d (g_3 - e g_2)$$
$$+ 4_3 \cdot 2^3 \cdot 2 (\mu e^2 a b - \mu^2 e^2 a) d (g_3 - e g_2)$$
$$+ 4_4 \cdot 2^4 \cdot 2 (\mu e^3 b - \mu^2 e^3) d (g_3 - e g_2)$$
$$= 4_0 \cdot 2^0 \cdot 2 \cdot (2-1)$$
$$+ 4_1 \cdot 2^1 . 2 (7-4) - 4_1 \cdot 2^1 \cdot 2 \cdot (2-1)$$
$$+ 4_2 \cdot 2^2 \cdot [7 + 2 \cdot 7 + 1 - (2+4+2)(1+1) + 2 \cdot 1]$$
$$- 4_2 \cdot 2^2 \cdot [4 + 2 \cdot 2 - (1+1)(1+1)]$$
$$+ 4_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot (7-4) - 4_3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot (2-1)$$
$$+ 4_4 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot (2-1)$$
$$= 2 \cdot 1 + 16 \cdot (3-1) + 24 (8-4) + 64 (3-1) + 32 \cdot 1$$
$$= \mathbf{290}.$$

5) *Berechnung von* $\delta_2 \mu^2 \nu \varrho^2 y c v w$.

$$\delta_2 \mu^2 \nu \varrho^2 c v y w = \delta_2 \mu^2 (a+2b)(d+2e)^2 p_3 b$$
$$= \mu^2 a p_3 (2_0 \cdot 2^0 d^2 b + 2_1 \cdot 2^1 d e b + 2_2 \cdot 2^2 e^2 b)$$
$$= \mu^2 a p_3 [2_0 \cdot 2^0 \cdot (b d - b_e) b + 2_1 \cdot 2^1 \cdot d e b + 2_2 \cdot 2^2 (b e - b_e) b]$$
$$= 2_0 \cdot 2^0 \cdot a p_3 (\mu^3 b d + \mu^3 b d + B d - \mu B)$$
$$+ 2_1 \cdot 2^1 \cdot a p_3 (\mu^3 d e + \mu b_p d e)$$
$$+ 2_2 \cdot 2^2 \cdot a p_3 (\mu^3 b e + \mu^3 b e + B e - \mu B)$$
$$= 2_0 \cdot 2^0 \cdot (2+2+0-1)$$
$$+ 2_1 \cdot 2^1 \cdot (1+3)$$
$$+ 2_2 \cdot 2^2 \cdot (2+2+0-1)$$
$$= \mathbf{31}.$$

Hierzu fügen wir die numerischen Werthe einiger Zahlen δ mit dem Bemerken, dass auch hier die einer α-fachen Bedingung nachgesetzte, i^{te} Zahl die $(i-1)^{\text{te}}$ Potenz von ϱ und die $(10-\alpha-i)^{\text{te}}$ Potenz von ν enthält.

Tabelle von Zahlen δ.

$\delta_1 \mu^3 g_1 = \delta_2 \mu^3 p_1 = 0,\ 24,\ 78,\ 78,\ 24,\ 0.$

$\delta_1 \mu^2 g_1 = \delta_2 \mu^2 p_1 = 0,\ 240,\ 672,\ 702,\ 408,\ 120,\ 0.$

$\delta_1\mu\, g_1 = \delta_2\mu\, p_1 = 0,\ 1240,\ 2980,\ 3028,\ 1840,\ 640,\ 160,\ 0.$

$\delta_1 g_1 = \delta_2 p_1 = 0,\ 3360,\ 5840,\ 5020,\ 2640,\ 800,\ 160,\ 0,\ 0.$

$\delta_1\mu^3 e g_1 = \delta_2\mu^3 e p_1 = 0,\ 18,\ 21,\ 6,\ 0.$

$\delta_1\mu^2 e g_1 = \delta_2\mu^2 e p_1 = 0,\ 152,\ 188,\ 113,\ 32,\ 0.$

$\delta_1\mu e g_1 = \delta_2\mu e p_1 = 0,\ 660,\ 802,\ 506,\ 168,\ 40,\ 0.$

$\delta_1 e g_1 = \delta_2 e p_1 = 0,\ 1240,\ 1300,\ 714,\ 208,\ 40,\ 0,\ 0.$

$\delta_1\mu^3 b g_1 = \delta_2\mu^3 b p_1 = 0,\ 6,\ 21,\ 18,\ 0.$

$\delta_1\mu^2 b g_1 = \delta_2\mu^2 b p_1 = 0,\ 64,\ 190,\ 187,\ 88,\ 0.$

$\delta_1\mu b g_1 = \delta_2\mu b p_1 = 0,\ 340,\ 858,\ 848,\ 472,\ 120,\ 0.$

$\delta_1 b g_1 = \delta_2 b p_1 = 0,\ 880,\ 1560,\ 1278,\ 592,\ 120,\ 0,\ 0.$

$\delta_1\mu^3 e^2 g_1 = 0,\ 4,\ 1,\ 0.$

$\delta_1\mu^2 e^2 g_1 = 0,\ 36,\ 26,\ 7,\ 0.$

$\delta_1\mu e^2 g_1 = 0,\ 152,\ 116,\ 36,\ 8,\ 0.$

$\delta_1 e^2 g_1 = 0,\ 240,\ 160,\ 44,\ 8,\ 0,\ 0.$

$\delta_2\mu^3 b_e p_1 = 0,\ 1,\ 4,\ 0.$

$\delta_2\mu^2 b_e p_1 = 0,\ 8,\ 25,\ 18,\ 0.$

$\delta_2\mu b_e p_1 = 0,\ 42,\ 112,\ 96,\ 24,\ 0.$

$\delta_2 b_e p_1 = 0,\ 100,\ 178,\ 120,\ 24,\ 0,\ 0.$

$\delta_1\mu^2 w_e q = 0,\ 72,\ 111,\ 81,\ 32.$

$\delta_1\mu^2 w_e q z = 0,\ 27,\ 45,\ 31.$

$\delta_1\mu w_e q = 0,\ 314,\ 458,\ 338,\ 128,\ 40.$

$\delta_1\mu w_e q z = 0,\ 126,\ 201,\ 156,\ 64.$

$\delta_1 w_e q = 0,\ 660,\ 802,\ 506,\ 168,\ 40,\ 0.$

$\delta_1 w_e q z = 0,\ 290,\ 380,\ 260,\ 104,\ 40.$

$\delta_1\mu^2 w q z = 0,\ 90,\ 240,\ 249,\ 144.$

$\delta_1\mu^2 w q = 0,\ 176,\ 482,\ 515,\ 320,\ 120.$

$\delta_1\mu w q = 0,\ 900,\ 2122,\ 2180,\ 1368,\ 520,\ 160.$

$\delta_1 w q z = 0,\ 1320,\ 2252,\ 1984,\ 1128,\ 440,\ 160.$

$\delta_2\mu^2 c w_e = 0,\ 8,\ 25,\ 18,\ 0.$

$\delta_2\mu^2 c w_e v = 8,\ 19,\ 13,\ 0.$

$\delta_2\mu^2 c w = 0,\ 64,\ 190,\ 187,\ 88,\ 0.$

$\delta_2\mu^2 c v w = 64,\ 146,\ 136,\ 63,\ 0.$

$\delta_2\mu^2 y c v w = 58,\ 64,\ 31,\ 0.$

$\delta_2\mu^2 c w y z = 14,\ 35,\ 26,\ 0.$

§ 46.

Die Berechnung der Anzahlen für die drei Ausartungen τ_1, τ_2, τ_3.

Die in § 41. angegebene Erzeugung der Ausartungen liefert für die drei mit τ bezeichneten Ausartungen die folgenden Beschreibungen. *Jede der drei Ausartungen τ besteht aus drei einfachen Ordnungsgeraden a, welche sich in einem dreifachen Rangpunkte e schneiden. Bei τ_1 fallen die Strahlen w und z mit der einen Ordnungsgeraden zusammen, auf welcher auch der Punkt v liegt, während c und y mit e zusammenfallen, und q ein von den Ordnungsgeraden verschiedener, durch e gehender Strahl ist. Bei τ_2 fallen alle drei Ecken des Singularitätendreiecks, c, v und y mit e zusammen, während die Seiten desselben drei von den Ordnungsgeraden verschiedene, durch e gehende Strahlen sind. Bei τ_3 fallen nur c und v mit e zusammen, während y ein beliebiger Punkt der Ebene ist, in dessen Verbindungsstrahl mit e die Strahlen w und q fallen, und während z ein durch e gehender Strahl ist, der von den andern 4 durch e gehenden Strahlen verschieden ist.*

Hiernach kann man setzen:

$$\tau\varrho^\alpha = 3^\alpha \cdot \tau e^\alpha,$$
$$\tau c = \tau e,$$
$$\tau_1 y = \tau_1 e,$$
$$\tau_2 v = \tau_2 e, \quad \tau_2 y = \tau_2 e,$$
$$\tau_3 v = \tau_3 e,$$
$$\tau_1 z = \tau_1 w,$$
$$\tau_3 q = \tau_3 w.$$

Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres die Reduction aller möglichen fundamentalen Bedingungen, ausgenommen die Reduction der Potenzen von ν. Für diese beachte man die in § 12. entwickelten 9 Moduln. Diese reduciren die Potenzen von ν auf die Potenzen unserer Bedingungen μ und e, sowie auf die drei Bedingungen a_1, a_2, a_3, welche bezüglich aussagen sollen,

dass eine der drei Ordnungsgeraden,
dass jede von zwei Ordnungsgeraden,
dass jede der drei Ordnungsgeraden

die Bedingung erfüllt, eine gegebene Gerade zu schneiden. So kann man, gemäss den Formeln des § 12. z. B. setzen:

$$\tau\nu^6 = 180 \cdot \tau a_3 (\mu^2 e + \mu e^2) - 500 \cdot \tau a_2 \mu^2 e^2 + 560 \cdot \tau a_1 \mu^3 e^2.$$

Bei τ_1 hat man zu beachten, dass die eine Ordnungsgerade vor den beiden andern dadurch ausgezeichnet ist, dass w und z mit ihr zusammenfallen. Darum soll bei τ_1 a_1 resp. a_2 ausdrücken, dass eine dieser beiden andern Ordnungsgeraden resp. jede von ihnen eine ge-

gebene Gerade schneiden soll. Die mehrfachen fundamentalen Bedingungen drücke man, wie sonst, durch die entsprechenden einfachen Bedingungen und durch μ und e aus. Z. B.

$$\begin{aligned}
\tau_2 w_e &= \tau_2 e w - \tau_2 e^2, \\
\tau_1 v^3 &= \tau_1 (\mu v w - \mu^2 v - \mu e w + \mu^3 + \mu e^2), \\
\tau_3 c v z_s &= \tau_3 e^2 (\mu e z - \mu^3 - \mu e^2) \\
&= \tau_3 \mu e^3 z - \tau_3 \mu^3 e^2.
\end{aligned}$$

So kann man schliesslich alle fundamentalen Anzahlen der drei Ausartungen τ_1, τ_2, τ_3 auf die *in den folgenden drei Tabellen enthaltenen Stammzahlen zurückführen.* Die dort beigesetzten numerischen Werthe sind vom Verfasser allmählich a posteriori erkannt. Sie charakterisiren die Lagebeziehungen, welche zwischen den 4 Strahlen von τ_1, zwischen den 6 Strahlen von τ_2 und den 5 Strahlen von τ_3 bestehen.

Tabelle der Stammzahlen bei τ_1.

$$\tau_1 \mu^3 e^2 v a_2 w = 1, \quad \tau_1 \mu^3 e^2 v a_2 q = 1, \quad \tau_1 \mu^3 e^2 v a_1 w q = 1,$$
$$\tau_1 \mu^3 e v a_2 w q = 2, \quad \tau_1 \mu e^3 v a_2 w q = 2.$$

Beachtenswerth ist, dass jedes der Symbole τ_1 nur dann von null verschieden sein kann, wenn es eine auf v bezügliche Bedingung enthält.

Tabelle der Stammzahlen bei τ_2.

$$\begin{aligned}
&\tau_2 \mu^3 e^2 a_3 w = 4, \quad \tau_2 \mu^3 e^2 a_3 q = 1, \quad \tau_2 \mu^3 e^2 a_3 z = 2, \\
&\tau_2 \mu^3 e^2 a_2 w q = 3, \quad \tau_2 \mu^3 e^2 a_2 w z = 2, \quad \tau_2 \mu^3 e^2 a_2 q z = 1, \\
&\tau_2 \mu^3 e^2 a_1 w q z = 1; \\
&\tau_2 \mu^3 e a_3 w q = \tau_2 \mu e^3 a_3 w q = 7, \\
&\tau_2 \mu^3 e a_3 w z = \tau_2 \mu e^3 a_3 w z = 6, \\
&\tau_2 \mu^3 e a_3 q z = \tau_2 \mu e^3 a_3 q z = 3, \\
&\tau_2 \mu^3 e a_2 w q z = \tau_2 \mu e^3 a_2 w q z = 5; \\
&\tau_2 \mu^3 a_3 w q z = \tau_2 e^3 a_3 w q z = 4, \\
&\tau_2 \mu^2 e a_3 w q z = \tau_2 \mu e^2 a_3 w q z = 22,
\end{aligned}$$

Tabelle der Stammzahlen bei τ_3.

$$\begin{aligned}
&\tau_3 \mu^3 e^2 y a_3 = 2, \quad \tau_3 \mu^3 e^2 y a_2 z = 2, \quad \tau_3 \mu^3 e^2 y a_2 w = 2, \\
&\tau_3 \mu^3 e^2 y a_1 w z = 1; \\
&\tau_3 \mu^3 e y a_3 z = \tau_3 \mu e^3 y a_3 z = 6, \\
&\tau_3 \mu^3 e y a_3 w = \tau_3 \mu e^3 y a_3 w = 4, \\
&\tau_3 \mu^3 e y a_2 w z = \tau_3 \mu e^3 y a_2 w z = 4; \\
&\tau_3 \mu^3 y a_3 w z = \tau_3 e^3 y a_3 w z = 2, \\
&\tau_3 \mu^2 e y a_3 w z = \tau_3 \mu e^2 y a_3 w z = 14.
\end{aligned}$$

Beachtenswerth ist, dass jedes Symbol τ_3 gleich Null ist, wenn es keine die Lage des Punktes y feststellende Bedingung enthält.

Nach Feststellung der auf τ_1, τ_2, τ_3 bezüglichen Stammzahlen ist nun *die Berechnung aller Zahlen τ theoretisch geleistet.*

Die Ausrechnung der Zahlen τ mögen die folgenden Beispiele verdeutlichen.

1) *Berechnung von $\tau_1 v \nu^7 \varrho$.*

$\tau_1 v \nu^7 \varrho = 3 \cdot \tau_1 v \nu^7 e$. Nun wendet man Formel (8) in § 12. an, und erhält:

$$\tau_1 v \nu^7 \varrho = 3 \cdot 1120 \cdot \tau_1 v \mu^2 e^3 a_2 w = 3 \cdot 1120 \cdot 1$$
$$= \mathbf{3360}.$$

2) *Berechnung von $\tau_2 \mu w_e q z \nu^4$.* (Formel (5) in § 12.)

$$\begin{aligned}\tau_2 \mu (ew - e^2) q z \nu^4 = & [6 \cdot a_3 (\mu^2 e + \mu e^2) w q z - 3 \cdot a_2 (\mu^3 e + \mu e^3) w q z \\ & + 14 \cdot a_2 (\mu^2 e^2) w q z - 19 \cdot a_1 (\mu^3 e^2 + \mu^2 e^3) w q z] \\ & - [6 \cdot a_3 (\mu^2 e^2 + \mu e^3) q z - 3 \cdot a_2 (\mu^3 e^2) q z + 14 \cdot a_2 (\mu^2 e^3) q z] \\ = & [6 \cdot (22 + 22) - 3 \cdot (5 + 5) + 14 \cdot (2 \cdot 5) - 19 \cdot (1 + 1)] \\ & - [6 \cdot (2 \cdot 3 + 3) - 3 \cdot (1) + 14 \cdot (1)] \\ = & 336 - 65 \\ = & \mathbf{271}.\end{aligned}$$

3) *Berechnung von $\tau_3 \mu^2 \nu^3 \varrho c w y$.* (Formel (4) in § 12.)

$$\begin{aligned}\tau_3 \mu^2 \nu^3 \varrho c w y & = 3 \cdot \tau_3 \mu^2 e^2 \nu^3 w y \\ & = 3 \cdot \tau_3 y w (\mu^2 e^2 a_3 + 3 \mu^3 e^2 a_2 + 3 \mu^2 e^3 a_2) \\ & = 3 \cdot [2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2] \\ & = \mathbf{60}.\end{aligned}$$

4) *Berechnung von $\tau_3 \mu^2 \nu^3 c w y z$.* (Formel (4) in § 12.)

$$\begin{aligned}\tau_3 \mu^2 \nu^3 c w y z & = y w z (\mu^2 e a_3 + 3 \cdot \mu^3 e a_2 + 3 \cdot \mu^2 e^2 a_2 \\ & \qquad - 6 \cdot \mu^2 e^3 a_1 + 2 \cdot \mu^3 e^2 a_1) \\ & = 14 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ & = \mathbf{46}.\end{aligned}$$

5) *Berechnung von $\tau_2 \mu \nu^5 w q z$.* (Formel (6) in § 12.)

$$\begin{aligned}\tau_2 \mu \nu^5 w q z = & \, w q z [15 \cdot a_3 (\mu^3 + \mu e^2) + 50 \cdot a_3 (\mu^2 e) \\ & - 45 \cdot a_2 (\mu e^3) - 15 \cdot a_2 (\mu^3 e + \mu^2 e^2) - 80 \cdot a_1 (\mu^3 e^2)] \\ = & \, 15 \cdot (4 + 22) + 50 \cdot 22 - 45 \cdot 5 \\ & - 15 \cdot (5 + 2 \cdot 5) - 80 \cdot 1 \\ = & \, \mathbf{960}.\end{aligned}$$

Hierzu fügen wir die numerischen Werthe einiger Zahlen τ mit dem Bemerken, dass wieder diejenige Zahl, welche einer α-fachen

Bedingung als i^{te} nachgesetzt ist, angiebt, wie viel Curven τ die α-fache Bedingung erfüllen, und ausserdem die Bedingung ν, eine gegebene Gerade zu schneiden, $(10-\alpha-i)$ Mal, die Bedingung ϱ, eine gegebene Ebene zu berühren, $(i-1)$ Mal erfüllen.

Tabelle von Zahlen τ.

$$\tau_1\mu^3 v = \tau_2\mu^3 q = \tfrac{1}{4}\tau_2\mu^3 w = \tfrac{1}{2}\tau_2\mu^3 z = \tfrac{1}{2}\tau_3\mu^3 y$$
$$= 15,\ 18,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0.$$
$$\tau_1\mu^2 v = \tau_2\mu^2 q = \tfrac{1}{4}\tau_2\mu^2 w = \tfrac{1}{2}\tau_2\mu^2 z = \tfrac{1}{2}\tau_3\mu^2 y$$
$$= 180,\ 195,\ 108,\ 27,\ 0,\ 0,\ 0.$$
$$\tau_1\mu v = \tau_2\mu q = \tfrac{1}{4}\tau_2\mu w = \tfrac{1}{2}\tau_2\mu z = \tfrac{1}{2}\tau_3\mu y$$
$$= 1120,\ 1080,\ 585,\ 162,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$
$$\tau_1 v = \tau_2 q = \tfrac{1}{4}\tau_2 w = \tfrac{1}{2}\tau_2 z = \tfrac{1}{2}\tau_3 y$$
$$= 4200,\ 3360,\ 1620,\ 405,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$

$\tau_1\mu^2 c w_e v = 9,\ 3,\ 0,\ 0.$
$\tau_1\mu^2 c w v = 65,\ 36,\ 9,\ 0,\ 0.$
$\tau_1\mu^2 c w v y = 12,\ 3,\ 0,\ 0.$
$\tau_3\mu^2 c y v w = 20,\ 6,\ 0,\ 0.$
$\tau_3\mu^2 c w y = 48,\ 12,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau_3\mu^2 c w y z = 24,\ 6,\ 0,\ 0.$
$\tau_3\mu^3 y z w = 8,\ 15,\ 9,\ 0.$
$\tau_2\mu^2 c w_e v = 4,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu^2 c w = 260,\ 144,\ 36,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu^2 c w v = 48,\ 12,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu^2 y c v w = 4,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu^2 c w y = 48,\ 12,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu^2 c w z = 130,\ 72,\ 18,\ 0,\ 0,$
$\tau_2\mu^2 c w y z = 24,\ 6,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu^3 y z w = 12,\ 6,\ 0,\ 0.$

$\tau_2\mu^3 w_e q_e = 3,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu^2 w_e q_e = 27,\ 9,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu w_e q_e = 129,\ 48,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau_2 w_e q_e = 305,\ 99,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu^3 w_e q = 15,\ 9,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu^2 w_e q = 147,\ 93,\ 27,\ 0,\ 0.$
$\tau_2\mu w_e q = 755,\ 459,\ 144,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau_2 w_e q = 2100,\ 1095,\ 297,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$

$\tau_2 \mu^3 w q \quad = 33, 48, 27, 0, 0.$

$\tau_2 \mu^2 w q \quad = 380, 477, 288, 81, 0, 0.$

$\tau_2 \mu w q \quad = 2280, 2460, 1431, 432, 0, 0, 0.$

$\tau_2 w q \quad = 8120, 6840, 3420, 891, 0, 0, 0, 0.$

$\tau_2 \mu^3 w_e q_e z = 1, 0.$

$\tau_2 \mu^2 w_e q_e z = 9, 3, 0.$

$\tau_2 \mu w_e q_e z = 45, 18, 0, 0.$

$\tau_2 \mu^3 w_e q z = 5, 1, 0.$

$\tau_2 \mu^2 w_e q z = 51, 33, 9, 0.$

$\tau_2 \mu w_e q z = 271, 171, 54, 0, 0.$

$\tau_2 w_e q z \quad = 780, 423, 117, 0, 0, 0.$

$\tau_2 \mu^3 w q z = 13, 18, 9, 0.$

$\tau_2 \mu^2 w q z = 156, 189, 108, 27, 0.$

$\tau_2 \mu w q z = 960, 1008, 567, 162, 0, 0.$

$\tau_2 w q z \quad = 3480, 2880, 1404, 351, 0, 0, 0.$

§ 47.

Die Berechnung der Anzahlen für die drei Ausartungen ε_1, ε_2, ε_3.

Die drei Ausartungen ε_1, ε_2, ε_3, welche den τ_1, τ_2, τ_3 dualistisch entsprechen, haben folgende Beschreibungen.

Jede der drei Ausartungen besteht aus einer in der Ebene μ gelegenen dreifachen Ordnungsgeraden b, auf welcher drei einfache Rangpunkte d liegen. Bei ε_1 fallen die Punkte c und y in den einen Rangpunkt, durch den auch der Strahl q geht, während w und z mit b zusammenfallen, und v ein von den Rangpunkten verschiedener Punkt auf b ist. Bei ε_2 fallen alle drei Seiten w, q, z des Singularitätendreiecks mit b zusammen, während die Ecken desselben drei auf b liegende, und von den Rangpunkten verschiedene Punkte sind. Bei ε_3 fallen c und v zusammen in einen Punkt auf b, der von den 3 Rangpunkten verschieden ist, y fällt in einen von diesen 4 Punkten verschiedenen Punkt auf b, während w und q mit b zusammenfallen, z dagegen die coincidirenden Punkte c und v verbindet, ohne mit b zusammenzufallen.

Hiernach kann man setzen:

$$\varepsilon v^\alpha = 3^\alpha \cdot \varepsilon b^\alpha,$$
$$\varepsilon w = \varepsilon b,$$
$$\varepsilon_1 z = \varepsilon_1 b,$$
$$\varepsilon_2 q = \varepsilon_2 b, \quad \varepsilon_2 z = \varepsilon_2 b,$$
$$\varepsilon_3 q = \varepsilon_3 b,$$
$$\varepsilon_1 y = \varepsilon_1 c, \quad \varepsilon_3 v = \varepsilon_3 c.$$

Ferner führe man durch Formeln, welche den in § 12. entwickelten analog sind, die Potenzen von ϱ auf die Grundbedingungen der Ebene μ, des Strahls b, und auf die drei Bedingungen d_1, d_2, d_3 zurück, welche bezüglich aussagen sollen, dass

einer der drei Rangpunkte,
jeder von zwei Rangpunkten,
jeder der drei Rangpunkte

auf einer gegebenen Ebene liegen soll. Bei ε_1 aber, wo der eine Rangpunkt mit c und y coincidirt, soll d_1 resp. d_2 ausdrücken, dass einer der beiden andern Rangpunkte resp. jeder von ihnen auf einer gegebenen Ebene liegt.

Endlich reducire man wieder die mehrfachen, fundamentalen Bedingungen auf die entsprechenden einfachen mit Hülfe der auf μ und b bezüglichen Grundbedingungen. Dann sind schliesslich alle fundamentalen Anzahlen der drei Ausartungen ε_1, ε_2, ε_3 auf *die in den folgenden drei Tabellen enthaltenen Stammzahlen zurückgeführt.* Dort sind nur diejenigen fortgelassen, welche gleich Null sind. Dies sind namentlich alle Zahlen, deren Symbole keine die Ebene μ der Curve festlegende Bedingung enthalten, z. B.

$$\varepsilon_2 B c v d_3.$$

Die in den Tabellen beigesetzten Zahlen entsprechen zum Theil den im vorigen Paragraphen angegebenen Stammzahlen der Ausartungen τ felddualistisch. Die übrigen sind vom Verfasser a posteriori bestimmt. Sie charakterisiren die Lagebeziehungen, welche zwischen den vier Punkten von ε_1, zwischen den sechs Punkten von ε_2, und zwischen den fünf Punkten von ε_3 bestehen.

Tabelle der Stammzahlen bei ε_1.

$$\varepsilon_1\mu^3 b_e q d_2 c = 1, \quad \varepsilon_1\mu^3 b_e q d_2 v = 1, \quad \varepsilon_1\mu^3 b_e q d_1 c v = 1,$$
$$\varepsilon_1\mu^3 b q d_2 c v = 2.$$

Jedes Symbol ε_1 muss Null sein, wenn es keine auf die Lage des Strahls q bezügliche Bedingung enthält.

Tabelle der Stammzahlen bei ε_2.

$$\varepsilon_2\mu^3 b_e d_3 c = 4, \quad \varepsilon_2\mu^2 b_e d_3 v = 1, \quad \varepsilon_2\mu^3 b_e d_3 y = 2,$$
$$\varepsilon_2\mu^3 b_e d_2 c v = 3, \quad \varepsilon_2\mu^3 b_e d_2 c y = 2, \quad \varepsilon_2\mu^3 b_e d_2 v y = 1,$$
$$\varepsilon_2\mu^3 b_e d_1 c v y = 1;$$
$$\varepsilon_2\mu^3 b d_3 c v = 7, \quad \varepsilon_2\mu^3 b d_3 c y = 6, \quad \varepsilon_2\mu^3 b d_3 v y = 3,$$
$$\varepsilon_2\mu^3 b d_2 c v y = 5;$$
$$\varepsilon_2\mu^3 d_3 c v y = 4;$$
$$\varepsilon_2\mu b_p d_3 c v y = 9.$$

Tabelle der Stammzahlen bei ε_3.

$$\varepsilon_3\mu^3 b_e z d_3 = 2,\quad \varepsilon_3\mu^3 b_e z d_2 y = 2,\quad \varepsilon_3\mu^3 b_e z d_2 c = 2,$$
$$\varepsilon_3\mu^3 b_e z d_1 cy = 1;$$
$$\varepsilon_3\mu^3 b z d_3 y = 4,\quad \varepsilon_3\mu^3 b z d_3 c = 4,\quad \varepsilon_3\mu^3 b z d_2 cy = 4;$$
$$\varepsilon_3\mu^3 z d_3 cy = 2,$$
$$\varepsilon_3\mu b_p d_3 cy = 6.$$

Man beachte, dass ein Symbol ε_3 Null sein muss, wenn es keine die Lage des Strahls z feststellende Bedingung enthält.

Durch Angabe der Stammzahlen bei den Ausartungen ε ist nunmehr *die Berechnung aller Zahlen ε theoretisch geleistet.*

Da die Ausartungen ε den eingehend behandelten Ausartungen τ felddualistisch entsprechen, so unterdrücken wir die Beispiele für die Berechnung der auf sie bezüglichen Anzahlen, und lassen nur die numerischen Werthe einiger Symbole ε hier folgen. Wieder bezeichnet die einer α-fachen Bedingung nachgesetzte i^{te} Zahl die Zahl der Curven ε, welche diese Bedingung erfüllen, $10 - \alpha - i$ gegebene Gerade schneiden, und $i - 1$ gegebene Ebenen berühren.

Tabelle von Zahlen ε.

$$\varepsilon_1\mu^3 q = \varepsilon_2\mu^3 v = \tfrac{1}{4}\varepsilon_2\mu^3 c = \tfrac{1}{2}\varepsilon_2\mu^3 y = \tfrac{1}{2}\varepsilon_3\mu^3 z$$
$$= 0,\ 0,\ 0,\ 9,\ 18,\ 15.$$
$$\varepsilon_1\mu^2 q = \varepsilon_2\mu^2 v = \tfrac{1}{4}\varepsilon_2\mu^2 c = \tfrac{1}{2}\varepsilon_2\mu^2 y = \tfrac{1}{2}\varepsilon_3\mu^2 z$$
$$= 0,\ 0,\ 0,\ 54,\ 108,\ 120,\ 90.$$
$$\varepsilon_1\mu q = \varepsilon_2\mu v = \tfrac{1}{4}\varepsilon_2\mu c = \tfrac{1}{2}\varepsilon_2\mu y = \tfrac{1}{2}\varepsilon_3\mu z$$
$$= 0,\ 0,\ 0,\ 162,\ 324,\ 360,\ 270,\ 175.$$
$$\varepsilon_1 q = \varepsilon_2 v = \tfrac{1}{4}\varepsilon_2 c = \tfrac{1}{2}\varepsilon_2 y = \tfrac{1}{2}\varepsilon_3 z$$
$$= 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$

$$\varepsilon_1\mu^3 w_e q_e = 0,\ 0,\ 1,$$
$$\varepsilon_1\mu^2 w_e q_e = 0,\ 0,\ 3,\ 6.$$
$$\varepsilon_1\mu w_e q_e = 0,\ 0,\ 9,\ 18,\ 15.$$
$$\varepsilon_1 w_e q_e = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$
$$\varepsilon_1\mu^3 wq = 0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 6.$$
$$\varepsilon_1\mu^2 wq = 0.\ 0,\ 0,\ 54,\ 108,\ 120.$$
$$\varepsilon_1\mu wq = 0,\ 0,\ 0,\ 162,\ 324,\ 360,\ 270.$$
$$\varepsilon_1 wq = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$
$$\varepsilon_1\mu w_e qz = 0,\ 0,\ 0,\ 9,\ 18.$$
$$\varepsilon_1\mu^2 wqz = 0,\ 0,\ 0,\ 18,\ 36.$$

$$\varepsilon_2\mu^3yzw \;= 0,\ 0,\ 0,\ 2.$$
$$\varepsilon_2\mu^2cw \;= 0,\ 0,\ 0,\ 72,\ 144,\ 160.$$
$$\varepsilon_2\mu^2cwz \;= 0,\ 0,\ 0,\ 24,\ 48.$$
$$\varepsilon_2\mu^2cw_ev = 0,\ 0,\ 9,\ 16.$$
$$\varepsilon_2\mu^2cwv \;= 0,\ 0,\ 54,\ 96,\ 96.$$
$$\varepsilon_2\mu^2cwy \;= 0,\ 0,\ 36,\ 72,\ 80.$$
$$\varepsilon_2\mu^2cwyz = 0,\ 0,\ 12,\ 24,$$
$$\varepsilon_2\mu^2cwvy = 0,\ 18,\ 36,\ 38.$$
$$\varepsilon_3\mu q_e w_e z = 0,\ 0,\ 0,\ 2.$$
$$\varepsilon_3\mu q w_e z \;= 0,\ 0,\ 0,\ 6,\ 12.$$
$$\varepsilon_3\mu^2 qwz \;= 0,\ 0,\ 0,\ 12,\ 24.$$
$$\varepsilon_3\mu^3 yzw \;= 0,\ 0,\ 6,\ 12.$$
$$\varepsilon_3\mu^2 yzcw = 0,\ 18,\ 30,\ 24.$$

§ 48.

Die Berechnung aller fundamentalen Anzahlen der cubischen Plancurve mit Spitze.

Die Paragraphen 43. bis 47. haben uns die Berechnung aller möglichen fundamentalen Anzahlen gelehrt, welche auf die 13 Ausartungen der C_3^3 Bezug haben. Aus diesen Anzahlen kann man mit Hülfe der in § 40. und § 42. abgeleiteten Formeln alle auf die allgemeine C_3^3 bezüglichen, fundamentalen Anzahlen mit vielen Bestätigungen berechnen. Der Verlauf einer solchen Berechnung gestaltet sich etwa folgendermassen.

Der Kürze wegen bezeichnen wir mit dem Ausdruck „*Zahlenreihe z*“, wo z eine der C_3^3 auferlegte α-fache Bedingung oder das Product eines Ausartungssymbols mit einer $(\alpha-1)$-fachen Bedingung sei, den Inbegriff der Zahlenwerthe für die $10-\alpha$ Symbole:

$$z\nu^{9-\alpha},\quad z\nu^{8-\alpha}\varrho,\quad z\nu^{7-\alpha}\varrho^2,\ \cdots z\varrho^{9-\alpha}.$$

Man beginnt die Berechnung am zweckmässigsten mit dem einstufigen Systeme $\mu^3\nu^3\varrho^3$*), weil die Zahl ν dieses Systems nach dem Princip der Dualität gleich der Zahl ϱ dieses Systems ist.

Hier ist, wie bei allen Elementarsystemen, nur die Ausartungszahl σ von Null verschieden. Man hat daher bei diesem Systeme nach der σ-Formel:

$$2\cdot\nu = 2\cdot\varrho = 2\cdot\sigma,$$

also

$$\mu^3\nu^4\varrho^3 = \mu^3\nu^3\varrho^4 = \sigma\mu^3\nu^3\varrho^3 = 168.$$

Diese Zahl ist zugleich das ϱ des Systems $\mu^3\nu^4\varrho^2$. Folglich lässt sich

*) Ebenso Zeuthen in den Comptes rendus, tome 74, p. 521.

jetzt nach der σ-Formel die Zahl ν dieses Systems, oder $\mu^3\nu^5\varrho^2$ berechnen, und so fort. So liefert die Zahlenreihe $\sigma\mu^3$ die schon von den Herren Maillard und Zeuthen (cf. die allgemeine Einleitung) berechnete Zahlenreihe μ^3, nämlich:

$$\mu^3 = 24,\ 60,\ 114,\ 168,\ 168,\ 114,\ 60,\ 24.$$

Die Zahlen dieser Reihe liefern nun die Zahlen μ für alle die Bedingung μ^2 enthaltenden Elementarsysteme. Doch reichen jetzt die Zahlen der Reihe $\sigma\mu^2$ nicht zur Berechnung der Zahlenreihe μ^2 aus, weil bei Voraussetzung einer *beweglichen* Ebene die $C_3{}^3$ kein dualistisch sich selbst entsprechendes Gebilde ist, also hier der oben bei der Zahlenreihe μ^3 benutzte Vortheil der Gleichheit je zweier Zahlen zu bestehen aufhört. Man bezeichne daher eine Zahl der Reihe μ^2 zunächst mit x, etwa die Zahl $\mu^2\nu^8$. Dann lässt sich vermittelst der σ-Formel zunächst $\mu^2\nu^7\varrho$ durch x ausdrücken, nämlich:

$$\mu^2\nu^7\varrho = 2\sigma\mu^2\nu^7 + 3\mu^3\nu^7 - x,$$

wo für $\sigma\mu^2\nu^7$ und $\mu^3\nu^7$ die berechnet vorliegenden Werthe einzusetzen sind. In derselben Weise drücke man $\mu^2\nu^6\varrho^2$ durch $\mu^2\nu^7\varrho$ aus, und so fort. So erhält man schliesslich alle Zahlen der Reihe μ^2 durch x ausgedrückt. Zur Bestimmung von x kann man nun gelangen durch Einführung irgend einer nicht-elementaren Bedingung, etwa der Bedingung c, dass die Spitze auf einer gegebenen Ebene liege. Man findet zunächst durch die c-Formel

$$3c = 4\nu - \varrho - 6\mu - \alpha_c,$$

aus der Zahlenreihe μ^3 die Zahlenreihe μ^3c, nämlich:

$$\mu^3c = 12,\ 42,\ 96,\ 168,\ 186,\ 132,\ 72.$$

Ferner findet man aus der Zahlenreihe μ^2 jede Zahl der Reihe μ^2c durch x ausgedrückt. Andererseits wende man die σ-Formel auf die μ^2c und Potenzen von ν oder ϱ enthaltenden Systeme an, deren Ausartungszahlen ja berechnet vorliegen müssen. Es waren nämlich:

$$\begin{aligned}\sigma\mu^2c &= 338,\ 506,\ 569,\ 488,\ 335,\ 188,\ 86;\\ \delta_2\mu^2c &= 0,\ 240,\ 672,\ 702,\ 408,\ 120,\ 0;\\ \varepsilon_2\mu^2c &= 0,\ 0,\ 0,\ 216,\ 432,\ 480,\ 360;\end{aligned}$$

und alle übrigen Ausartungszahlen gleich Null. Durch diese Anwendungen der σ-Formel gewinnt man also 7 Gleichungen, deren jede nur x als Unbekannte enthält, also den Werth von x mit 6 Bestätigungen. Hiernach ist auch die Zahlenreihe μ^2 als berechnet zu betrachten. Analog verfahre man bei der Zahlenreihe μ und bei der Reihe derjenigen 11 Zahlen, welche nur Potenzen von ν und ϱ enthalten. Nachdem man so die sämmtlichen:

$$8 + 9 + 10 + 11$$

Elementarzahlen der C_3^3 berechnet hat, und bei dieser Gelegenheit auch die 34 Zahlen der Zahlenreihen:

$$\mu^3 c,\ \mu^2 c,\ \mu c,\ c$$

gefunden hat, gelangt man von den Elementarzahlen durch die Vermittelung der w-Formel, v-Formel, y-Formel, z-Formel zu den Zahlenreihen:

$$\begin{array}{l} \mu^3 w,\ \mu^2 w,\ \mu w,\ w, \\ \mu^3 v,\ \mu^2 v,\ \mu v,\ v, \\ \mu^3 q,\ \mu^2 q,\ \mu q,\ q, \\ \mu^3 y,\ \mu^2 y,\ \mu y,\ y, \\ \mu^3 z,\ \mu^2 z,\ \mu z,\ z. \end{array}$$

Dann wendet man auf je zwei benachbarte Zahlen dieser Zahlenreihen die σ-Formel an, und erhält dadurch viele Gleichungen zwischen denjenigen Ausartungszahlen, deren Symbole ausser elementaren Bedingungen eine einfache, auf das Singularitätendreieck bezügliche Bedingung enthalten. Diese Gleichungen kann man theils zu numerischen Controlen, theils zu den früher erwähnten aposteriorischen Bestimmungen über Eigenschaften der Ausartungen verwerthen.

Von jeder der oben erwähnten Zahlenreihen gelangt man dann durch die Vermittelung der c-Formel, w-Formel, v-Formel, q-Formel, y-Formel, z-Formel zu 6 neuen Zahlenreihen, von jeder dieser Zahlenreihen wieder zu 6 neuen, und so fort. Viele der Zahlenreihen, welche man in dieser Weise nach und nach gewinnt, hängen, wie schon in § 38. besprochen ist, durch die Incidenzformeln von schon vorher berechneten Zahlenreihen ab, können also als bekannt angesehen werden, und liefern dadurch die Mittel zu weiteren Bestätigungen resp. aposteriorischen Bestimmungen. So hängt beispielsweise die Zahlenreihe v^3 von den Zahlenreihen μv^2, $\mu^2 v$, μ^3 ab durch die Formel:

$$v^3 = \mu v^2 - \mu^2 v + \mu^3.$$

Auf dem eben besprochenen Wege gelangt man nicht direct zur Bestimmung der w_e, q_e, z_e enthaltenden Symbole, sondern gewinnt zunächst die w^2, q^2, z^2 enthaltenden Symbole. Diese liefern aber die Werthe der gesuchten Symbole durch die Formeln:

$$\begin{aligned} w^2 &= w_e + w_p = w_e + \mu w - \mu^2, \\ q^2 &= q_e + \mu q - \mu^2, \\ z^2 &= z_e + \mu z - \mu^2. \end{aligned}$$

Oft gelangt man auch zu Zahlenreihen, welche selbstverständlich Null sind, z. B. durch Anwendung der c-Formel auf die Zahlenreihen

$$\mu^2 c^3,\ \mu c^3,\ c^3,$$

oder durch Anwendung der w-Formel auf die Zahlenreihen

$$\mu W,\ W,$$

oder durch Anwendung der v-Formel auf die Zahlenreihe

$$\mu^3 v^2 w.$$

Dadurch erhält man wiederum neue Mittel zu Controlen oder aposteriorischen Bestimmungen.

Hiernach muss man zu jeder Fundamentalzahl von ebensoviel Systemen aus gelangen, wie sie Bedingungen enthält, die auf verschiedene Ecken oder Seiten des Singularitätendreiecks Bezug haben. Z. B. erhält man die Zahlenreihe

$$\mu c^2 v w_s$$

sowohl aus den Zahlenreihen $\mu c v w_s$ und $\mu^2 c v w_s$ durch die c-Formel, wie auch aus den Zahlenreihen $\mu c^2 w_s$ und $\mu^2 c^2 w_s$ durch die v-Formel, wie auch endlich aus der Zahlenreihe $\mu c^2 v w_e$ durch die w-Formel. Ausserdem kann man noch durch die σ-Formel alle übrigen Zahlen dieser Reihe finden, sobald eine derselben bekannt ist.

Die folgenden Beispiele sollen verdeutlichen, wie man von bekannten Zahlenreihen zu neuen Zahlenreihen gelangt.

Erstes Beispiel.

Wir setzen als bekannt voraus die Zahlenreihe $\mu^3 y z w$, nämlich:

$$\mu^3 y z w = 22,\ 40,\ 55,\ 46,\ 22.$$

Um von dieser Zahlenreihe zu neuen gelangen zu können, haben wir die Ausartungszahlen der 4 Systeme nöthig, welche definirt werden durch die Bedingungen:

$$\mu^3 y z w v^3,\ \mu^3 y z w v^2 \varrho,\ \mu^3 y z w v \varrho^2,\ \mu^3 y z w \varrho^3.$$

In jedem dieser 4 Systeme sind gleich Null die Ausartungszahlen:

$$\tau_1,\ \varepsilon_1,\ \eta_2,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2.$$

Die 8 übrigen Ausartungszahlen haben in den 4 Systemen folgende Werthe:

$$\sigma = 1,\ 2,\ 2,\ 1;$$
$$\delta_1 = 0,\ 13,\ 16,\ 6;$$
$$\delta_2 = 0,\ 1,\ 4,\ 0;$$
$$\tau_2 = 12,\ 6,\ 0,\ 0;$$
$$\tau_3 = 8,\ 15,\ 9,\ 0;$$
$$\varepsilon_2 = 0,\ 0,\ 0,\ 2;$$
$$\varepsilon_3 = 0,\ 0,\ 6,\ 10;$$
$$\eta_1 = 0,\ 0,\ 12,\ 18;$$

Setzt man diese Werthe in die σ-Formel:

$$\begin{aligned} v + \varrho - 3\mu = 2\sigma + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 3\tau_1 + 3\tau_2 + 3\tau_3 \\ + 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2, \end{aligned}$$

so erhält man die 4 bestätigenden Identitäten:

$$22 + 40 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 8,$$
$$40 + 55 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 15,$$
$$55 + 46 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 6 + 12,$$
$$46 + 22 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 10 + 18.$$

Die Benutzung der c-Formel:

$$3c = 4\nu - \varrho - 6\mu - \delta_1 - 2\delta_2 - 6\varepsilon_1 - 6\varepsilon_2 - 6\varepsilon_3 - \vartheta_1 - 3\vartheta_2 - 2\eta_1 - 6\eta_2$$

giebt für jene 4 Systeme:

$$3c = 4 \cdot 22 - 40 = 48,$$
$$3c = 4 \cdot 40 - 55 - 13 - 2 \cdot 1 = 90,$$
$$3c = 4 \cdot 55 - 46 - 16 - 2 \cdot 4 - 6 \cdot 6 - 2 \cdot 12 = 90,$$
$$3c = 4 \cdot 46 - 22 - 6 - 6 \cdot 2 - 6 \cdot 10 - 2 \cdot 18 = 48.$$

Folglich ist:

$$\mu^3 yzwc\nu^3 = 16, \quad \mu^3 yzwc\nu^2\varrho = 30,$$
$$\mu^3 yzwc\nu\varrho^2 = 30, \quad \mu^3 yzwc\varrho^3 = 16.$$

Dass die so gefundene Zahlenreihe für $\mu^3 yzwc$, nämlich:

$$16,\ 30,\ 30,\ 16$$

von rechts gelesen so lautet, wie von links gelesen, folgt auch aus dem Princip der Dualität.

Ferner hängt diese Zahlenreihe mit anderen Zahlenreihen zusammen durch die erste Incidenzformel. Nach dieser ist:

$$ywzc = (y^2 + w_e)(c^2 + z_e)$$
$$= y^2c^2 + c^2w_e + y^2z_e + w_ez_e.$$

Man hat nämlich:

$$\mu^3 y^2c^2 = 2,\ 6,\ 6,\ 4; \quad \mu^3 cw_e = 6,\ 9,\ 9,\ 6;$$
$$\mu^3 y^2z_e = 4,\ 9,\ 9,\ 4; \quad \mu^3 w_ez_e = 4,\ 6,\ 6,\ 2;$$

also durch Addition

$$\mu^3 yzwc = 16,\ 30,\ 30,\ 16.$$

Wir finden weiter aus jenen 4 Systemen durch die w-Formel:

$$3w = 4 \cdot 40 - 22 - 6 \cdot 12 - 6 \cdot 8 = 18,$$
$$3w = 4 \cdot 55 - 40 - 2 \cdot 13 - 1 - 6 \cdot 6 - 6 \cdot 15 = 27,$$
$$3w = 4 \cdot 46 - 55 - 2 \cdot 16 - 4 - 6 \cdot 9 - 12 = 27,$$
$$3w = 4 \cdot 22 - 46 - 2 \cdot 6 - 18 = 12,$$

Damit haben wir die Zahlenreihe

$$\mu^3 yzw^2 = \mu^3 yzw_e$$

bestimmt, nämlich:

$$\mu^3 yzw_e = 6,\ 9,\ 9,\ 4.$$

Die v-Formel:

$$6v = 7\varrho - \nu - 3\mu - 2\delta_1 - 4\delta_2 - 15\tau_1 - 9\tau_2 - 9\tau_3$$
$$- 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 - 5\vartheta_1 - 9\vartheta_2 - \eta_1 - 3\eta_2$$

liefert für jene 4 Systeme die 4 Gleichungen:

$$6v = 7 \cdot 40 - 22 - 9 \cdot 12 - 9 \cdot 8 = 78,$$
$$6v = 7 \cdot 55 - 40 - 2 \cdot 13 - 4 \cdot 1 - 9 \cdot 6 - 9 \cdot 15 = 126,$$
$$6v = 7 \cdot 46 - 55 - 2 \cdot 16 - 4 \cdot 4 - 9 \cdot 9 - 3 \cdot 6 - 12 = 108,$$
$$6v = 7 \cdot 22 - 46 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 10 - 18 = 42.$$

Folglich hat die Zahlenreihe $\mu^3 yzwv$ die Werthe:

$$13,\ 21,\ 18,\ 7.$$

Diese Zahlenreihe hängt wieder mit andern Zahlenreihen durch die erste Incidenzformel zusammen, indem man $yzwv$ auf zweifache Weise zerlegen kann, nämlich entweder:

$$yzwv = yz(w_e + v^2) = yzw_e + yzv^2,$$

oder auch:

$$yzwv = (y^2 + w_e)(v^2 + z_e) = y^2v^2 + y^2z_e + w_ez_e.$$

Die Anwendung der y-Formel

$$3y = 2\varrho + \nu - 3\mu - \delta_1 - 2\delta_2 - 3\tau_1 - 3\tau_2 - 6\tau_3$$
$$- 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 - \vartheta_1 - 3\vartheta_2 - 2\eta_1 - 3\eta_2$$

giebt für die 4 Systeme $\mu^3 yzw$ die 4 Gleichungen:

$$3y = 2 \cdot 40 + 22 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot 8 = 18,$$
$$3y = 2 \cdot 55 + 40 - 13 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 6 - 6 \cdot 15 = 27,$$
$$3y = 2 \cdot 46 + 55 - 16 - 2 \cdot 4 - 6 \cdot 9 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 12 = 27,$$
$$3y = 2 \cdot 22 + 46 - 6 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 10 - 2 \cdot 18 = 12.$$

Folglich ist:

$$\mu^3 y^2 zw = 6,\ 9,\ 9,\ 4.$$

Diese Zahlenreihe ist identisch mit der schon bestimmten Zahlenreihe $\mu^3 yzw_e$, da immer:

$$\mu^3 y^2 w = \mu^3 y w_e,$$

weil Punkt y auf Strahl w liegt.

Wir wenden schliesslich auf die 4 Systeme die z-Formel an:

$$3z = 2\nu + \varrho - 3\mu - 2\delta_1 - \delta_2 - 3\tau_1 - 3\tau_2 - 3\tau_3$$
$$- 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 - 6\varepsilon_3 - 2\vartheta_1 - 3\vartheta_2 - \eta_1 - 3y_2,$$

und erhalten die 4 Gleichungen:

$$3z = 2 \cdot 22 + 40 - 3 \cdot 12 - 3 \cdot 8 = 24,$$
$$3z = 2 \cdot 40 + 55 - 2 \cdot 13 - 1 - 3 \quad 6 - 3 \cdot 15 = 45,$$

$$3z = 2\cdot 55 + 46 - 2\cdot 16 - 4 - 3\cdot 9 - 6\cdot\ 6 - 12 = 45,$$
$$3z = 2\cdot 46 + 22 - 2\cdot\ 6 - 3\cdot 2 - 6\cdot 10 - 18 \qquad = 18.$$

Daraus folgt:

$$\mu^3 y z_s w = \mu^3 z_s y^2 + \mu^3 z_s w_s = 8,\ 15,\ 15,\ 6.$$

Zweites Beispiel.

Wir gehen aus von der Zahlenreihe $w_e q z$, und betrachten daher die Systeme, welche ausser $w_e q z$ nur Potenzen von ν und ϱ zu definirenden Bedingungen haben.

In jedem dieser Systeme sind alle Ausartungszahlen ausser σ, τ_2 und δ_1 gleich Null. Diese aber haben folgende Werthe:

$$\sigma w_e q z = 12,\ 24,\ 28,\ 20,\ 12,\ 7,$$
$$\tau_2 w_e q z = 780,\ 423,\ 117,\ 0,\ 0,\ 0,$$
$$\delta_1 w_e q z = 0,\ 290,\ 380,\ 260,\ 104,\ 40.$$

Diese Werthe, in die σ-Formel eingesetzt, bestätigen die als schon gefunden vorausgesetzten Zahlenreihen $w_e q z$ und $\mu w_e q z$, nämlich:

$$w_e q z = 1788,\ 1950,\ 1672,\ 1148,\ 660,\ 343,\ 165,$$
$$\mu w_e q z = 458,\ 575,\ 551,\ 416,\ 257,\ 138.$$

Aus diesen Zahlenreihen und den obigen Ausartungszahlen findet man 6 neue Zahlenreihen, z. B. durch die c-Formel:

$$c w_e q z = 818,\ 796,\ 618,\ 392,\ 217,\ 113,$$

ferner durch die w-Formel:

$$w_s q z = 444,\ 540,\ 486,\ 324,\ 168,\ 79,$$

und durch die q-Formel:

$$w_e q^2 z = 684,\ 729,\ 621,\ 432,\ 258,\ 139.$$

Drittes Beispiel.

Wir gehen aus von den beiden Zahlenreihen:

$$\mu^2 c w = 656,\ 1184,\ 1666,\ 1662,\ 1244,\ 736,\ 364,$$
$$\mu^3 c w = 52,\ 106,\ 166,\ 166,\ 106,\ 52.$$

Um von diesen Zahlenreihen zu neuen zu gelangen, müssen wir die Ausartungszahlen von höherer als der nullten Gattung aus allen denjenigen 6 Systemen kennen, welche ausser $\mu^2 c w$ nur Potenzen von ν und ϱ zu definirenden Bedingungen haben. Diese Ausartungszahlen sind sämmtlich Null, ausser δ_1, δ_2, τ_2, ε_2, ϑ_2, η_2. Letztere haben die folgenden Werthe:

$$\delta_1 \mu^2 c w = 0,\ 152,\ 188,\ 113,\ 32,\ 0,$$
$$\delta_2 \mu^2 c w = 0,\ 64,\ 190,\ 187,\ 88,\ 0,$$

$\tau_2\mu^2 cw = 260, 144, 36, 0, 0, 0,$

$\varepsilon_2\mu^2 cw = 0, 0, 0, 72, 144, 160,$

$\vartheta_2\mu^2 cw = 240, 456, 324, 108, 0, 0,$

$\eta_2\mu^2 cw = 0, 0, 216, 324, 264, 120.$

Hierdurch gelangt man zu den folgenden 6 neuen Zahlenreihen.

$\mu^2 c^2 w = 136, 262, 390, 407, 316, 196,$

$\mu^2 cw^2 = 360, 504, 536, 427, 252, 120,$

$\mu^2 cwv = 496, 700, 741, 569, 325, 136,$

$\mu^2 cwq = 240, 522, 725, 697, 507, 300,$

$\mu^2 cwy = 456, 706, 732, 551, 322, 156,$

$\mu^2 cwz = 280, 516, 734, 715, 510, 280.$

§ 49.

Sonstige Mittel für die Berechnung von Anzahlen der cubischen Plancurve mit Spitze.

Schon im IV. Abschnitt ist hervorgehoben, dass das Chasles'sche Correspondenzprincip nicht die einzige Quelle ist, aus welcher Formeln zwischen Bedingungssymbolen und Ausartungssymbolen fliessen. Derartige Formeln kann man namentlich auch erhalten durch die Anwendung des *Princips von der Erhaltung der Anzahl* und durch die von mir in den Math. Annalen Bd. XII. p. 180 u. f. *auf Gruppen ausgedehnten Correspondenzsätze.* Dieses soll hier für die C_3^3 gezeigt werden, obwohl die Formeln des § 40. und des § 42. für die Berechnung der Fundamentalzahlen der C_3^3 vollkommen ausreichen.

Wir behalten für die Bedingungen und die Ausartungen der C_3^3 die in den früheren Paragraphen eingeführten Bezeichnungen bei, setzen zunächst ein beliebiges zweistufiges Curvensystem voraus, und benutzn das Princip von der Erhaltung der Anzahl, indem wir den Ebenen und Geraden, welche durch die Bedingungen

$$c,\ v,\ y,\ w,\ q,\ z,\ \nu,\ \varrho$$

gegeben sind, *speciellere Lagen* zu einander ertheilen.

Man lasse die beiden Ebenen der zusammengesetzten Bedingung cv in eine einzige Ebene zusammenfallen. Dann wird cv durch jede Curve des zweistufigen Systems erfüllt, welche Punkt c und Punkt v auf dieser Ebene hat, also durch jede Curve, deren Strahl z in dieser Ebene liegt, ferner durch jede Ausartung σ, deren Rangpunkt in diese Ebene fällt, endlich überhaupt durch jede Ausartung, welche die Punkte c und v in einen Punkt vereinigt, und diesen Punkt auf jene Ebene wirft. Folglich ist:

1) $$cv = z_e + \sigma d + \delta_1 e + \tau_2 e + \tau_3 e + \varepsilon_3 e.$$

Diese Formel hat einen leicht erkennbaren Zusammenhang mit der Formel 1) des § 40., und die Coefficienten eines und desselben Ausartungssymbols müssen in beiden Formeln übereinstimmen. Analog erhält man die der Formel 2) des § 40. entsprechende Formel, indem man die beiden Geraden der zusammengesetzten Bedingung wq zusammenfallen lässt:

2) $$wq = y^2 + \mu^2 + \sigma a + \delta_2 b + \tau_3 b + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 b.$$

Die Bedingung μ^2 war rechts hinzuzufügen, weil wq auch durch jede Curve erfüllt wird, deren Ebene durch die Gerade geht, welche die beiden gegebenen Geraden in sich vereinigt.

Lässt man die beiden Ebenen der zusammengesetzten Bedingung vy zusammenfallen, so erhält man die der Formel 3) in § 40. entsprechende Formel:

3) $$vy = w_e + \sigma d + \delta_1 e + \tau_2 e + \vartheta_2 e + \eta_2 e.$$

Den Formeln 4), 5), 6) des § 40. entsprechen:

4) $$qz = c^2 + \mu^2 + \sigma a + \delta_2 b + \varepsilon_2 b + \vartheta_2 b + \eta_2 b,$$

5) $$yc = q_e + \sigma d + \delta_1 e + \tau_1 e + \tau_2 e + \varepsilon_1 c,$$

6) $$zw = v^2 + \mu^2 + \sigma a + \delta_2 b + \tau_1 w + \varepsilon_1 b + \varepsilon_2 b.$$

Weitere sechs Formeln gewinnt man, wenn man die beiden Ebenen jeder der 3 Bedingungen

$$\varrho c,\ \varrho v,\ \varrho y,$$

und die beiden Geraden jeder der 3 Bedingungen:

$$\nu w,\ \nu q,\ \nu z$$

sich vereinigen lässt. Die dann resultirenden Formeln entsprechen den Formeln 17) bis 22) des § 40., und heissen:

7) $$\varrho c = 3q_e + \sigma d + 2\delta_1 e + 3\tau_1 e + 3\tau_2 e + 3\tau_3 e + 3\varepsilon_1 c + \eta_1 d,$$

8) $$\nu w = 3v^2 + 3\mu^2 + \sigma a + 2\delta_2 b + 3\tau_1 w + 3\varepsilon_1 b + 3\varepsilon_2 b + 3\varepsilon_3 b + \vartheta_1 a,$$

9) $$\varrho v = 3w_e + \sigma d + 2\delta_1 e + 3\tau_2 e + 3\tau_3 e + 3\vartheta_2 e + \eta_1 e + 3\eta_2 e,$$

10) $$\nu q = 3c^2 + 3\mu^2 + \sigma a + 2\delta_2 b + 3\varepsilon_2 b + 3\varepsilon_3 b + \vartheta_1 b + 3\vartheta_2 b + 3\eta_2 b,$$

11) $$\varrho y = 2w_e + q_e + \sigma d + 2\delta_1 e + 3\tau_1 e + 3\tau_2 e + \varepsilon_1 c + \vartheta_1 e + 3\vartheta_2 e + 2\eta_2 e,$$

12) $$\nu z = 2c^2 + v^2 + 3\mu^2 + \sigma a + 2\delta_2 b + \tau_1 w + 3\varepsilon_1 b + 3\varepsilon_2 b + 2\vartheta_2 b + \eta_1 b + 3\eta_2 b.$$

Um Formeln zu erhalten, welche den Formeln 15) und 16) des § 40. entsprechen, haben wir die beiden Geraden der Bedingung ν^2 resp. die beiden Ebenen der Bedingung ϱ^2 zusammenzulegen. Wir legen die beiden Geraden der Bedingung ν^2 in die Gerade g derartig unendlich nahe, dass sie sich schneiden, und dass sowohl ihr Schnittpunkt, wie auch ihre Verbindungsebene besimmt sind. Dann wird ν^2 von jeder Curve erfüllt, welche durch den Schnittpunkt geht, d. h., welche die Bedingung P erfüllt, ferner von jeder Curve, welche die

Verbindungsebene in einem Punkte der Geraden g berührt, ferner sechsmal von jeder Curve, die ihre Ebene durch g schickt, ferner dreimal von jeder Curve, die ihre Spitze auf g hat, und endlich auch von jeder Ausartung, die eine mehrfache Ordnungsgerade durch g schickt. Bezeichnen wir daher mit ϱ_g *die zweifache Bedingung, dass die Curve eine gegebene Ebene in einem Punkte einer auf dieser Ebene gegebenen Geraden berührt*, und beachten wir, dass

$$P = \mu\nu - 3\mu^2$$

ist, so erhalten wir:

$$13)\quad \nu^2 = \mu\nu + 3\mu^2 + 3c^2 + \varrho_g + (\delta_1 + 2\delta_2 + 6\varepsilon_1 + 6\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + \vartheta_1 + 3\vartheta_2 + 2\eta_1 + 6\eta_2)b,$$

eine Formel, welche, für Elementarsysteme specialisirt, schon in § 7. als Beispiel für die Anwendung des Princips von der Erhaltung der Anzahl angeführt ist.

Legt man dann die Ebenen der Bedingung ϱ^2 derartig unendlich nahe, dass sie eine bestimmte Schnittgerade haben, so bekommt man analog der Formel 13):

$$14).\quad \varrho^2 = 3w_e + \varrho_g + (2\delta_1 + \delta_2 + 6\tau_1 + 6\tau_2 + 6\tau_3)e + (2\vartheta_1 + 6\vartheta_2 + \eta_1 + 3\eta_2)e.$$

Man könnte fragen, ob durch das Princip der speciellen Lage nicht auch Formeln abgeleitet werden können, welche etwa den Formeln 7) bis 12) des § 40. in derselben Weise entsprechen, wie die eben abgeleiteten 14 Formeln den Formeln 1) bis 6), 17) bis 22), 15) und 16) des § 40. entsprechen. Dies ist in der That möglich. Doch würden dann in die Formeln Bedingungen eintreten, welche wir bisher nicht berücksichtigt haben. Wir bekämen z. B. die der Formel 7) des § 40. entsprechende Formel, wenn wir die Gerade der Bedingung νc mit der Ebene dieser Bedingung zur Incidenz brächten. Doch wäre dann die zweifache Bedingung einzuführen, welche verlangt, dass die C_3^3 ihre Spitze in einer gegebenen Ebene hat, und zugleich ihren dritten Schnittpunkt mit dieser Ebene auf einer in der Ebene gegebenen Geraden hat.

Die obigen Formeln, denen noch viele Formeln höherer Dimension hinzugefügt werden könnten, sind vom Verfasser theils zur Ableitung von Fundamentalzahlen, theils zur numerischen Controle, theils zu aposteriorischen Bestimmungen *mitbenutzt*. Zur Verdeutlichung mögen die folgenden Beispiele dienen.

Erstes Beispiel.

Wir betrachten als bekannt die Zahlenreihen μ^2, c^2, σa, nämlich:

$$\mu^2 = 384,\ 864,\ 1488,\ 2022,\ 2016,\ 1524,\ 924,\ 468,\ 192;$$

$c^2 = 1168, 2896, 4592, 5408, 4952, 3708, 2376, 1392, 768;$

$\sigma a = 5912, 8840, 9980, 8640, 6008, 3542, 1890, 935, 440;$

und finden daraus durch Formel 10) die Zahlenreihe νq, nämlich:

$\nu q = 10568, 20120, 28220, 30930, 26912, 19238, 11790, 6515, 3320, 1592.$

Zweites Beispiel.

Wir wenden die Formel 2) an auf die 3 zweistufigen Systeme aller Curven, welche die Bedingungen

$$\mu^3 yzw\nu^2, \quad \mu^3 yzw\nu\varrho, \quad \mu^3 yzw\varrho^2$$

erfüllen. Für diese Systeme sind die Zahlen y^2, μ^2, σa, $\delta_2 b$, $\varepsilon_2 b$ gleich Null, während $\tau_3 b$ bezüglich die Werthe

$$3, 3, 0,$$

$\varepsilon_3 b$ die Werthe

$$0, 0, 2$$

hat. Daraus folgt die Zahlenreihe

$$\mu^3 yzw^2 q = 3, 3, 2.$$

Drittes Beispiel.

Durch die Formel 2) findet man aus den Zahlenreihen:

$$\mu^3 cy^2 = 12, 30, 36, 24, 12,$$
$$\sigma\mu^3 ca = 7, 13, 16, 13, 7,$$
$$\delta_2\mu^3 cb = 0, 6, 21, 18, 0,$$
$$\varepsilon_2\mu^3 cb = 0, 0, 0, 12, 24,$$

die Zahlenreihe

$$\mu^3 cwq = 19, 49, 73, 67, 43.$$

Viertes Beispiel.

Die Formeln 13) und 14) können benutzt werden, um Anzahlen zu bestimmen, welche die neu eingeführte Bedingung ϱ_g mitenthalten. Wollte man diese Bedingung von vornherein mit berücksichtigen, so würde dies keine Schwierigkeiten veranlassen, da sich bei jeder der 13 Ausartungen leicht ergiebt, wie dieselbe ϱ_g erfüllt. Wir leiten hier nur die Zahlenreihe ϱ_g sowohl durch die Formel 13) wie durch die Formel 14) ab, und benutzen also die Zahlenreihen:

$\nu^2 = 17760, 31968, 44304, 49008, 43104, 30960, 18888, 10284, 5088,$

$\mu\nu = 3216, 6528, 10200, 12708, 12144, 9156, 5688, 3090, 1488,$

$\mu^2 = 384, 864, 1488, 2022, 2016, 1524, 924, 468, 192,$

$c^2 = 1168, 2896, 4592, 5408, 4952, 3708, 2376, 1392, 768,$

$\varrho^2 = 44304, 49008, 43104, 30960, 18888, 10284, 5088, 2304, 960,$

$w_e = 11472, 11616, 9080, 5650, 2944, 1392, 596, 230, 80.$

Dann erhalten wir durch beide Formeln übereinstimmend die Zahlenreihe:

$$\varrho_g = 9888,\ 14160,\ 15864,\ 14010,\ 10056,\ 6108,\ 3300,\ 1614,\ 720.$$

Fünftes Beispiel.

Formel 13) liefert aus den Zahlenreihen:

$$\begin{aligned}
\mu^3 cwvv^2 &= 43,\ 67,\ 73,\\
\delta_1\mu^3 cwvb &= 0,\ 1,\ 0,\\
\delta_2\mu^3 cwvb &= 1,\ 3,\ 0,\\
\varepsilon_2\mu^3 cwvb &= 0,\ 0,\ 3,\\
\vartheta_1\mu^3 cwvb &= 4,\ 9,\ 9,\\
\vartheta_2\mu^3 cwvb &= 5,\ 3,\ 0,\\
\eta_2\mu^3 cwvb &= 0,\ 3,\ 5,
\end{aligned}$$

die neue Zahlenreihe:

$$\mu^3 cwv\varrho_g = 22,\ 24,\ 16.$$

Dieselbe Zahlenreihe erhält man auch durch Formel 14) aus:

$$\begin{aligned}
\mu^3 cwv\varrho^2 &= 73,\ 49,\ 19,\\
\delta_2\mu^3 cwve &= 5,\ 4,\ 0,\\
\tau_1\mu^3 cwve &= 1,\ 0,\ 0,\\
\vartheta_1\mu^3 cwve &= 8,\ 6,\ 0,\\
\vartheta_2\mu^3 cwve &= 4,\ 0,\ 0,\\
\eta_2\mu^3 cwve &= 0,\ 3,\ 1.
\end{aligned}$$

Sechstes Beispiel.

Die Formel 13) liefert aus den Zahlenreihen:

$$\begin{aligned}
\mu^3 cwv^2 &= 52,\ 106,\ 166,\ 166,\\
\delta_1\mu^3 cwb &= 0,\ 0,\ 5,\ 0,\\
\delta_2\mu^3 cwb &= 0,\ 1,\ 4,\ 0,\\
\varepsilon_2\mu^3 cwb &= 0,\ 0,\ 0,\ 4,\\
\vartheta_2\mu^3 cwb &= 6,\ 15,\ 9,\ 0,\\
\eta_2\mu^3 cwb &= 0,\ 0,\ 12,\ 18,
\end{aligned}$$

die dualistisch sich selbst entsprechende Zahlenreihe:

$$\mu^2\varrho_g cw = 34,\ 54,\ 54,\ 34,$$

Die Formeln 13) und 14) hatten uns zu der Bedingung ϱ_g geführt, welche verlangt, dass die Plancurve eine gegebene Ebene in einem Punkte einer auf der Ebene gelegenen Geraden berührt. Die Definition dieser Bedingung steht *in nahem Zusammenhang mit der Definition der elementaren Bedingungen.* Es liegt daher nahe, *alle* Bedingungen

zu untersuchen, welche in derselben Weise den elementaren Bedingungen verwandt sind. Für den Kegelschnitt ist dies schon in § 37. geschehen. Wir legen jetzt allgemeiner die *Plancurve n^{ter} Ordnung m^{ten} Ranges* zu Grunde, und bezeichnen für sie als *den elementaren Bedingungen verwandt* jede Bedingung, welche eine Grundbedingung ist für das Gebilde Γ, das aus der Ebene μ der Plancurve, einer Tangente g, und deren Berührungspunkte p besteht. Da die Plancurve ∞^1 solcher Gebilde Γ besitzt, so liefert jede solchem Gebilde auferlegte i-fache Bedingung B der Plancurve eine $(i-1)$-fache Bedingung, die dann mit (B) bezeichnet werden soll. Die zweifachen Bedingungen:

$$p^2,\ g_e,\ \mu p,\ \mu g$$

liefern der Plancurve bezüglich die Bedingungen:

$$(p^2),\ (g_e),\ (\mu p),\ (\mu g),$$

für welche die Symbole:

$$\nu,\ \varrho,\ n\cdot\mu,\ m\cdot\mu$$

eingeführt sind. (μ^2) ist gleich Null zu setzen, weil in einem *einstufigen* Curvensysteme keine Curve eine gegebene *zwei*fache Bedingung erfüllen kann. Deshalb ist, gemäss den allgemeinen Incidenz-Formeln:

$$(g_p) = (\mu g) - (\mu^2) = m\cdot\mu,$$

ferner ist auch:

$$(pg) = (p^2) + (g_e) = \nu + \varrho.$$

Für die zweifachen Bedingungen:

$$(p^3),\ (g_s),\ (pg_e)$$

sind die Symbole:

$$P,\ t,\ \varrho_g$$

eingeführt. Nun hat man nach den Incidenz-Formeln:

$$(p^3) = (\mu p^2) - (\mu^2 p) + (\mu^3),$$

also, da für (μ^3) wieder Null zu setzen ist, die bekannte*) Formel:

$$P = \mu\nu - n\cdot\mu^2.$$

Ferner wird aus:

$$(g_s) = (\mu g_e) - (\mu^3)$$

die bekannte Formel:

$$t = \mu\varrho.$$

Die Bedingnng ϱ_g lässt sich nicht durch μ, ν, ϱ ausdrücken. *Wohl aber kann man alle den elementaren Bedingungen verwandte Bedingungen als Functionen von*

$$\varrho_g,\ \mu,\ \nu,\ \varrho$$

darstellen. Nämlich:

---

*) Diese und einige andere Formeln sind schon in § 10. ausgesprochen. Die obige Betrachtung wirft ein neues Licht auf den Zusammenhang der Formeln des § 10. mit denen des § 9.

$$(pg_p) = (p^3) + (g_s) = P + t = \mu\nu - n\cdot\mu^2 + \mu\varrho,$$
$$(p^2 g) = (pg_e) + (p^3) = \varrho_g + P = \varrho_g + \mu\nu - n\cdot\mu^2.$$

Ferner:

$$(G) = (\mu^2 g_e) - (\mu^3 g)$$

oder:

$$T = \mu^2\varrho - m\cdot\mu^3,$$

$$(p^2 g_p) = (pg_s) = (\mu p g_e) - (\mu^3 p) = \mu\varrho_g - n\cdot\mu^3,$$

15) $(p^3 g) = (p^2 g_e) = (pg_s) - (G) = (\mu\varrho_g - n\cdot\mu^3) - (\mu^2\varrho - m\cdot\mu^3)$
$$= \mu\varrho_g - \mu^2\varrho - n\cdot\mu^3 + m\cdot\mu^3.$$

Endlich:

16) $(pG) = (p^2 g_s) = (p^3 g_p) = (p\mu^2 g_e) - (p\mu^3 g)$
$$= \mu^2\varrho_g - (\mu^3\nu + \mu^3\varrho)$$
$$= \mu^2\varrho_g - \mu^3\nu - \mu^3\varrho.$$

Man beachte namentlich die beiden numerirten Formeln, die in Worten lauten, wie folgt:

15) Die dreifache Bedingung, dass eine Plancurve n^{ter} Ordnung, m^{ten} Ranges eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte berühre, hat den Modul:

$$\mu\varrho_g - \mu^2\varrho - n\cdot\mu^3 + m\cdot\mu^3.$$

16) Die vierfache Bedingung, dass eine Plancurve eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühre, hat den Modul:

$$\mu^2\varrho_g - \mu^3\nu - \mu^3\varrho.$$

Die letztgenannte Bedingung kann man auch dadurch mit den übrigen in Verbindung bringen, dass man den beiden Punkten der Bedingung P^2 die specielle Lage zweier unendlich naher Punkte ertheilt und das Princip von der Erhaltung der Anzahl anwendet. Dann bekommt man für die C_3^3:

$$(\mu\nu - 3\mu^2)^2 = (\mu^2\varrho_g - \mu^3\nu - \mu^3\varrho) + 3\mu c^3 + \alpha_x,$$

wo α_x die Anzahl aller hinlänglich oft gerechneten Ausartungen ist, welche eine mehrfache Ordnungsgerade durch einen gegebenen Punkt schicken und dabei auch ihre Ebene durch einen zweiten gegebenen Punkt schicken. Diese Formel und die mit μ^2 multiplicirte Formel 13) sind von einander abhängig.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, wie auch die Correspondenzformeln für *Punktgruppen* zu Formeln zwischen Bedingungssymbolen und Ausartungssymbolen führen.

Betrachten wir je 3 in gerader Linie befindliche Punkte einer Plancurve C_3^3 als Punktgruppe, so erzeugt ein einstufiges Curvensystem ein dreistufiges System solcher Punktgruppen. Wendet man auf dieses System die Correspondenzformeln an, welche ich in den Math. Annalen

Bd. XII, p. 187 entwickelt habe, d. h. setzt man in den Formeln 47) und 48) (p. 196 desselben Bandes) $n = 3$, $p = 0$, $b = 0$, so erhält man die Formeln:

17) $$9\nu - 12\mu = w + 8q + X,$$

18) $$12\nu - 21\mu = v + 8c + 3\sigma + X',$$

wo X und X' Zahlen sind, die von den Anzahlen der im Systeme etwa vorhandenen Ausartungen erster und zweiter Gattung abhängen.

Setzt man ferner ein zweistufiges Curvensystem voraus und wendet die Formel 49) auf p. 196 in Bd. XII an, so erhält man:

19) $$3\nu^2 - 9\mu\nu + 9\mu^2 = w_e + 8q_e + X''$$

wo X'' wieder von den Ausartungen von höherer als der nullten Gattung abhängt.

Die Formeln 17) und 18) stehen im Einklang mit den Formeln 26) bis 30) des § 40., die Formel 19) mit den Formeln 7) und 9) des vorliegenden Paragraphen. Dieser Umstand kann benutzt werden, um die Coefficienten zu bestimmen, mit welchen die Ausartungszahlen in die mit X, X', X'' bezeichneten Ausdrücke eintreten.

Den Formeln 17), 18), 19) könnten noch viele andere Formeln hinzugefügt werden, welche in ähnlicher Weise aus Anwendungen der Correspondenzformeln auf Punktgruppen hervorgehen. Man könnte z. B. für ein zweistufiges Curvensystem die Zahl der Geraden ausdrücken, welche in einer gegebenen Ebene liegen und auf welchen zwei Curvenschnittpunkte mit einem Punkte der Wendetangente coincidiren. Doch wollen wir auf diese Anwendungen hier nicht weiter eingehen.

§ 50.

Tabellen von Fundamentalzahlen der cubischen Plancurve mit Spitze.

Gegen tausend der unten folgenden Fundamentalzahlen hat der Verfasser schon im Jahre 1874 bei der Abfassung seiner Preisschrift berechnet, weil er diese Zahlen damals zur Berechnung der Anzahlen der cubischen Plancurve mit Doppelpunkt, sowie der Anzahlen der cubischen Raumcurve *nöthig* hatte. Diese später viel benutzten Anzahlen der C_3^3 sind unten *in der ersten Tabelle* zusammengestellt. Im Jahre 1875 berechnete der Verfasser, hauptsächlich um über die Natur der 13 Ausartungen sichere Aufschlüsse zu erlangen, die *sämmtlichen Fundamentalzahlen der* C_3^3 *bei fester Ebene.* Diese schon durch die Gött. Nachr. (Maiheft 1875) publicirten Zahlen bilden den Inhalt der *zweiten Tabelle.* Die Zahlen der *dritten Tabelle* endlich habe ich theils früher, theil serst im letzten Jahre berechnet, und zwar auch hauptsächlich deshalb, um daraus Rückschlüsse auf Eigenschaften der Ausartungen machen zu können. Auch der Berechnung derjenigen Fundamentalzahlen, welche in *keiner*

der drei Tabellen angeführt sind, steht sachlich kein Hinderniss entgegen, da die vorangehenden Paragraphen dieses Abschnitts die Ausrechnung *sämmtlicher* Fundamentalzahlen auf das Einmaleins reduciren.

Der bessern Uebersicht wegen sind mehrere Fundamentalzahlen sowohl in der ersten wie in der zweiten Tabelle angeführt.

Zu beachten ist, dass immer die einer α-fachen Bedingung nachgesetzte i^{te} Zahl angiebt, wieviel cubische Plancurven mit Spitze diese α-fache Bedingung erfüllen, $11-\alpha-i$ *gegebene Gerade und* $i-1$ *gegebene Ebenen berühren.*

Erste Tabelle.

Die im Folgenden benutzten Anzahlen.

Die Zahlenreihen sind mit Rücksicht auf die Benutzung bei der Berechnung der Zahlen γ des § 56. *geordnet.*

$\mu^3 = 24,\ 60,\ 114,\ 168,\ 168,\ 114,\ 60,\ 24,$
$\mu^3 c = 12,\ 42,\ 96,\ 168,\ 186,\ 132,\ 72,$
$\mu^3 c^2 = 2,\ 8,\ 20,\ 38,\ 44,\ 32;$

$\mu^2 = 384,\ 864,\ 1488,\ 2022,\ 2016,\ 1524,\ 924,\ 468,\ 192,$
$\mu^2 c = 176,\ 536,\ 1082,\ 1688,\ 1844,\ 1496,\ 956,\ 512,$
$\mu^2 c^2 = 32,\ 110,\ 240,\ 400,\ 452,\ 372,\ 240,$
$\mu^2 c^3 = 2,\ 8,\ 20,\ 38,\ 44,\ 32;$

$\mu = 3216,\ 6528,\ 10200,\ 12708,\ 12144,\ 9156,\ 5688,\ 3090,\ 1488,\ 624,$
$\mu c = 1344,\ 3576,\ 6388,\ 8852,\ 9108,\ 7264,\ 4706,\ 2688,\ 1392,$
$\mu c^2 = 248,\ 740,\ 1416,\ 2076,\ 2216,\ 1818,\ 1200,\ 696,$
$\mu c^3 = 20,\ 68,\ 144,\ 232,\ 266,\ 240,\ 168.$

Die Zahlen ν^{10}, $\nu^9\varrho$, $\cdots$ ϱ^{10} sind 17760, 31968, 44304, 49008, 43104, 30960, 18888, 10284, 5088, 2304, 960,

$c = 6592,\ 14800,\ 22336,\ 25560,\ 22864,\ 16672,\ 10380,\ 5836,\ 3040,\ 1504,$
$c^2 = 1168,\ 2896,\ 4592,\ 5408,\ 4952,\ 3708,\ 2376,\ 1392,\ 768,$
$c^3 = 96,\ 264,\ 448,\ 556,\ 540,\ 436,\ 304,\ 208.$

$\mu^3 q = 18,\ 51,\ 105,\ 168,\ 177,\ 123,\ 66,$
$\mu^3 qc = 7,\ 25,\ 58,\ 85,\ 79,\ 52,$
$\mu^3 qc^2 = 1,\ 4,\ 10,\ 13,\ 10;$

$\mu^2 q = 268,\ 670,\ 1228,\ 1771,\ 1846,\ 1453,\ 910,\ 478,$
$\mu^2 qc = 98,\ 302,\ 613,\ 852,\ 839,\ 628,\ 382,$
$\mu^2 qc^2 = 16,\ 55,\ 120,\ 164,\ 154,\ 106,$
$\mu^2 qc^3 = 1,\ 4,\ 10,\ 13,\ 10;$

$\mu q \quad = 2088, 4620, 7550, 9769, 9618, 7448, 4735, 2655, 1344,$
$\mu q c \quad = 708, 1890, 3361, 4296, 4092, 3073, 1935, 1086,$
$\mu q c^2 = 118, 349, 660, 846, 799, 603, 384,$
$\mu q c^3 = 9, 30, 62, 79, 75, 54;$

$q \quad = 10568, 20120, 28220, 30930, 26912, 19238, 11790, 6515, 3320, 1592,$
$q c \quad = 3208, 7060, 10270, 11058, 9354, 6558, 4025, 2270, 1208,$
$q c^2 = 508, 1210, 1812, 1944, 1638, 1163, 740, 452,$
$q c^3 = 38, 98, 152, 162, 137, 98, 68.$

$\mu^3 w \quad = 72, 132, 186, 168, 96, 42, 12,$
$\mu^3 w c \quad = 52, 106, 166, 166, 106, 52,$
$\mu^3 w c^2 = 10, 22, 37, 40, 28;$

$\mu^2 w \quad = 1024, 1696, 2200, 2014, 1360, 724, 316, 100,$
$\mu^2 w c \quad = 656, 1184, 1666, 1662, 1244, 736, 364,$
$\mu^2 w c^2 = 136, 262, 390, 407, 316, 196,$
$\mu^2 w c^3 = 10, 22, 37, 40, 28;$

$\mu w \quad = 7632, 11424, 13544, 11956, 8160, 4532, 2224, 954, 336,$
$\mu w c \quad = 4320, 6912, 8680, 8184, 6036, 3640, 1962, 960,$
$\mu w c^2 = 904, 1528, 2010, 1980, 1528, 954, 528,$
$\mu w c^3 = 84, 156, 224, 241, 210, 144;$

$w \quad = 36704, 48416, 50576, 41136, 26912, 14864, 7416, 3356, 1376, 512;$
$w c \quad = 17536, 23728, 24688, 20292, 13728, 8016, 4268, 2108, 992,$
$w c^2 = 3472, 4864, 5160, 4374, 3096, 1892, 1064, 560,$
$w c^3 = 320, 476, 530, 486, 380, 260, 176.$

$\mu^3 q_e \quad = 5, 17, 38, 47, 35, 20,$
$\mu^3 q_e c = 1, 4, 10, 13, 10;$

$\mu^2 q_e \quad = 66, 192, 373, 452, 387, 256, 142,$
$\mu^2 q_e c = 14, 47, 100, 126, 110, 74,$
$\mu^2 q_e c^2 = 1, 4, 10, 13, 10;$

$\mu q_e \quad = 460, 1150, 1945, 2220, 1876, 1255, 735, 390,$
$\mu q_e c \quad = 98, 281, 516, 614, 533, 363, 216,$
$\mu q_e c^2 = 9, 30, 62, 79, 75, 54;$

$q_e \quad = 2040, 4164, 5678, 5650, 4402, 2850, 1649, 878, 440,$
$q_e c \quad = 412, 946, 1364, 1388, 1098, 727, 436, 244,$
$q_e c^2 = 38, 98, 152, 162, 137, 98, 68.$

$\mu^3 w_e \quad = 32,\ 44,\ 38,\ 20,\ 8,\ 2,$
$\mu^3 w_e c \ = 28,\ 40,\ 37,\ 22,\ 10,$
$\mu^3 w_e c^2 = 6,\ 9,\ 9,\ 6;$
$\mu^2 w_e \quad = 408,\ 516,\ 454,\ 290,\ 144,\ 58,\ 16,$
$\mu^2 w_e c \ = 308,\ 398,\ 370,\ 261,\ 146,\ 68,$
$\mu^2 w_e c^2 = 70,\ 94,\ 91,\ 67,\ 40,$
$\mu^2 w_e c^3 = 6,\ 9,\ 9,\ 6;$
$\mu w_e \quad = 2728,\ 3148,\ 2674,\ 1734,\ 904,\ 418,\ 168,\ 54,$
$\mu w_e c \ = 1772,\ 2054,\ 1812,\ 1262,\ 722,\ 372,\ 174,$
$\mu w_e c^2 = 402,\ 480,\ 440,\ 322,\ 192,\ 102,$
$\mu w_e c^3 = 42,\ 54,\ 54,\ 45,\ 30;$
$w_e \quad = 11472,\ 11616,\ 9080,\ 5650,\ 2944,\ 1392,\ 596,\ 230,\ 80,$
$w_e c \ = 5968,\ 5752,\ 4442,\ 2846,\ 1584,\ 808,\ 382,\ 172,$
$w_e c^2 = 1256,\ 1214,\ 962,\ 648,\ 380,\ 206,\ 104,$
$w_e c^3 = 126,\ 126,\ 108,\ 81,\ 54,\ 36.$

$\mu^3 q w \quad = 32,\ 71,\ 119,\ 128,\ 89,\ 47,$
$\mu^3 q w c \ = 19,\ 49,\ 73,\ 67,\ 43,$
$\mu^3 q w c^2 = 3,\ 9,\ 12,\ 9;$
$\mu^2 q w \quad = 444,\ 864,\ 1288,\ 1349,\ 1050,\ 649,\ 334,$
$\mu^2 q w c \ = 240,\ 522,\ 725,\ 697,\ 507,\ 300,$
$\mu^2 q w c^2 = 44,\ 107,\ 146,\ 134,\ 90,$
$\mu^2 q w c^3 = 3,\ 9,\ 12,\ 9;$
$\mu q w \quad = 3224,\ 5540,\ 7352,\ 7225,\ 5498,\ 3404,\ 1855,\ 907,$
$\mu q w c \ = 1564,\ 2908,\ 3679,\ 3404,\ 2464,\ 1489,\ 803,$
$\mu q w c^2 = 296,\ 599,\ 756,\ 691,\ 503,\ 311,$
$\mu q w c^3 = 25,\ 58,\ 73,\ 67,\ 47;$
$q w \quad = 14904,\ 21960,\ 24700,\ 21416,\ 14920,\ 8774,\ 4650,\ 2255,\ 1016,$
$q w c \ = 6104,\ 9140,\ 9664,\ 7884,\ 5290,\ 3114,\ 1685,\ 854,$
$q w c^2 = 1084,\ 1696,\ 1760,\ 1418,\ 970,\ 599,\ 356,$
$q w c^3 = 88,\ 148,\ 150,\ 122,\ 85,\ 58.$

$\mu^3 q_e w \quad = 9,\ 27,\ 36,\ 27,\ 15,$
$\mu^3 q_e w c \ = 3,\ 9,\ 12,\ 9;$
$\mu^2 q_e w \quad = 104,\ 260,\ 335,\ 290,\ 191,\ 104,$
$\mu^2 q_e w c \ = 34,\ 85,\ 109,\ 94,\ 62,$
$\mu^2 q_e w c^2 = 3,\ 9,\ 12,\ 9;$
$\mu q_e w \quad = 660,\ 1380,\ 1669,\ 1424,\ 936,\ 535,\ 275,$
$\mu q_e w c \ = 212,\ 443,\ 532,\ 450,\ 293,\ 167,$
$\mu q_e w c^2 = 25,\ 58,\ 73,\ 67,\ 47;$

$q_e w_e = 2632, 4276, 4504, 3510, 2194, 1222, 621, 294,$
$q_e wc = 764, 1220, 1230, 932, 590, 339, 180,$
$q_e wc^2 = 88, 148, 150, 122, 85, 58.$

$\mu^3 q w_e = 18, 27, 27, 18, 9,$
$\mu^3 q w_e c = 15, 18, 15, 9,$
$\mu^3 q w_e c^2 = 3, 3, 2;$
$\mu^2 q w_e = 212, 287, 281, 209, 125, 62,$
$\mu^2 q w_e c = 151, 175, 154, 106, 60,$
$\mu^2 q w_e c^2 = 33, 36, 30, 19,$
$\mu^2 q w_e c^3 = 3, 3, 2;$
$\mu q w_e = 1326, 1623, 1507, 1100, 657, 346, 163,$
$\mu q w_e c = 803, 875, 748, 513, 296, 153,$
$\mu q w_e c^2 = 175, 184, 154, 106, 63,$
$\mu q w_e c^3 = 18, 18, 15, 10;$
$q w_e = 5116, 5410, 4504, 3024, 1708, 871, 405, 174,$
$q w_e c = 2366, 2246, 1716, 1094, 617, 321, 156,$
$q w_e c^2 = 460, 418, 312, 203, 121, 70,$
$q w_e c^3 = 42, 36, 27, 18, 12.$

$\mu^3 q_e w_e = 9, 9, 6, 3,$
$\mu^3 q_e w_e c = 3, 3, 2;$
$\mu^2 q_e w_e = 81, 81, 63, 39, 20,$
$\mu^2 q_e w_e c = 27, 27, 21, 13,$
$\mu^2 q_e w_e c^2 = 3, 3, 2;$
$\mu q_e w_e = 401, 395, 308, 191, 104, 51,$
$\mu q_e w_e c = 133, 130, 100, 61, 33,$
$\mu q_e w_e c^2 = 18, 18, 15, 10;$
$q_e w_e = 1110, 1032, 754, 446, 237, 115, 52,$
$q_e w_e c = 334, 292, 204, 122, 67, 34,$
$q_e w_e c^2 = 42, 36, 27, 18, 12.$

Zweite Tabelle.

Sämmtliche Fundamentalzahlen der in *fester* Ebene liegenden cubischen Plancurve mit Spitze.

Hier sind immer alle Bedingungssymbole *zusammengefasst,* welche in Bezug auf die Bestimmung des Singularitätendreiecks dasselbe aussagen. *Fortgelassen* sind nur diejenigen Anzahlen, welche sich gemäss der ersten Incidenzformel, also nach der Analogie von

$$vw = w_e + v^7$$

durch Addition zweier der obigen Anzahlen ergeben. Da $\mu^3 g_e = \mu^3 g^2$ ist, wenn der Strahl g in der Ebene μ liegt, so konnte w^2, q^2, z^2 statt w_e, q_e, z_e gesetzt werden. Da die in fester Ebene liegende cubische Plancurve mit Spitze dualistisch sich selbst entspricht, so konnte *folgende Anordnung* für die Zahlenreihen getroffen werden.

Die einer α-fachen Bedingung nachgesetzte i^{te} Zahl ist die Zahl derjenigen Curven, welche, in fester Ebene liegend, die α-fache Bedingung erfüllen, dabei durch $8-\alpha-i$ in dieser Ebene gelegene, gegebene Punkte gehen, und $i-1$ in dieser Ebene liegende, gegebene Gerade berühren. Dagegen ist die Zahl, welche einer α-fachen Bedingung als i^{te} *vorangeht*, die Zahl der Curven, welche, in fester Ebene liegend, die α-fache Bedingung erfüllen, dabei durch $i-1$ in dieser Ebene liegende, gegebene Punkte gehen, und $8-\alpha-i$ in dieser Ebene liegende, gegebene Gerade berühren.

Die schon von Maillard und Zeuthen bestimmten Elementarzahlen $\mu^3\nu^7$, $\mu^3\nu^6\varrho$, $\cdots$ $\mu^3\varrho^7$ sind:

$$24,\ 60,\ 114,\ 168,\ 168,\ 114,\ 60,\ 24.$$

$$c = 12,\ 42,\ 96,\ 168,\ 186,\ 132,\ 72 = w,$$
$$v = 66,\ 123,\ 177,\ 168,\ 105,\ 51,\ 18 = q,$$
$$y = 48,\ 96,\ 150,\ 168,\ 132,\ 78,\ 36 = z.$$

$$c^2 = 2,\ 8,\ 20,\ 38,\ 44,\ 32 = w^2,$$
$$v^2 = 20,\ 35,\ 47,\ 38,\ 17,\ 5 = q^2,$$
$$y^2 = 20,\ 44,\ 74,\ 74,\ 44,\ 20 = z^2;$$
$$cv = 47,\ 89,\ 128,\ 119,\ 71,\ 32 = wq,$$
$$cy = 32,\ 62,\ 92,\ 92,\ 62,\ 32 = wz,$$
$$vy = 59,\ 89,\ 92,\ 65,\ 35,\ 14 = qz,$$
$$cw = 52,\ 106,\ 166,\ 166,\ 106,\ 52 = wc,$$
$$vq = 34,\ 79,\ 139,\ 139,\ 79,\ 34 = qv,$$
$$yz = 34,\ 70,\ 112,\ 112,\ 70,\ 34 = zy.$$

$$\left.\begin{matrix} c^2 z \\ c z^2 \end{matrix}\right\} = 4,\ 10,\ 19,\ 22,\ 16 = \left\{\begin{matrix} w^2 y \\ w y^2, \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} c^2 q \\ c q^2 \end{matrix}\right\} = 1,\ 4,\ 10,\ 13,\ 10 = \left\{\begin{matrix} w^2 v \\ w v^2, \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} v^2 z \\ v z^2 \end{matrix}\right\} = 10,\ 19,\ 28,\ 22,\ 7 = \left\{\begin{matrix} q^2 y \\ q y^2; \end{matrix}\right.$$
$$c^2 w = 10,\ 22,\ 37,\ 40,\ 28 = w^2 c,$$
$$v^2 q = 10,\ 22,\ 37,\ 31,\ 10 = q^2 v,$$
$$y^2 z = 10,\ 22,\ 37,\ 34,\ 16 = z^2 y;$$

$$\begin{aligned}
c^2v &= 9,\ 18,\ 27,\ 27,\ 18 = w^2q,\\
c^2y &= 6,\ 12,\ 18,\ 18,\ 12 = w^2z,\\
v^2y &= 15,\ 21,\ 18,\ 9,\ 3 = q^2z,\\
v^2c &= 17,\ 27,\ 36,\ 27,\ 9 = q^2w,\\
y^2c &= 12,\ 30,\ 36,\ 24,\ 12 = z^2w,\\
y^2v &= 21,\ 30,\ 27,\ 15,\ 6 = z^2q;\\
cvy &= 33,\ 48,\ 45,\ 27,\ 12 = wqz.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} c^2v^2 \\ c^2zv \\ czv^2 \\ cz^2v \end{matrix}\right\} = 3,\ 6,\ 9,\ 9 = \left\{\begin{matrix} w^2q^2 \\ w^2yq \\ wyq^2 \\ wy^2q, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} c^2y^2 \\ c^2qy \\ cqy^2 \\ cq^2y \end{matrix}\right\} = 2,\ 6,\ 6,\ 4 = \left\{\begin{matrix} w^2z^2 \\ w^2vz \\ wvz^2 \\ wv^2z, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} v^2y^2 \\ v^2wy \\ vwy^2 \\ vw^2y \end{matrix}\right\} = 5,\ 6,\ 3,\ 1 = \left\{\begin{matrix} q^2z^2 \\ q^2cz \\ qcz^2 \\ qc^2z; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} c^2zw \\ cz^2w \end{matrix}\right\} = 4,\ 9,\ 15,\ 14 = \left\{\begin{matrix} w^2yc \\ wy^2c, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} c^2qw \\ cq^2w \end{matrix}\right\} = 3,\ 9,\ 12,\ 9 = \left\{\begin{matrix} w^2vc \\ wv^2c, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} v^2zq \\ vz^2q \end{matrix}\right\} = 4,\ 9,\ 15,\ 11 = \left\{\begin{matrix} q^2yv \\ qy^2v, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} v^2wq \\ vw^2q \end{matrix}\right\} = 6,\ 9,\ 9,\ 3 = \left\{\begin{matrix} q^2cv \\ qc^2v, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} y^2wz \\ yw^2z \end{matrix}\right\} = 6,\ 9,\ 9,\ 4 = \left\{\begin{matrix} z^2cy \\ zc^2y, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} y^2qz \\ yq^2z \end{matrix}\right\} = 3,\ 9,\ 12,\ 7 = \left\{\begin{matrix} z^2vy \\ zv^2y; \end{matrix}\right.$$

$$\begin{aligned}
c^2w^2 &= 6,\ 9,\ 9,\ 6 = w^2c^2,\\
v^2q^2 &= 3,\ 9,\ 9,\ 3 = q^2v^2,\\
y^2z^2 &= 4,\ 9,\ 9,\ 4 = z^2y^2;\\
c^2vy &= 6,\ 9,\ 9,\ 6 = w^2qz,\\
v^2cy &= 9,\ 12,\ 9,\ 3 = q^2wz,\\
y^2cv &= 14,\ 15,\ 9,\ 4 = z^2wq.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} v^2c^2q \\ v^2cq^2 \\ vzc^2q \\ vzcq^2 \\ v^2zq^2 \\ v^2zcq \\ vz^2q^2 \\ vz^2cq \end{array}\right\} = 1,\ 3,\ 3 = \left\{\begin{array}{l} q^2w^2v \\ q^2wv^2 \\ qyw^2v \\ qywv^2 \\ q^2yv^2 \\ q^2ywv \\ qy^2v^2 \\ qy^2wv, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} c^2v^2w \\ c^2vw^2 \\ czv^2w \\ czvw^2 \\ c^2zw^2 \\ c^2zvw \\ cz^2w^2 \\ cz^2vw \end{array}\right\} = 2,\ 3,\ 3 = \left\{\begin{array}{l} w^2q^2c \\ w^2qc^2 \\ wyq^2c \\ wyqc^2 \\ w^2yc^2 \\ w^2yqc \\ wy^2c^2 \\ wy^2qc, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2v^2z \\ y^2vz^2 \\ ywv^2z \\ ywvz^2 \\ y^2wz^2 \\ y^2wvz \\ yw^2z^2 \\ yw^2vz \end{array}\right\} = 2,\ 3,\ 1^{*)} = \left\{\begin{array}{l} z^2q^2y \\ z^2qy^2 \\ zcq^2y \\ zcqy^2 \\ z^2cy^2 \\ z^2cqy \\ zc^2y^2 \\ zc^2qy; \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} c^2v^2y \\ c^2zvy \\ czv^2y \\ cz^2vy \end{array}\right\} = 2,\ 3,\ 3^{*)} = \left\{\begin{array}{l} w^2q^2z \\ w^2yqz \\ wyq^2z \\ wy^2qz, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} v^2y^2c \\ v^2wyc \\ vwy^2c \\ vw^2yc \end{array}\right\} = 4,\ 3,\ 1 = \left\{\begin{array}{l} q^2z^2w \\ q^2czw \\ qcz^2w \\ qc^2zw, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2c^2v \\ y^2qcv \\ yqc^2v \\ yq^2cv \end{array}\right\} = 3,\ 3,\ 2 = \left\{\begin{array}{l} z^2w^2q \\ z^2vwq \\ zvw^2q \\ zv^2wq. \end{array}\right.$$

---

*) Statt dieser Zahl ist in den Gött. Nachr. (1875, Maiheft, p. 386) eine falsche gedruckt.

Ist endlich das Singularitätendreieck vollständig bestimmt, so giebt es eine einzige Curve, welche dieses Dreieck als Singularitätendreieck hat und ausserdem durch einen gegebenen Punkt geht, resp. eine gegebene Gerade berührt.

Dritte Tabelle.

Sonstige Zahlen.

$\mu^2 v = 932, 1562, 2054, 1931, 1358, 767, 362, 134,$
$\mu v = 6888, 10380, 12382, 11039, 7650, 4348, 2195, 987, 384,$
$v = 32728, 43096, 44692, 35766, 22864, 12298, 6006, 2677, 1096, 424;$

$\mu^2 v^2 = 284, 452, 564, 481, 290, 129, 42,$
$\mu v^2 = 2096, 3008, 3414, 2805, 1730, 846, 363, 129,$
$v^2 = 9880, 12328, 12044, 8810, 4952, 2250, 918, 339, 120;$

$P\mu = 312, 684, 1146, 1518, 1512, 1182, 744, 396,$
$P = 2064, 3936, 5736, 6642, 6096, 4584, 2916, 1686, 912,$
$P^2 = 240, 504, 804, 1014, 1008, 840, 564;$

$\mu^3 \varrho_g = 18, 36, 54, 54, 36, 18,$
$\mu^2 \varrho_g = 264, 474, 654, 654, 492, 294, 144,$
$\mu \varrho_g = 2016, 3264, 4122, 3954, 2976, 1836, 984, 462,$
$\varrho_g = 9888, 14160, 15864, 14010, 10056, 6108, 3300, 1614, 720.$

$\mu^2 wqz = 172, 340, 508, 535, 418, 257,$
$\mu wqz = 1272, 2220, 2960, 2929, 2250, 1412, 775,$
$wqz = 5912, 8840, 9980, 8640, 6008, 3542, 1890, 935;$

$\mu^2 w_e qz = 72, 99, 99, 75, 45,$
$\mu w_e qz = 458, 575, 551, 416, 257, 138,$
$w_e qz = 1788, 1950, 1672, 1148, 660, 343, 165;$

$\mu^2 w_e q_e z = 27, 27, 21, 13,$
$\mu w_e q_e z = 135, 135, 108, 69, 38,$
$w_e q_e z = 378, 360, 270, 162, 87, 43.$

$\mu^2 c^3 qwv = 4, 6, 5,$
$\mu c^3 qwv = 26, 36, 33, 25;$

$\mu^2 c w_e v = 99, 121, 100, 58, 22,$
$\mu^2 cwv = 496, 700, 741, 569, 325, 136,$
$\mu^2 cyvw = 244, 277, 217, 124, 52,$
$\mu^2 cwz' = 280, 516, 734, 715, 510, 280,$
$\mu^2 cwy = 456, 706, 732, 551, 322, 156,$
$\mu^2 cwyz = 184, 302, 308, 218, 214.$

§ 51.

Lagebeziehungen zwischen den Punkten, Tangenten und dem Singularitätendreieck der allgemeinen C_3^3.

Wir erinnern uns der Methode, durch welche wir in § 41. die Definitionen der Ausartungen der C_3^3 gewonnen haben. Die Ausartungen δ_2, ε_1, ε_2, ε_3, ϑ_1, η_1, η_2 erschienen dort als die *homographischen Bilder der allgemeinen* C_3^3 für verschiedene Lagen des Centrums S der Homographie. Die Axe der Homographie wurde dann immer zu einer Ordnungsgeraden, und die von S an die allgemeine C_3^3 gezogenen Tangenten, sowie die Verbindungsstrahlen des Punktes S mit den Ecken des Singularitätendreiecks gaben Strahlen durch S, welche die Axe in den ausgezeichneten Punkten der zu erzeugenden Ausartung schnitten. Diese ausgezeichneten Punkte aber sind bei δ_2, ε_1, ε_2, ε_3 *in ihrer Lage von einander abhängig*, wie die in § 45. und § 47. angegebenen *Stammzahlen* lehren. Dieselbe Abhängigkeit muss also auch bei den durch S an die allgemeine C_3^3 gelegten Strahlen stattfinden, und es fliessen daher aus den Stammzahlen jener 4 Ausartungen die durch die folgenden 4 Sätze ausgesprochenen *Lagebeziehungen*.

I) Wenn das Centrum S der Homographie weder auf der Curve, noch auf den Seiten ihres Singularitätendreiecks liegt, so entsteht die Ausartung ε_2. Nun ist aber nach § 47.:

$$\varepsilon_2\mu^3 b_e d_3 c = 4,\quad \varepsilon_2\mu^3 b_e d_3 v = 1,\quad \varepsilon_2\mu^3 b_e d^3 y = 2,$$
$$\varepsilon_2\mu^3 b_e d_2 cv = 3,\quad \varepsilon_2\mu^3 b_e d_2 cy = 2,\quad \varepsilon_2\mu^3 b_e d_2 vy = 1,$$
$$\varepsilon_2\mu^3 b_e d_1 cvy = 1,$$

Folglich gilt der Satz:

„Wenn man an eine cubische Plancurve mit Spitze von irgend einem Punkte S ihrer Ebene die 3 Tangenten und die Strahlen nach der Spitze, dem Wendepunkte und dem Schnittpunkte von Wendetangente und Rückkehrtangente zieht, so erhält man 6 durch S gehende Strahlen, welche, um überhaupt so einer C_3^3 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass das ganze Strahlensextupel *endlichdeutig bestimmt ist*, *sobald* 4 *von den* 6 *Strahlen gegeben sind*, und zwar:

1) *vierdeutig*, sobald die drei Tangenten und der Strahl nach der Spitze gegeben sind,
2) *eindeutig*, sobald die drei Tangenten und der Strahl nach dem Wendepunkt gegeben sind,
3) *zweideutig*, sobald die drei Tangenten und der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente gegeben sind,

4) *dreideutig*, sobald zwei von den drei Tangenten, der Strahl nach der Spitze und der Strahl nach dem Wendepunkte gegeben sind,

5) *zweideutig*, sobald zwei Tangenten, der Strahl nach der Spitze und der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente gegeben sind,

6) *eindeutig*, sobald zwei Tangenten, der Strahl nach dem Wendepunkt und der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente gegeben sind,

7) *eindeutig*, sobald eine Tangente und die drei Strahlen nach den drei Ecken des Singularitätendreiecks gegeben sind."

II) Wenn das Centrum S der Homographie auf der Curve, aber nicht in einer Ecke des Singularitätendreiecks liegt, so entsteht die Ausartung δ_2. Nun ist aber nach § 45. jede Stammzahl für δ_2 gleich 1, wenn die Ebene und auf ihr die doppelte Ordnungsgerade gegeben ist. Folglich gilt der Satz:

„Wenn man an eine cubische Plancurve mit Spitze von irgend einem ihrer Punkte S die in diesem Punkte berührende und die sonst noch mögliche Tangente zieht und ausserdem S mit den drei Ecken des Singularitätendreiecks verbindet, so erhält man 5 von S ausgehende Strahlen, welche, um überhaupt in dieser Weise einer cubischen Plancurve mit Spitze angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass *das ganze Strahlenquintupel immer eindeutig bestimmt ist, sobald irgend welche drei von den fünf Strahlen gegeben sind.*"

III) Wenn das Centrum S der Homographie auf der Rückkehrtangente, aber nicht in der Spitze lag, so entstand die Ausartung ε_1. Nun ist aber nach § 47. bei ε_1 jede Stammzahl gleich 1, wenn die Ebene und die dreifache Ordnungsgerade von ε_1 gegeben ist. Folglich gilt der Satz:

„Wenn man an eine cubische Plancurve mit Spitze von irgend einem Punkte S ihrer Rückkehrtangente die beiden sonst noch möglichen Tangenten und den Strahl nach dem Wendepunkte zieht, so erhält man 4 von S ausgehende Strahlen, welche, um überhaupt einer solchen Curve angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass *das ganze Strahlenquadrupel immer eindeutig bestimmt ist, sobald irgend welche drei von den vier Strahlen gegeben sind.*"

IV) Wenn das Centrum S der Homographie auf dem Verbindungsstrahle von Spitze und Wendepunkt, aber nicht in diesen Punkten selbst lag, so entstand die Ausartung ε_3. Nun ist aber nach § 47.:

$$\varepsilon_3\mu^3 b_e z d_3 = 2, \quad \varepsilon_3\mu^3 b_e z d_2 y = 2, \quad \varepsilon_3\mu^3 b_e z d_2 c = 2, \quad \varepsilon_3\mu^3 b_e z d_1 c y = 1.$$

Folglich gilt der Satz:

„Wenn man an eine cubische Plancurve mit Spitze von irgend einem Punkte S des Verbindungsstrahls der Spitze mit dem Wendepunkte die drei Tangenten zieht und ausserdem S mit dem Schnittpunkte von Wendetangente und Rückkehrtangente verbindet, so erhält man 5 von S ausgehende Strahlen, welche, um überhaupt in dieser Weise einer solchen Curve angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass das ganze Strahlenquintupel immer *endlichdeutig bestimmt ist, sobald irgend welche drei von den fünf Strahlen gegeben sind, und zwar:*

1) *zweideutig*, sobald die drei Tangenten gegeben sind,
2) *zweideutig*, sobald zwei Tangenten und der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente gegeben sind,
3) *zweideutig*, sobald zwei Tangenten und der Verbindungsstrahl von Spitze und Wendepunkt gegeben sind,
4) *eindeutig*, sobald eine Tangente, der Strahl nach dem Schnittpunkt von Wendetangente und Rückkehrtangente, und der Verbindungsstrahl von Spitze und Wendepunkt gegeben sind.

Bei den Ausartungen ϑ_1, η_1, η_2 treten keine Lagebeziehungen der ausgezeichneten Punkte auf. Folglich treten auch bei der allgemeinen Curve keine Relationen auf, wenn der Punkt S auf der Wendetangente oder in einer Ecke des Singularitätendreiecks liegt. *Vier neue Sätze erhält man jedoch, wenn man die obigen Sätze feld-dualistisch übersetzt.*

VI. Abschnitt.

Die cubische Plancurve mit Doppelpunkt.

§ 52.

Die berücksichtigten fundamentalen Einzelbedingungen der C_3^4 und die Beziehungen zwischen ihnen.

Die drei *wesentlichen elementaren* Bedingungen bezeichnen wir auch hier mit μ, ν, ϱ, und zwar

1) mit μ die Bedingung, dass die Ebene der Plancurve durch einen gegebenen Punkt gehen soll,
2) mit ν die Bedingung, dass die Plancurve eine gegebene Gerade schneiden soll,
3) mit ϱ die Bedingung, dass die Plancurve eine gegebene Ebene berühren soll.

Durch diese drei Bedingungen lassen sich die *unwesentlichen* elementaren Bedingungen vermittelst der Incidenzformeln ausdrücken.

Man erhält, da unsere Plancurve von der *dritten* Ordnung und dem *vierten* Range ist, folgende Resultate.

1) Die Bedingung μ_g, die C_3^4 soll ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, hat den Modul:

$$\mu_g = \mu^2.$$

2) Die Bedingung M, die C_3^4 soll in einer gegebenen Ebene liegen, hat den Modul:

$$\mathsf{M} = \mu^3.$$

3) Die Bedingung P, die C_3^4 soll durch einen gegebenen Punkt gehen, hat den Modul:

$$P = \mu\nu - 3\mu^2.$$

4) Die Bedingung ϱ', die C_3^4 soll eine Tangente durch einen gegebenen Punkt schicken, hat den Modul:

$$\varrho' = 4\mu.$$

5) Die Bedingung t, die C_3^4 soll eine Tangente in einem gegebenen Strahlbüschel besitzen, hat den Modul:

$$t = \mu\varrho.$$

6) Die Bedingung T, die C_3^4 soll eine gegebene Gerade berühren, hat den Modul:

$$T = \mu^2\varrho - 4\mu^3.$$

Hiernach brauchen bei der Bestimmung der Anzahlen der C_3^4 von den elementaren Bedingungen nur

$$\mu,\ \nu,\ \varrho$$

berücksichtigt zu werden.

Was die *Singularitäten* der C_3^4 angeht, so bezeichnen wir immer mit

b ihren Doppelpunkt,
p jede ihrer beiden Doppelpunktstangenten,
f jede ihrer drei Wendetangenten,
v jeden ihrer drei Wendepunkte,
u jeden der drei Schnittpunkte zweier Wendetangenten,
s den Strahl, auf welchem die drei Wendepunkte liegen.

Dieselben Buchstaben, ohne oder mit Indices oder gross geschrieben, bezeichnen, wie immer, die fundamentalen Bedingungen, welche den obigen singulären Punkten und Strahlen angehören, z. B.

f_e die Bedingung, die C_3^4 soll eine ihrer drei Wendetangenten auf einer gegebenen Ebene haben,

p_s die Bedingung, die C_3^4 soll eine ihrer Doppelpunktstangenten in einem gegebenen Strahlbüschel haben,

V die Bedingung, die C_3^4 soll einen gegebenen Punkt als Wendepunkt haben.

Man könnte mit demselben Rechte, wie den Schnittpunkt zweier Wendetangenten, noch manche *andere* aus den Singularitäten hervor-

gehenden Punkte oder Strahlen *mit berücksichtigen*, wie etwa die Schnittpunkte der Doppelpunktstangenten mit den Wendetangenten, oder den Berührungspunkt der vom Wendepunkt ausgehenden, anderswo berührenden Tangente. Doch sind für unsere Zwecke nur die obigen 6 singulären Punkte und Strahlen wichtig, und diese sollen daher allein in den Kreis der Untersuchung gezogen werden.

Nach den Formeln des § 8. ist

$$b_g = b^2, \quad B = b^3.$$

Doch gelten nicht etwa die analogen Beziehungen bei v und u, weil *drei* Punkte v und *drei* Punkte u vorhanden sind. Ferner hat man nach § 8.:

$$s^2 = s_p + s_e, \quad s s_p = s_s = \tfrac{1}{2} s^3, \quad S = \tfrac{1}{2} s^4, \text{ etc.}$$

Nach den Incidenzformeln des § 9. und § 10. lassen sich dann auch die unwesentlichen singulären Bedingungen durch die wesentlichen ausdrücken, also:

$$\begin{aligned}
b^3 &= \mu b^2 - \mu^2 b + \mu^3,\\
V &= \mu v_g - \mu^2 v + 3\mu^3,\\
U &= \mu u_g - \mu^2 u + 3\mu^3,\\
p_p &= \mu p \;\; - 2\mu^2,\\
p_s &= \mu p_e - 2\mu^3,\\
P^{*)} &= \mu^2 p_e - \mu^3 p,\\
f_p &= \mu f \;\; - 3\mu^2,\\
f_s &= \mu f_e - 3\mu^3,\\
F &= \mu^2 f_e - \mu^3 f,\\
s_p &= \mu s \;\; - \mu^2,\\
s_s &= \mu s_e - \mu^3,\\
S &= \mu^2 s_e - \mu^3 s:
\end{aligned}$$

So ist das Problem der Bestimmung *aller* Anzahlen, welche sich auf die elementaren Bedingungen und auf b, p, f, v, u, s beziehen, zurückgeführt auf das Problem, alle diejenigen 11fachen Symbole numerisch zu bestimmen, welche aus den Potenzen von μ, ν, ϱ und aus gewissen Potenzen der Bedingungen:

$$b, \; b^2, \; p, \; p_e, \; v, \; v_g, \; f, \; f_e, \; u, \; u_g, \; s, \; s_e$$

zusammengesetzt sind.

---

*) Da das Symbol P für die Bedingung, eine gegebene Doppelpunktstangente zu haben, ausser an dieser Stelle nicht vorkommt, so ist eine Verwechselung mit dem Symbol P für die Bedingung, die Curve soll durch einen gegebenen Punkt gehen, nicht möglich.

Doch kann die Zahl der zu berechnenden Symbole noch weiter reducirt werden. Da nämlich die beiden Strahlen p durch den Punkt b gehen, so hat man nach der ersten Incidenzformel:

$$p_e = bp - 2b^2,$$

und da die drei Punkte v auf s liegen, so hat man auch:

$$v_g = sv - 3s_e.$$

Da ein ebenes Dreiseit die Constantenzahl 9 hat, so kann in den zu berechnenden 11fachen Symbolen die *Wendetangentenbedingung nullfach bis neunfach* sein. Doch ist schon in § 11. erläutert, dass bei einem in einem Träger liegenden Orte nullter Stufe a^{ten} Grades diejenigen zusammengesetzten Bedingungen, welche mehr als a symbolische Einzelbedingungen enthalten, ausdrückbar sind durch diejenigen Bedingungen, welche a oder weniger als a Einzelbedingungen enthalten, und durch die Grundbedingungen des Trägers. Es lässt sich also z. B. das sechsfache Symbol

$$f^4 f_e$$

ausdrücken durch

$$f_e^3,\ \mu f f_e^2,\ \mu^2 f^2 f_e,\ \mu^2 f_e^2,\ \mu^3 f^3,\ \mu^3 f f_e.$$

Das in § 11. zur Erläuterung gewählte Beispiel behandelt gerade *ein in der Ebene μ liegendes Dreiseit*, dessen Strahlen f heissen. Die letzten der dort gewonnenen Resultate finden also hier *unmittelbare Anwendung* und sollen deshalb an dieser Stelle noch einmal Platz finden. Wegen ihrer Herleitung vergleiche man § 11.

Reduction der Wendetangentenbedingungen.

1) $f^4 = 6f^2 f_e - 3f_e^2 - 22\mu f f_e + 6\mu f^3 + 30\mu^2 f_e - 21\mu^2 f^2 + 54\mu^3 f,$

2) $f^3 f_e = 3f f_e^2 + 6\mu f^2 f_e - 7\mu f_e^2 - 18\mu^2 f f_e - 3\mu^3 f^2 + 30\mu^3 f_e,$

3) $f^5 = 15 f f_e^2 + 50\mu f^2 f_e - 60\mu f_e^2 + 15\mu^2 f^3 - 210\mu^2 f f_e - 90\mu^3 f^2 + 360\mu^3 f_e,$

4) $f^2 f_e^2 = f_e^3 + 5\mu f f_e^2 - 10\mu^2 f_e^2 + \mu^2 f^2 f_e - \mu^3 f^3 - 8\mu^3 f f_e,$

5) $f^4 f_e = 3f_e^3 + 26\mu f f_e^2 + 21\mu^2 f^2 f_e - 72\mu^2 f_e^2 - 6\mu^3 f^3 - 102\mu^3 f f_e,$

6) $f^6 = 15 f_e^3 + 165\mu f f_e^2 + 195\mu^2 f^2 f_e - 545\mu^2 f_e^2 - 15\mu^3 f^3 - 990\mu^3 f f_e,$

7) $f f_e^3 = 3\mu f_e^3 + 3\mu^2 f f_e^2 - 3\mu^3 f^2 f_e - 12\mu^3 f_e^2,$

8) $f^3 f_e^2 = 8\mu f_e^3 + 21\mu^2 f f_e^2 - 6\mu^3 f^2 f_e - 66\mu^3 f_e^2,$

9) $f^5 f_e = 35\mu f_e^3 + 130\mu^2 f f_e^2 + 5\mu^3 f^2 f_e - 425\mu^3 f_e^2,$

10) $f^7 = 210\mu f_e^3 + 910\mu^2 f f_e^2 + 210\mu^3 f^2 f_e - 3150\mu^3 f_e^2,$

11) $f_e^4 = 6\mu^2 f_e^3 - 6\mu^3 f f_e^2,$

12) $f^2 f_e^3 = 12\mu^2 f_e^3 + 3\mu^3 f f_e^2,$

13) $f^4 f_e^2 = 45\mu^2 f_e^3 + 45\mu^3 f f_e^2,$

14) $f^6 f_e = 235\mu^2 f_e^3 + 345\mu^3 f f_e^2,$

15) $f^8 \quad = 1540\mu^2 f_e^3 + 2660\mu^3 f f_e^2,$

16) $f f_e^4 = 12\mu^3 f_e^3,$

17) $f^3 f_e^3 = 39\mu^3 f_e^3,$

18) $f^5 f_e^2 = 180\mu^3 f_e^3,$

19) $f^7 f_e = 1050\mu^3 f_e^3,$

20) $f^9 \quad = 7280\mu^3 f_e^3.$

In ähnlicher Weise lassen sich ausdrücken die Producte der Potenzen von u und u_g durch die Producte der Potenzen von μ mit

$$u,\ u_g,\ u^2,\ uu_g,\ u_g^2,\ u^3,\ u^2u_g,\ uu_g^2,\ u_g^3,$$

und ferner die Potenzen von v durch die Producte der Grundbedingungen von s mit

$$v,\ v^2,\ v^3,$$

z. B. $$v^7 = 175 S v^3 = 175(\mu^2 s_e - \mu^3 s)v^3.$$

Weitere Reductionen erhält man auch, indem man benutzt, dass jeder Punkt u auf zwei der drei Strahlen f liegt, und dass jeder Punkt v auf einem der drei Strahlen f liegt. Doch kommen im Folgenden nur die oben angegebenen Reductionen der Wendetangentenbedingungen zur Anwendung.

§ 53.

Formeln zwischen Bedingungen und Ausartungen bei der C_3^4.

Um Formeln erster Dimension für die C_3^4 zu gewinnen, setzen wir ein beliebiges einstufiges Curvensystem voraus, und wenden die verschiedenen Formen des Correspondenzprincips in der unten angegebenen Weise an. Von den Ausartungen berücksichtigen wir dabei von vornherein nur die beiden schon von Maillard und Zeuthen erkannten *Ausartungen nullter Gattung.* Alle Ausartungen höherer Gattung fassen wir wieder bei einer Formel mit der Nummer i) durch das Symbol α_i zusammen, da wir auf die Art der Zusammensetzung der Symbole α_i aus den verschiedenen Ausartungen erst später eingehen wollen.

Die beiden Ausartungen nullter Gattung bezeichnen wir mit χ und γ. Dieselben haben folgende Beschreibung.

Die Ausartung χ besteht aus einem Ordnungskegelschnitt k und einer Ordnungsgeraden a, welche k in zwei verschiedenen Punkten schneidet, von denen der eine b der Doppelpunkt, der andere e ein zweifacher Rangpunkt ist. Der Kegelschnitt k ist natürlich zugleich Rangkegelschnitt. Die Kegelschnitttangente in b ist die eine, die Ordnungsgerade ist die andere Doppelpunktstangente. Die drei Wendetangenten fallen sämmtlich in die Kegelschnitttangente, welche in e berührt, so dass die drei Wendepunkte mit e zusammenfallen.

Die Ausartung γ hat als Ordnungscurve *eine Curve* k *dritter Ordnung dritten Ranges.* Ihre Tangenten sind die Tangenten dieser Curve und die Strahlen des Strahlbüschels, welcher seinen Scheitel in der Spitze c der Curve hat. Der Doppelpunkt von γ fällt mit c und die beiden Doppelpunktstangenten mit der Rückkehrtangente q der Curve zusammen. Von den drei Wendetangenten fällt die eine mit der Wendetangente w von k, die beiden andern fallen mit q zusammen, so dass ein Wendepunkt in den Wendepunkt v von k fällt, zwei Wendepunkte mit c zusammenfallen und die Wendepunktsgerade s der Verbindungsstrahl z von s und v wird. Von den drei Punkten u fällt der eine in c und die beiden andern fallen in den Schnittpunkt y von w und q. *Man beachte, dass für die Curve* k *die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts beibehalten sind.*

Wir lassen nun 23 Formeln folgen, welche die 11 Zahlen

$$\mu,\ \nu,\ \varrho,\ b,\ f,\ p,\ v,\ u,\ s,\ \chi,\ \gamma$$

bei Voraussetzung eines elementaren einstufigen Systems mit einander verbinden, und fügen der rechten Seite die Symbole α hinzu, welche die Anzahlen der Ausartungen von höherer als der nullten Gattung *vorläufig* vertreten sollen. Zur Erläuterung der Entstehung dieser Formeln geben wir nur an, welche *Coincidenzen* bei jeder Formel gesucht werden, für den specielleren Fall, dass die Ebene des Curvensystems als *fest* angesehen wird.

Formeltabelle für die C_3^4.

1) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen der Doppelpunkt b auf einer Wendetangente f liegt, giebt:

$$3b + f = 3\mu + 3\gamma + \alpha_1.$$

2) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen ein v auf einem p liegt, giebt:

$$2v + 3p = 6\mu + \chi + 6\gamma + \alpha_2.$$

3) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen ein u auf einem p liegt, giebt:

$$2u + 3p = 6\mu + \chi + 5\gamma + \alpha_3.$$

4) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen b auf s liegt, giebt:

$$s + b = \mu + \gamma + \alpha_4.$$

5) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen ein u auf s liegt, giebt:

$$3s + u = 3\mu + 2\chi + \gamma + \alpha_5.$$

---

6) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden zwei zusammenfallen, giebt:

$$4\nu = \varrho + 6\mu + 2b + \alpha_6.$$

7) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den vier Tangenten aus einem beliebigen Punkte zwei zusammenfallen, giebt:

$$6\varrho = \nu + 3f + \chi + \alpha_7.$$

8) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen zwei Wendetangenten zusammenfallen, giebt:

$$4f = 6\mu + 2u + 2\chi + \gamma + \alpha_8.$$

9) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen zwei Wendepunkte zusammenfallen, giebt:

$$4v = 6s + 2\chi + 3\gamma + \alpha_9.$$

10) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen zwei Eckpunkte des Wendetangentendreiseits zusammenfallen, giebt:

$$4u = 2f + 2\chi + \gamma + \alpha_{10}.$$

11) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen die beiden Doppelpunktstangenten zusammenfallen, giebt:

$$2p = 2\mu + 2b + \gamma + \alpha_{11}.$$

---

12) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Tangenten aus einem beliebigen Punkte eine durch den Doppelpunkt geht, giebt:

$$\varrho + 4b = 2p + \gamma + \alpha_{12}.$$

13) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden einer auf einer Wendetangente liegt, giebt:

$$3\nu + 3f = 9\mu + 3v + \alpha_{13}.$$

14) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden einer auf einer Doppelpunktstangente liegt, giebt:

$$2\nu + 3p = 6\mu + 6b + \chi + \alpha_{14}.$$

15) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Tangenten aus einem beliebigen Punkte eine einen Punkt u enthält, giebt:

$$3\varrho + 4u = 4f + 2\chi + \gamma + \alpha_{15}.$$

16) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen von den Schnittpunkten mit einer beliebigen Geraden einer auf der Wendepunktsgeraden s liegt, giebt:

$$\nu + 3s = 3\mu + v + \alpha_{16}.$$

17) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen der Strahl s mit einem Strahl f zusammenfällt, giebt:

$$3s + f = 3\mu + v + \chi + \alpha_{17}.$$

---

18) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen auf einer aus einem beliebigen Punkte gezogenen Tangente der Berührungspunkt mit dem dritten Schnittpunkte zusammenfällt, giebt:

$$\varrho + 3\nu = 4\mu + f + p + \alpha_{18}.$$

19) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen auf der Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes mit dem Doppelpunkte dieser letztere mit dem dritten Schnittpunkte zusammenfällt, giebt:

$$b + \nu = \mu + p + \alpha_{19}.$$

20) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen die Tangente eines auf einer beliebigen Geraden erzeugten Schnittpunktes mit einer der beiden andern von diesem Schnittpunkte ausgehenden Tangenten zusammenfällt, giebt:

$$2\nu + 3\varrho = 6\mu + 2v + \alpha_{20}.$$

21) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen eine Wendetangente zusammenfällt mit einer der beiden andern Tangenten, die von dem Schnittpunkte der Wendetangente und einer beliebigen Geraden ausgehen, giebt:

$$2f + 3\varrho = 6\mu + 2v + 2\chi + \alpha_{21}.$$

22) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen die beiden anderswo berührenden Tangenten zusammenfallen, welche von einem Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden ausgehen, giebt:

$$2\nu + 2\varrho = 6\mu + 2b + 2\chi + \alpha_{22}.$$

23) Die Bestimmung der Zahl der Curven, bei denen die beiden von dem Schnittpunkte einer Wendetangente mit einer beliebigen Geraden ausgehenden, von dieser Wendetangente verschiedenen Tangenten zusammenfallen, giebt:

$$2f + 6\varrho = 6\mu + 6u + \alpha_{23}.$$

Von diesen 23 Formeln sind 11 in den allgemeinen Zeuthen'schen Formeln enthalten, die hier in § 35. auf Plancurven im Raume erweitert sind. Es folgen nämlich die hier mit den Nummern:

6), 7), 12), 13), 8), 18), 19), 20), 21), 22), 23)

versehenen Formeln bezüglich aus den Formeln, welche Zeuthen in § 24. der Alm. Eg. unter den Nummern:

3), 3'), 4), 5'), 8'), 9), 10), 9'), 11'), 12'), 14')

anführt.

Aus unsern 23 Formeln erhält man *mit* 15 *Bestätigungen* 8 *Hauptformeln*, welche jede der 8 Zahlen

$$\chi,\ \gamma,\ b,\ f,\ p,\ v,\ u,\ s$$

als *Function der drei elementaren Bedingungen:*

$$\mu,\ \nu,\ \varrho$$

und gewisser der Zahlen α ausdrücken. Die letztern fassen wir *vorläufig* durch die Symbole

$$\alpha_\chi, \quad \alpha_\gamma, \quad \alpha_b, \quad \alpha_f, \quad \alpha_p, \quad \alpha_v, \quad \alpha_u, \quad \alpha_s$$

zusammen.

Tabelle der 8 Hauptformeln.

24) $3\varrho - 2\nu = 2\chi + \alpha_\chi,$

25) $2\nu - 4\mu = \gamma + \alpha_\gamma,$

26) $2\nu - \frac{1}{2}\varrho - 3\mu = b + \alpha_b,$

27) $\frac{3}{2}\varrho = f + \alpha_f,$

28) $3\nu - \frac{1}{2}\varrho - 4\mu = p + \alpha_p,$

29) $\nu + \frac{3}{2}\varrho - 3\mu = v + \alpha_v,$

30) $\frac{3}{2}\varrho - \mu = u + \alpha_u,$

31) $\frac{1}{2}\varrho = s + \alpha_s.$

§ 54.

Erzeugung und Beschreibung von Ausartungen der C_3^4.

Einen Theil der Ausartungen der C_3^4 von höherer als der nullten Gattung kann man durch *homographische Abbildung der allgemeinen Curve* gerade so erzeugen, wie dies in § 41. für die Ausartungen der C_3^3 gezeigt ist.

Das Centrum der Homographie sei wieder S, die Axe der Homographie sei r, und das constante Doppelverhältniss λ habe entweder den Werth 0 oder ∞, je nachdem der Punkt S oder die Axe r alle möglichen Lagen zur allgemeinen Curve einnehmen soll. Die Beschreibung der so gewonnenen Ausartungen folgt hier zugleich mit Angabe der a posteriori bestimmten, später auftretenden *Stammzahlen.*

1) Die Axe r habe eine beliebige Lage zur allgemeinen Curve, das Centrum S ebenfalls, und λ sei gleich ∞. Dann erhält man *die Ausartung* τ mit folgender Definition. τ besteht aus drei Ordnungsgeraden a, welche sich in einem vierfachen Rangpunkte e schneiden. Die drei Wendetangenten f, die beiden Doppelpunktstangenten p und die Wendepunktsgerade s sind 6 durch e gehende, unter einander und von den Ordnungsgeraden verschiedene Strahlen, so dass der Doppelpunkt b, die drei Wendepunkte v und die drei Wendetangentenschnittpunkte u im Punkte e coincidiren. *Die ganze Ausartung ist endlichdeutig bestimmt, sobald* 5 *von den* 9 *Strahlen durch e gegeben sind.* Bezeichnet man mit a_2 resp. a_3 die Bedingungen, dass von den Ordnungsgeraden zwei resp. drei verschiedene zwei resp. drei gegebene Geraden schneiden, und bezeichnet man ferner mit f_2 resp. f_3 die analogen Bedingungen für die drei Wendetangenten, so kann man die vom Verfasser bestimmten Stammzahlen in folgender Weise angeben:

$$\tau\mu^3 e^2 a_3 f_2 = 9\,, \quad \tau\mu^3 e^2 a_2 f_3 = 9\,,$$
$$\tau\mu^3 e a_3 f_3 = 27\,, \quad \tau\mu e^3 a_3 f_3 = 54\,.$$

2) Die Axe r sei eine beliebige Tangente, S sei ein beliebiger Punkt, und λ sei $= \infty$. Dann erhält man *die Ausartung* δ mit folgender Definition. δ besteht aus einer einfachen Ordnungsgeraden a und einer zweifachen Ordnungsgeraden g, welche sich in einem dreifachen Rangpunkte e schneiden. Auf g liegt ein einfacher Rangpunkt d. Die drei Wendetangenten f, die beiden Doppelpunktstangenten p und die Wendepunktsgerade s sind 6 Strahlen durch e, welche unter einander und von a und g verschieden sind, so dass b, die drei v und die drei u in e coincidiren. *Das ganze Strahlenoctupel durch e ist endlichdeutig bestimmt, sobald 4 von den 8 Strahlen gegeben sind.* Diese Lagebeziehung wird durch gewisse Stammzahlen charakterisirt, von denen der Verfasser die folgenden bestimmt hat. f_2 und f_3 haben dieselbe Bedeutung wie bei τ.

$$\delta\mu^3 e^2 a g f_2 = 3, \quad \delta\mu^3 e^2 g f_3 = 1, \quad \delta\mu^3 e^2 a f_3 = 4, \quad \delta\mu^3 e a g f_3 = 7,$$
$$\delta\mu e^3 a g f_3 = 16.$$

3) Die Axe r sei eine der drei Wendetangenten, S liege beliebig, λ sei $= \infty$. Dann erhält man *die Ausartung* ζ mit folgender Beschreibung. ζ besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g, auf welcher zwei zweifache Rangpunkte liegen, von denen der eine zugleich Doppelpunkt ist. Letzterer soll daher b, der andere Rangpunkt e heissen. Durch b gehen die beiden Doppelpunktstangenten p und zwei Wendetangenten f, welche vier Strahlen unter einander und von g verschieden sind, so dass im Punkte b zugleich zwei Punkte v und ein Punkt u liegen. Die dritte Wendetangente geht durch e und ist von g verschieden, so dass der dritte Punkt v mit e coincidirt. Diese dritte Wendetangente schneidet die beiden andern in den beiden andern Punkten u. Der Strahl s coincidirt mit g. Das durch b gehende *Strahlenquintupel ist endlichdeutig bestimmt, sobald 3 von den 5 Strahlen gegeben sind, und zwar eindeutig, wenn g und die beiden f gegeben sind.*

4) Die Axe r sei ein beliebiger, durch den Doppelpunkt gehender Strahl, S liege beliebig und λ sei gleich ∞. Dann erhält man *die Ausartung* $\varkappa$ mit folgender Beschreibung. $\varkappa$ besteht aus einer zweifachen Ordnungsgeraden g und einer einfachen Ordnungsgeraden a, welche sich in einem vierfachen Rangpunkte e schneiden. Der Doppelpunkt b ist ein von e verschiedener Punkt auf g, so dass die beiden Doppelpunktstangenten p mit g coincidiren. Die drei Wendetangenten f und die Wendepunktsgerade s sind vier durch e gehende, unter einander und von a und g verschiedene Strahlen, so dass die drei Punkte v und die drei Punkte u in e coincidiren. *Das Strahlensextupel durch e ist*

endlichdeutig bestimmt, sobald 4 *von den* 6 *Strahlen gegeben sind*, und zwar ist, wenn f_2 und f_3 dieselbe Bedeutung wie bei δ haben, genau wie dort:

$$\varkappa\mu^3e^2agf_2 = 3, \quad \varkappa\mu^3e^2gf_3 = 1, \quad \varkappa\mu^3e^2af_3 = 4, \quad \varkappa\mu^3eagf_3 = 7.$$

5) Das Centrum S sei der Schnittpunkt zweier Wendetangenten, die Axe r liege beliebig und λ sei gleich 0. Dann erhält man *die Ausartung* ζ' mit folgender Beschreibung. ζ' besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g, auf welcher zwei zweifache Rangpunkte e und e' liegen. Durch e geht eine nicht mit g zusammenfallende Wendetangente, ebenso durch e'. Die dritte Wendetangente fällt mit g zusammen, ihr Wendepunkt ist ein von e und e' verschiedener Punkt auf g; die beiden andern Wendepunkte müssen mit e und e' coincidiren, ebenso zwei von den drei Punkten u. Der Doppelpunkt b ist ein von den drei übrigen ausgezeichneten Punkten verschiedener Punkt auf g, so dass die beiden Doppelpunktstangenten mit g coincidiren. Das Punktquadrupel auf g ist *endlichdeutig bestimmt, wenn von den* 4 *Punkten* 3 *gegeben sind, und zwar eindeutig sowohl wenn* e, e', b, *wie auch wenn* e, e', v *gegeben sind.*

6) Das Centrum S liege beliebig, ebenso die Axe r, und λ sei gleich 0. Dann erhält man *die Ausartung* ε mit folgender Beschreibung. ε besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g, auf welcher 4 einfache Rangpunkte d liegen. Die drei Wendepunkte v, die drei Punkte u und der Doppelpunkt b sind 7 unter einander und von den 4 Rangpunkten d verschiedene Punkte, so dass die drei f, die beiden p und der Strahl s mit g coincidiren. *Die* 11 *auf* g *liegenden Punkte sind in ihrer Lage derartig von einander abhängig, dass ihre Gesammtheit endlichdeutig bestimmt ist, sobald* 5 *von ihnen gegeben sind.* Von den Zahlen, welche diese Abhängigkeit charakterisiren, hat der Verfasser nur die folgenden bestimmt. d_3 resp. d_4 bezeichne, dass von den 4 Rangpunkten 3 resp. 4 verschiedene auf gegebenen Ebenen liegen sollen.

$$\varepsilon\mu^3g_ed_4b = 12, \quad \varepsilon\mu^3g_ed_4v = 12, \quad \varepsilon\mu^3g_ed_3bv = 18, \quad \varepsilon\mu^3g_ed_4bv = 60.$$

7) Das Centrum S sei ein Punkt der Curve, die Axe r liege beliebig, und λ sei gleich 0. Dann erhält man *die Ausartung* ϑ mit folgender Beschreibung. ϑ besteht aus einer einfachen Ordnungsgeraden a und einer zweifachen Ordnungsgeraden g, welche sich in einem zweifachen Rangpunkte e schneiden. Auf g liegen zwei einfache Rangpunkte d, die drei Punkte v, die drei Punkte u und der Doppelpunkt b, so dass in g die drei f, die beiden p und s coincidiren. *Die* 10 *auf* g *liegenden Punkte sind in ihrer Lage derartig von einander abhängig, dass ihre Gesammtheit endlichdeutig bestimmt ist, wenn* 4 *von ihnen gegeben sind.* Von den Zahlen, welche diese Abhängigkeit charakterisiren, hat der Verfasser die folgenden bestimmt. d_2 resp. d_1 bezeichne,

dass jeder der beiden Rangpunkte resp. dass einer von ihnen auf einer gegebenen Ebene liege.

$$\vartheta\mu^3 g_e e d_2 b = 1, \quad \vartheta\mu^3 g_e e d_2 v = 2, \quad \vartheta\mu^3 g_e e d_1 b v = 2,$$
$$\vartheta\mu^3 g_e d_2 b v = 1, \quad \vartheta\mu^3 g e d_2 b v = 5.$$

8) Das Centrum S sei ein beliebiger Punkt auf einer der drei Wendetangenten, die Axe r liege beliebig, und λ sei gleich 0. Dann erhält man *die Ausartung* η' mit folgender Beschreibung. η' besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g, auf welcher ein doppelter Rangpunkt e und zwei einfache Rangpunkte d liegen. Durch e geht eine nicht mit g zusammenfallende Wendetangente, so dass in e ein Wendepunkt liegt. Die beiden andern Wendepunkte sind zwei von den Rangpunkten verschiedene Punkte auf g, so dass in g zwei Wendetangenten coincidiren. Von den drei Punkten u fallen also zwei in e, und einer liegt auf g, verschieden von den andern ausgezeichneten Punkten. Auch der Doppelpunkt liegt auf g, ohne mit einem der eben erwähnten Punkte zu coincidiren. Hiernach müssen auch der Strahl s und die beiden p mit g coincidiren. *Die* 7 *ausgezeichneten Punkte liegen auf g derartig, dass ihre Gesammtheit durch* 4 *von ihnen endlichdeutig bestimmt wird, z. B. dreideutig, wenn der doppelte Rangpunkt, die beiden einfachen Rangpunkte und der Doppelpunkt gegeben ist.*

9) Das Centrum S sei ein Wendepunkt, die Axe r liege beliebig und λ sei gleich 0. Dann erhält man *die Ausartung* δ' mit folgender Definition. δ' besteht aus einer einfachen Ordnungsgeraden a und einer doppelten Ordnungsgeraden g, welche sich in einem dreifachen Rangpunkte e schneiden. Ausserdem liegen auf g, getrennt von einander, der einfache Rangpunkt d, der Doppelpunkt b, einer der drei Punkte u und ein Punkt v_2, welcher zwei Wendepunkte in sich vereinigt, so dass in g zwei Wendetangenten coincidiren. Die dritte Wendetangente coincidirt mit a, und ihr Wendepunkt v ist ein von e verschiedener Punkt auf ihr. Die beiden p fallen mit g, die beiden andern u mit e zusammen. Der Strahl s verbindet v_2 mit v. *Die Gesammtheit der* 5 *auf g liegenden ausgezeichneten Punkte wird durch* 3 *von ihnen endlichdeutig bestimmt, z. B. eindeutig, wenn e, d, b, v gegeben ist.*

10) Das Centrum S sei der Doppelpunkt, die Axe r liege beliebig und λ sei gleich 0. Dann erhält man *die Ausartung* ψ mit folgender Beschreibung. ψ besteht aus drei einfachen, sich in drei verschiedenen Punkten schneidenden Ordnungsgeraden. Von diesen drei Schnittpunkten sind zwei zweifache Rangpunkte, sie mögen e und e' heissen, der dritte Schnittpunkt ist der Doppelpunkt b, so dass die beiden p in die beiden b anliegenden Ordnungsgeraden fallen. Auf der dritten,

e und e' verbindenden Ordnungsgeraden g liegen getrennt von einander die drei Punkte v und die drei Punkte u, so dass sowohl die drei f, als auch der Strahl s mit g coincidiren. *Die Gesammtheit der* 8 *auf g liegenden Punkte ist durch* 3 *von ihnen endlichdeutig bestimmt*, z. B. eindeutig, wenn e, e' und einer der drei Punkte v gegeben ist.

Ausser den eben beschriebenen 10 Ausartungen lassen sich noch einige andere durch homographische Abbildung erzeugen. Auf diese gehen wir nicht näher ein. Doch besitzt die C_3^4 auch Ausartungen, welche in fundamentalen Systemen auftreten, aber dennoch *nicht* nach unserer Methode aus der allgemeinen C_3^4 gewonnen werden können. Von diesen Ausartungen brauchen wir für unsere Zwecke nur eine. Sie ist durch die folgende, vom Verfasser a posteriori erkannte Beschreibung definirt.

11) *Die Ausartung* η besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden g, auf welcher ein zweifacher Rangpunkt e, zwei einfache Rangpunkte d und ein Wendepunkt v liegen, so dass eine Wendetangente mit g zusammenfällt. Die beiden andern Wendetangenten und die beiden Doppelpunktstangenten sind Strahlen durch e, so dass in e der Doppelpunkt, zwei Wendepunkte und die drei Punkte u vereinigt liegen. Der Strahl s coincidirt also mit g. *Das ganze Gebilde ist eindeutig bestimmt, wenn die Lage der Ordnungsgeraden, der Rangpunkte und der beiden nicht mit g coincidirenden Wendetangenten gegeben sind.*

Von den eben beschriebenen 11 Ausartungen sind

1) *erster Gattung:* ε, ϑ, ψ;
2) *zweiter Gattung:* τ, δ, δ', η, η',
3) *dritter Gattung:* ζ, ζ', $\varkappa$.

Die mit denselben Buchstaben bezeichneten, nur durch das Stricheln derselben unterschiedenen Ausartungen stimmen im Ort ihrer Punkte und ihrer Tangenten genau überein. Diejenigen Systeme, zu deren Bestimmung ausser elementaren Bedingungen *nur* Wendetangentenbedingungen gegeben sind, enthalten von den obigen Ausartungen nur folgende vier:

$$\tau, \; \delta, \; \eta, \; \zeta.$$

A posteriori erkennt man ferner, dass diese vier und die beiden Ausartungen nullter Gattung χ und γ die *einzigen* Ausartungen sind, welche in solchen Systemen vorkommen können.

§ 55.

Einführung der Ausartungszahlen in die Formeln des § 53.

Bei jeder der 10 Ausartungen, welche in § 54. durch homographische Abbildung erzeugt sind, lässt sich aus der hinzugefügten Beschreibung leicht erkennen, ob diese Ausartung mit dem Coefficienten

Null oder mit einem von Null verschiedenen Coefficienten in die ersten 23 Formeln des § 53. eintritt, im letzteren Falle bisweilen auch, mit welchem Coefficienten, oder wenigstens doch, ob der Coefficient durch 2 oder 3 theilbar sein muss. Dieser Umstand reicht vollkommen zur Bestimmung *sämmtlicher Coefficienten* in den 23 Gleichungen aus, da diese ja nur 8 von einander unabhängige repräsentiren. Man erhält so für die 23 mal 10 Coefficienten die folgende Tabelle, aus welcher man die Coefficienten nach der Regel ablese, dass *jede Zahl α gleich der Summe der 10 Producte ist, deren jedes einen in derselben Horizontalreihe stehenden Coefficienten zum einen Factor und diejenige Ausartungszahl zum andern Factor hat, welche mit diesem Coefficienten in derselben Verticalreihe steht.*

Tabelle der Coefficienten der Ausartungszahlen in den ersten 23 Formeln des § 53.

	τ	δ	ζ	ζ'	ε	ϑ	ψ	δ'	η'	$\varkappa$
α_1	3	3	2	1	3	3	0	1	2	0
α_2	6	6	4	6	6	6	0	2	6	6
α_3	6	6	2	4	6	6	0	3	6	6
α_4	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
α_5	3	3	1	2	3	3	3	0	3	3
α_6	0	1	2	6	6	2	0	1	6	2
α_7	12	6	3	6	0	1	2	2	3	12
α_8	0	0	0	0	6	6	6	1	2	0
α_9	6	6	2	0	0	0	0	1	0	6
α_{10}	3	6	0	0	0	0	0	1	2	6
α_{11}	0	0	0	2	2	2	0	1	2	2
α_{12}	4	3	2	0	0	0	0	0	0	0
α_{13}	0	0	0	3	9	6	3	3	6	0
α_{14}	0	0	0	6	6	4	2	2	6	6
α_{15}	12	9	2	4	0	0	0	2	4	12
α_{16}	0	0	1	3	3	2	1	0	3	0
α_{17}	0	0	0	1	3	3	3	0	2	0
α_{18}	4	3	3	6	4	1	0	1	5	4
α_{19}	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
α_{20}	6	3	2	6	6	4	2	3	6	6
α_{21}	6	3	0	2	6	6	6	3	4	6
α_{22}	6	4	2	6	6	4	4	2	6	8
α_{23}	6	0	4	8	6	6	6	2	4	6

Aus diesen Coefficienten erhält man mit vielen Bestätigungen die Zusammensetzung der in § 53. mit

$$\alpha_\chi,\ \alpha_\gamma,\ \alpha_b,\ \alpha_f,\ \alpha_p,\ \alpha_v,\ \alpha_u,\ \alpha_s$$

bezeichneten Zahlen. Jeder dieser 8 Zahlen fügen wir das a posteriori bestimmte Vielfache der Ausartung η hinzu. Dann erhalten wir die folgenden 8 Hauptformeln, welche für alle Systeme gelten, in denen keine andern als die oben beschriebenen Ausartungen vorkommen.

$$1)\quad 3\varrho - 2\nu = 2\chi + 6\tau + 3\delta + 2\vartheta + 4\psi + 1\delta' + 6\varkappa,$$

$$2)\quad 2\nu - 4\mu = \gamma + 2\tau + 2\delta + 6\eta + 2\zeta + 4\zeta' + 4\varepsilon + 2\vartheta + 1\delta' + 4\eta' + 2\varkappa,$$

$$3)\quad 2\nu - \tfrac{1}{2}\varrho - 3\mu = b + \tfrac{1}{2}\delta + 3\eta + \zeta + 3\zeta' + 3\varepsilon + 1\vartheta + \tfrac{1}{2}\delta' + 3\eta' + 1\varkappa,$$

$$4)\quad \tfrac{3}{2}\varrho = f + 3\tau + \tfrac{3}{2}\delta + 2\eta + 1\zeta + 2\zeta' + \tfrac{1}{2}\delta' + 1\eta' + 3\varkappa,$$

$$5)\quad 3\nu - \tfrac{1}{2}\varrho - 4\mu = p + 5\tau + \tfrac{3}{2}\delta + 6\eta + 2\zeta + 4\zeta' + 4\varepsilon + 1\vartheta + \tfrac{1}{2}\delta' + 4\eta' + 1\varkappa,$$

$$6)\quad \nu + \tfrac{3}{2}\varrho - 3\mu = v + 3\tau + \tfrac{3}{2}\delta + 3\eta + 1\zeta + 3\zeta' + 3\varepsilon + 2\vartheta + 1\psi + \tfrac{3}{2}\delta' + 3\eta' + 3\varkappa,$$

$$7)\quad \tfrac{3}{2}\varrho - \mu = u + 2\tau + \tfrac{1}{2}\delta + 1\eta + 1\zeta + 2\zeta' + 1\varepsilon + 1\vartheta + 1\psi + \tfrac{1}{2}\delta' + 1\eta' + 2\varkappa,$$

$$8)\quad \tfrac{1}{2}\varrho = s + 1\tau + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta' + 1\varkappa.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man zu sehr vielen Fundamentalzahlen der C_3^4 gelangen, vorausgesetzt, dass für sehr viele Systeme die Anzahlen der $2+11$ berücksichtigten Ausartungen berechnet vorliegen. Die Berechnung der Ausartungsanzahlen ist daher unser nächstes Ziel.

§ 56.

Die Berechnung und die Tabellen der Ausartungsanzahlen.

Durch die in § 53. und § 54. gegebene Beschreibung der Ausartungen der C_3^4 ist zugleich festgestellt, in welcher Weise dieselben jede der fundamentalen Bedingungen zu erfüllen vermögen. Daher lässt sich die Zahl, welche angiebt, wie oft eine gewisse Ausartung α eine gegebene 10-fache fundamentale Bedingung erfüllt, durch die Anzahlen ihrer *Theilgebilde* resp. durch die in § 54. mitgetheilten *Stammzahlen* ausdrücken. Die Theilgebilde der 11 Ausartungen von höherer als der nullten Gattung sind nur Punkt, Strahl und Ebene, zu den Theilgebilden von χ gehört ausserdem auch der Kegelschnitt,

und zu den Theilgebilden von γ die cubische Plancurve C_3^3 mit Spitze. Die zur Berechnung der Zahlen χ nöthigen Kegelschnittzahlen sind in § 36. und § 37. bestimmt, und die zur Berechnung der Zahlen γ erforderlichen, auf die C_3^3 bezüglichen Anzahlen sind im vorigen Abschnitt ausführlich abgeleitet. *Damit ist die Berechnung aller fundamentalen Anzahlen der* 13 *Ausartungen theoretisch geleistet.*

Die numerische Ausrechnung lässt sich in derselben Weise, wie dies bei den Plancurven C_3^3 in den §§ 44. bis 47. ausführlich gezeigt ist, *zweckmässig und übersichtlich einrichten.* Es wird daher genügen, wenn wir hier nur einige Beispiele für die Ausrechnung geben. Dabei sind, der späteren Anwendung wegen, die auf die Wendetangenten bezüglichen Bedingungen vor den übrigen Singularitätenbedingungen bevorzugt.

1) Beispiele für die χ.

a) $\chi\nu^6\varrho^4 = \chi(n+a)^6(r+2e)^4$, wo n resp. r die Bedingung bezeichnet, welche χ dadurch erfüllt, dass sein Kegelschnitt eine gegebene Gerade schneidet, resp. eine gegebene Ebene berührt. Man hat daher:

$$\begin{aligned}\chi\nu^6\varrho^4 &= 4_0\cdot 2^0\cdot 2\cdot[6_4\cdot 2\cdot 16+6_3\cdot 2\cdot 48+6_2\cdot 64]\\ &+4_1\cdot 2^1\cdot[6_4\cdot 2\cdot 16+6_3\cdot 2\cdot 72+6_2\cdot(72\cdot 2+104)+6_1\cdot 104\cdot 2]\\ &+4_2\cdot 2^2\cdot[6_3\cdot 2\cdot 16+\tfrac{1}{2}\cdot(76+28)+6_1\cdot 128]\\ &+4_3\cdot 2^3\cdot[6_2\cdot 10+6_1\cdot 24]\\ &=\mathbf{153984}.\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\chi p\mu^3\nu^6 &= 6_2\cdot(1+2)+6_1\cdot(1\cdot 2+1\cdot 2)\\ &=\mathbf{69}.\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\chi f_e f_e b^2\mu\varrho^3 &= 3^1\cdot[3_0\cdot 2^0\cdot 2+3_1\cdot 2^1\cdot 2]\\ &=\mathbf{42}.\end{aligned}$$

2) Beispiele für die γ.

a) $\gamma\nu^6\varrho^4=\gamma\nu^6(\varrho+c)^4$, wo das ϱ resp. das c rechts vom Gleichheitszeichen die Bedingung bedeutet, dass die Plancurve C_3^3, welche γ angehört, eine gegebene Ebene berühre, resp. ihre Spitze in einer gegebenen Ebene habe. Also

$$\begin{aligned}\gamma\nu^6\varrho^4 &= \gamma\nu^6\varrho^4+4_1\cdot\gamma\nu^6\varrho^3c+4_2\cdot\gamma\nu^6\varrho^2c^2+4_3\cdot\gamma\nu^6\varrho c^3\\ &=43104+4_1\cdot 25560+4_2\cdot 4592+4_3\cdot 264\\ &=\mathbf{173952}.\end{aligned}$$

b) Ueberhaupt hat man, wenn man für die Bedingungen, welche sich auf die γ angehörige C_3^3 beziehen, rechts dieselben Symbole, wie im vorigen Abschnitt setzt:

$$\gamma b=\gamma c,\qquad \gamma f=\gamma(w+2q),\qquad \gamma s=\gamma z,$$
$$\gamma v=\gamma(c+2v),\qquad \gamma p=2\gamma q,\qquad \gamma u=\gamma(c+2y).$$

c) $\gamma f_e f \mu^3 \nu^2 \varrho^2 = \gamma(w_e + 2q_e)(w+2q)\mu^3\nu^2(\varrho+c)^2$
$= 2\gamma q w_e(\varrho^2 + 2\varrho c + c^2)\mu^3\nu^2 + 2\gamma q_e w(\varrho^2 + 2c\varrho)\mu^3\nu^2$
$= 2\cdot(27 + 2\cdot 18 + 3) + 2\cdot(36 + 2\cdot 9)$
$= \mathbf{240}.$

d) $\gamma b f \mu^3 \nu^5 = \gamma c(w+2q)\mu^3\nu^5$
$= 52 + 2\cdot 7$
$= \mathbf{66}.$

3) Beispiele für die τ.

a) $\tau f^2 \mu \nu^6 \varrho = 1_1 \cdot 4^1 \cdot [15\cdot 2 + 60\cdot 4 + 15\cdot 6]$
$= \mathbf{1440}.$

b) $\tau f_e^3 \nu^1 = 3\cdot 6\cdot 9 + 3\cdot 9 + 6\cdot(27-9)$
$= \mathbf{297}.$

c) $\tau b^2 f^3 \mu^2 \nu^2 \varrho = 4^1\cdot 9$
$= \mathbf{36}.$

4) Beispiele für die δ.

a) $\delta \nu^7 \varrho f^2 = \delta(a+2g)^7 d f^2$
$= 7_3\cdot 2^3\cdot 2A\cdot 2g_s d f^2 + 7_4\cdot 2^4\cdot 2a_s\cdot 2G d f^2$
$= 7_3\cdot 2^3\cdot 2\cdot 2\cdot 3 + 7_4\cdot 2^4\cdot 2\cdot 2\cdot 3$
$= \mathbf{10080}.$

b) $\delta u^2 v f^3 \mu^2 \nu \varrho = 3^2\cdot 3^1\cdot \delta e^3 \mu^2 (a+2g) d f^2$
$= 27\,(4 + 2\cdot 1)$
$= \mathbf{162}.$

c) $\delta \varrho^6 f^4 = \delta(d+3e)^6 f^4 = 6_3\cdot 3^3\cdot 6\cdot 1$
$= \mathbf{3240}.$

5) Beispiele für die η.

a) $\eta\mu\nu\varrho^6 f^2 = 3^1\cdot \eta\mu g\varrho^6 f^2$
$= 3^1\,[6_1\cdot 2^1\cdot 10 + 6_2\cdot 2^2\,(4+3\cdot 2) + 6_3\cdot 2^3\cdot 3]$
$= \mathbf{3600}.$

b) $\eta\mu^3\nu\varrho^3 f_3$, wo f_3 bedeuten mag, dass von den 3 Wendetangenten jede eine gegebene Gerade schneidet, ist gleich

$$3^1\cdot 3\cdot \eta\mu^3 g\cdot f^2 g\varrho^3 = 3^1\cdot 3\cdot(3_1\cdot 2^1) = \mathbf{36}.$$

6) Beispiel für die ζ.

$\zeta f_e^3 \nu \varrho^3 = 3^1\cdot 2^3\cdot \zeta f_e^3 g(b+e)^3$
$= 3^1\cdot 2^3\cdot 3\cdot(3\cdot 1 + 1)$
$= \mathbf{288}.$

7) Beispiel für die ζ'.

$$\zeta' \mu^3 f_e^3 b = 3 \cdot 1 = \mathbf{3}.$$

8) Beispiel für die ε.

$$\begin{aligned}\varepsilon \mu \varrho^8 b &= \left(8_3 \cdot 5_3 \cdot 2_1 \cdot 1_1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + 8_3 \cdot 5_2 \cdot 3_2 \cdot 1_1 \cdot \tfrac{1}{2} + 8_2 \cdot 6_2 \cdot 4_2 \cdot 2_2 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right) \cdot 12 \\ &= (280 + 840 + 105) \cdot 12 \\ &= \mathbf{14700}.\end{aligned}$$

9) Beispiel für die ϑ.

$$\begin{aligned}\vartheta \mu^3 \nu^4 \varrho b v &= \vartheta \mu^3 (2g + a)^4 \varrho b v \\ &= 4_2 \cdot 2^2 \cdot \vartheta \mu^3 g_e a_e \varrho b v \\ &= 4_2 \cdot 2^2 \cdot 2 = \mathbf{48}.\end{aligned}$$

10) Beispiele für die ψ.

a) $\psi \mu^3 \nu^4 b^2 v = 4_2 \cdot 1 = \mathbf{6}$.

b) $\psi \mu^3 \nu^3 \varrho^2 v_g = [3_1 \cdot 2 + 3_0 \cdot 3 \cdot (2_2 + 2_1)] \cdot 2^2 = \mathbf{60}$.

11) Beispiel für die δ'.

$$\delta' \mu^3 \varrho^4 b v_g = 4_2 \cdot 3^2 = \mathbf{54}.$$

12) Beispiel für die η'.

$$\eta' \mu^3 \nu^2 \varrho^3 b f = 3^2 \cdot [3_1 \cdot 2^1] \cdot 3 = \mathbf{162}.$$

13) Beispiel für die $\varkappa$.

$$\varkappa f_e f b \mu^3 \nu^2 \varrho = 4^1 \cdot [2_1 \cdot 2^1] \cdot 3 = \mathbf{48}.$$

Hieran schliessen wir einige *Tabellen von Ausartungsanzahlen*, und zwar namentlich von solchen, aus denen die vom Verfasser berechneten, auf die C_3^4 bezüglichen Anzahlen hervorgehen. *In jeder Reihe bezeichnet die einer α-fachen Bedingung nachgesetzte i^{te} Zahl die Anzahl derjenigen Ausartungen, welche diese Bedingung erfüllen, $i-1$ gegebene Ebenen berühren und $11-\alpha-i$ gegebene Gerade schneiden.*

Tabelle von Zahlen χ.

$\chi\mu^3 = 42, 114, 260, 480, 588, 422, 144, 0.$

$\chi\mu^2 = 672, 1652, 3424, 5840, 7264, 6452, 3952, 1344, 0.$

$\chi\mu = 5640, 12568, 23632, 36864, 44040, 39820, 26968, 13452, 4224, 0.$

$\chi = 31320, 62160, 103328, 141792, 153984, 130960, 86560, 44088, 16072, 3984, 0.$

$\chi\mu^3 f = 171, 390, 720, 882, 633, 216, 0.$

$\chi\mu^2 f = 2478, 5136, 8760, 10896, 9678, 5928, 2016, 0.$

$\chi\mu f = 18852, 35448, 55296, 66060, 59730, 40452, 20178, 6336, 0.$

$\chi f = 93240, 160992, 212688, 230976, 196440, 129840, 66132, 24108, 5976, 0.$

$\chi\mu^3 f_e$ = 60, 108, 126, 87, 27, 0.
$\chi\mu^2 f_e$ = 777, 1290, 1536, 1320, 783, 252, 0.
$\chi\mu f_e$ = 5292, 8034, 9240, 8118, 5364, 2592, 774, 0.
χf_e = 22860, 30492, 32064, 26580, 17154, 8460, 2922, 684, 0.
$\chi\mu^3 e f_e$ = 12, 18, 12, 3, 0.
$\chi\mu^2 e f_e$ = 165, 240, 216, 126, 36, 0.
$\chi\mu e f_e$ = 1128, 1500, 1368, 888, 405, 108, 0.
$\chi e f_e$ = 4662, 5334, 4500, 2832, 1314, 402, 84, 0.
$\chi\mu^3 e b^2$ = 6, 12, 20, 33, 36.
$\chi\mu^3 b v$ = 87, 168, 312, 420, 330, 132.
$\chi\mu^3 b^2 v$ = 18, 36, 72, 108, 108.
$\chi\mu^3 b v_g$ = 18, 30, 48, 36, 12.
$\chi\mu^3 b^2 v_g$ = 3, 6, 12, 12.
$\chi\mu^3 p$ = 69, 212, 492, 894, 1115, 894, 432.

Tabelle von Zahlen γ.

$\gamma\mu^3$ = 24, 72, 200, 480, 960, 1424, 1512, 1200.
$\gamma\mu^2$ = 384, 1040, 2592, 5600, 10240, 14744, 17440, 16512, 12800.
$\gamma\mu$ = 3216, 7872, 17600, 34112, 56320, 76896, 87152, 83520, 70032, 52320.
γ = 17760, 38560, 75072, 124800, 173952, 203840, 204320, 179712, 142720, 105312, 75520.
$\gamma\mu^3 f_e$ = 42, 108, 216, 312, 324, 252.
$\gamma\mu^2 f_e$ = 540, 1236, 2256, 3216, 3672, 3420, 2616.
$\gamma\mu f_e$ = 3648, 7416, 12216, 16368, 18216, 17208, 14256, 10536.
γf_e = 15552, 26736, 37056, 42816, 42336, 36792, 28896, 21096, 14976.
$\gamma\mu^3 f^2$ = 180, 504, 1188, 1962, 2214, 1800.
$\gamma\mu^2 f^2$ = 2592, 6480, 13728, 22284, 27864, 27432, 21600.
$\gamma\mu f^2$ = 19440, 43392, 82200, 124932, 152748, 153900, 132732, 100080.
γf^2 = 93312, 180000, 289632, 383520, 420408, 390312, 317880, 236952, 169920.
$\gamma\mu^3 b f_e$ = 30, 54, 75, 75, 54.
$\gamma\mu^2 b f_e$ = 336, 564, 780, 873, 792, 576.
$\gamma\mu b f_e$ = 1968, 3036, 3966, 4344, 4032, 3258, 2316.
$\gamma b f_e$ = 6792, 8976, 10116, 9798, 8316, 6342, 4476, 3096.
$\gamma\mu^3 f_e f_e$ = 36, 48, 48, 36.
$\gamma\mu^3 f_e f$ = 54, 144, 240, 270, 216.
$\gamma\mu^3 b f$ = 66, 168, 342, 507, 528, 396.
$\gamma\mu^3 b^2 f_e$ = 6, 9, 9, 6.

$\gamma\mu^3 b f_e f_e = 12,\ 12,\ 8.$
$\gamma\mu^3 b^2 f_e f = 6,\ 6,\ 4.$
$\gamma\mu^3 b v\ \ = 51,\ 114,\ 204,\ 276,\ 267,\ 186.$
$\gamma\mu^3 b^2 v\ \ = 9,\ 18,\ 27,\ 27,\ 18.$
$\gamma\mu^3 b v_g\ \ = 15,\ 30,\ 48,\ 54,\ 45.$
$\gamma\mu^3 b^2 v_g = 3,\ 6,\ 9,\ 9.$
$\gamma\mu f_e^3\ \ = 162,\ 216,\ 216,\ 162.$
$\gamma f_e^3\ \ = 1188,\ 1260,\ 1044,\ 756,\ 522.$

Tabelle von Zahlen τ.

$\frac{1}{9}\tau\mu^3 f^2\ \ = 15,\ 24,\ 16,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\frac{1}{9}\tau\mu^2 f^2\ \ = 180,\ 260,\ 192,\ 64,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\frac{1}{9}\tau\mu f^2\ \ = 1120,\ 1440,\ 1040,\ 384,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\frac{1}{9}\tau f^2\ \ = 4200,\ 4480,\ 2880,\ 960,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu^2 f_e^3\ \ = 9,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu f_e^3\ \ = 81,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau f_e^3\ \ = 297,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$

Bezeichnet f_3 die Bedingung, dass von den 3 Wendetangenten auf τ jede eine gegebene Gerade schneide, so hat man:

$\tau\mu^3 f_3\ \ = 135,\ 216,\ 144,\ 0,\ 0.$ Ferner ist:
$\tau\mu^3 f_e^2\ \ = 9,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu^3 f_e f = 54,\ 36,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu^3 f_e^2 f = 9,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu^3 b^2 f^2 = 9,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu^2 b^2 f^2 = 108,\ 36,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu b^2 f^2 = 585,\ 216,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau b^2 f^2\ \ = 1620,\ 540,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu^2 b^3 f^2 = 9,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu b^3 f^2 = 54,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau b^3 f^2\ \ = 135,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu^2 b^3 f^3 = 9,\ 0,\ 0.$
$\tau\mu b^3 f^3 = 81,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\tau b^3 f^3\ \ = 297,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$

Tabelle von Zahlen δ.

$\frac{1}{3}\delta\mu^3 f^2\ \ = 0,\ 24,\ 114,\ 153,\ 54,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta\mu^2 f^2\ \ = 0,\ 240,\ 976,\ 1374,\ 1032,\ 360,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta\mu f^2\ \ = 0,\ 1240,\ 4300,\ 5890,\ 4632,\ 1890,\ 540,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta f^2\ \ = 0,\ 3360,\ 8320,\ 9640,\ 6552,\ 2340,\ 540,\ 0,\ 0.$

$\frac{1}{3}\delta\mu^3 ef^2 = 0,\ 18,\ 29,\ 9,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta\mu^2 ef^2 = 0,\ 152,\ 260,\ 203,\ 66,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta\mu ef^2 = 0,\ 660,\ 1106,\ 908,\ 342,\ 90,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta ef^2 = 0,\ 1240,\ 1780,\ 1266,\ 420,\ 90,\ 0,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta\mu^3 e^2 f^2 = 0,\ 4,\ 1,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta\mu^2 e^2 f^2 = 0,\ 36,\ 34,\ 10,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta\mu e^2 f^2 = 0,\ 152,\ 152,\ 51,\ 12,\ 0.$
$\frac{1}{3}\delta e^2 f^2 = 0,\ 240,\ 208,\ 62,\ 12,\ 0,\ 0.$
$\delta\mu^2 f_e^3 = 0,\ 6,\ 1.$
$\delta\mu f_e^3 = 0,\ 72,\ 18,\ 1.$
$\delta f_e^3 = 0,\ 234,\ 63,\ 12,\ 0.$
$\delta\mu^3 f_e f = 0,\ 54,\ 87,\ 27,\ 0.$
$\delta\mu^3 f_e f_e = 0,\ 12,\ 3,\ 0.$
$\delta\mu^3 f_e f_e f = 0,\ 6,\ 1.$
$\delta\mu^3 f_3 = 0,\ 72,\ 243,\ 243,\ 54.$

Tabelle von Zahlen η.

$\eta\mu^3 f^2 = 0,\ 0,\ 0,\ 54,\ 144,\ 150.$
$\eta\mu^2 f^2 = 0,\ 0,\ 0,\ 324,\ 864,\ 1260,\ 1200.$
$\eta\mu f^2 = 0,\ 0,\ 0,\ 972,\ 2592,\ 3780,\ 3600,\ 2940.$
$\eta f^2 = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$
$\eta e\mu^3 f^2 = 0,\ 0,\ 9,\ 27,\ 27.$
$\eta e\mu^2 f^2 = 0,\ 0,\ 54,\ 162,\ 246,\ 230.$
$\eta e\mu f^2 = 0,\ 0,\ 162,\ 486,\ 738,\ 690,\ 550.$
$\eta e^2\mu^3 f^2 = 0,\ 0,\ 3,\ 3.$
$\eta e^2\mu^2 f^2 = 0,\ 0,\ 18,\ 36,\ 34.$
$\eta e^2\mu f^2 = 0,\ 0,\ 54,\ 108,\ 102,\ 80.$
$\eta\mu^2 f_e^3 = 0,\ 0,\ 3.$
$\eta\mu f_e^3 = 0,\ 0,\ 18,\ 18.$
$\eta f_e^3 = 0,\ 0,\ 27,\ 27,\ 21.$
$\eta\mu^3 f_3 = 0,\ 0,\ 0,\ 54,\ 144.$

Tabelle von Zahlen ζ.

$\frac{1}{6}\zeta\mu^3 f^3 = 0,\ 0,\ 36,\ 72,\ 48.$
$\frac{1}{6}\zeta\mu^2 f^3 = 0,\ 0,\ 216,\ 432,\ 480,\ 320.$
$\frac{1}{6}\zeta\mu f^3 = 0,\ 0,\ 648,\ 1296,\ 1440,\ 960,\ 640.$
$\frac{1}{6}\zeta f^3 = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$

$\frac{1}{3}\zeta\mu^3 f_e^3 = 3,\ 2.$

$\frac{1}{3}\zeta\mu^2 f_e^3 = 18,\ 18,\ 12.$

$\frac{1}{3}\zeta\mu f_e^3 = 54,\ 54,\ 36,\ 24.$

$\zeta\mu^3 f_e^2 f = 18,\ 30,\ 20.$

$\zeta\mu^3 b f_e^2 f = 6,\ 4.$

$\zeta\mu^3 f_e^3 s = 3.$

$\zeta\mu^3 v f_e^3 = 3.$

Tabelle von sonstigen Ausartungszahlen.

$\frac{1}{12}\varepsilon\mu^3 b = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,\ 30,\ 45.$

$\varepsilon\mu^3 b v = 0,\ 0,\ 0,\ 162,\ 504,\ 690.$

$\varepsilon\mu^3 b^2 v = 0,\ 0,\ 0,\ 54,\ 156.$

$\varepsilon\mu^3 b v_g = 0,\ 0,\ 0,\ 54,\ 132.$

$\varepsilon\mu^3 b^2 v_g = 0,\ 0,\ 0,\ 18.$

$\varepsilon\mu^3 b f = 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 108,\ 360.$

$\vartheta\mu^3 b = 0,\ 0,\ 24,\ 126,\ 219,\ 150,\ 0.$

$\vartheta\mu^3 b v = 0,\ 48,\ 198,\ 321,\ 219,\ 0.$

$\vartheta\mu^3 b^2 v = 0,\ 12,\ 49,\ 57,\ 0.$

$\vartheta\mu^3 b v_g = 0,\ 12,\ 48,\ 51,\ 0.$

$\vartheta\mu^3 b^2 v_g = 0,\ 2,\ 9,\ 0.$

$\vartheta\mu^3 b f = 0,\ 0,\ 18,\ 99,\ 144,\ 0.$

$\delta'\mu^3 b v = 0,\ 24,\ 114,\ 153,\ 54,\ 0.$

$\delta'\mu^3 b^2 v = 0,\ 6,\ 31,\ 36,\ 0.$

$\delta'\mu^3 b v_g = 0,\ 12,\ 52,\ 81,\ 54.$

$\delta'\mu^3 b^2 v_g = 0,\ 4,\ 19,\ 36.$

$\psi\mu^3 b v = 30,\ 84,\ 132,\ 168,\ 96,\ 0.$

$\psi\mu^3 b^2 v = 6,\ 18,\ 36,\ 48,\ 48.$

$\psi\mu^3 b v_g = 12,\ 30,\ 52,\ 48,\ 0.$

$\psi\mu^3 b^2 v_g = 3,\ 8,\ 16,\ 24.$

$\zeta'\mu^3 b f_e^3 = 3.$

$\varkappa\mu^3 f_e f_e f b = 6,\ 0.$

§ 57.

Die Berechnung und die Tabellen der Anzahlen für die cubische Plancurve mit Doppelpunkt.

Aus den Ausartungszahlen, deren Berechnung in § 56. besprochen ist, kann man eine grosse Menge von Anzahlen für die C_3^4 nach der im IV. Abschnitt erörterten Methode finden. Man benutze dabei die acht

Formeln des § 55. Ausserdem hat man jedoch zu dieser Berechnung noch viele andere Mittel zur Verfügung, nämlich alle die, welche den für die C_3^3 in § 49. angegebenen Mitteln analog sind. Wir erwähnen beispielsweise die Formeln, welche hier den Formeln 13) und 14) des § 49. entsprechen. Es bezeichnen wieder ϱ_g die Bedingung, eine gegebene Ebene in einem Punkte einer auf dieser Ebene gegebenen Geraden zu berühren. Dann hat man:

$$\nu^2 = (\mu\nu - 3\mu^2) + 6\mu^2 + \varrho_g + 2b^2 + \alpha_g,$$
$$\varrho^2 = \varrho_g + 3f_e + \alpha_e,$$

wo α_g resp. α_e die Summe aller derjenigen hinlänglich oft gezählten Ausartungen ist, welche, dem vorausgesetzten zweistufigen Systeme angehörig, ihre vielfache Ordnungsgerade eine gegebene Gerade schneiden lassen, resp. einen ihrer vielfachen Rangpunkte auf einer gegebenen Ebene besitzen. Beispielsweise hat α_e in Systemen, welche nur die Ausartungen χ, γ, τ, δ, η enthalten, den Werth:

$$\chi e + 12\tau e + 6\delta e + 6\eta e.$$

Ausserdem hat der Verfasser noch die Formel verwerthet, welche man nach dem Princip von der Erhaltung der Anzahl erhält, wenn man die beiden Ebenen der zusammengesetzten Bedingung ϱu zusammenfallen lässt. Diese Formel lautet für Systeme, in denen nur die Ausartungen nullter Gattung vorkommen, wie folgt:

$$\varrho u = 4f_e + 2\chi e + \gamma c.$$

Von den Anzahlen der C_3^4 hat der Verfasser im Hinblick auf die Anwendung bei der cubischen Raumcurve *wirklich ausgerechnet* alle diejenigen Anzahlen, welche angeben, wieviel Curven ausser elementaren Bedingungen, nur Wendetangenten-Bedingungen befriedigen. In den durch solche Bedingungen definirten einstufigen Systemen sind nur die Anzahlen folgender 6 Ausartungen von Null verschieden:

$$\chi, \gamma, \tau, \delta, \eta, \zeta.$$

Zunächst erhält man aus den in § 56. angegebenen Zahlen

$$\mu^3\chi, \mu^3\gamma, \mu^2\chi, \mu^2\gamma, \mu\chi, \mu\gamma, \chi, \gamma$$

durch die Formeln 1) und 2) des § 55. *alle Elementarzahlen* der C_3^4, und zwar jede ν und ϱ zugleich enthaltende Anzahl *zweimal.* Von diesen Zahlen gelangt man durch die Formel 4) des § 55. zu den Zahlen:

$$\mu^3 f, \mu^2 f, \mu f, f.$$

Zu eben diesen Zahlen gelangt man aber auch aus den elementaren Bedingungen und den die Bedingung f enthaltenden Zahlen χ und γ. Ebenso führen die Zahlen

$$\mu^3 f_e\chi \text{ und } \mu^3 f_e\gamma$$

zu den Zahlen $\mu^3 f_e$ der C_3^4, und diese wieder durch die Formel 4) des § 55. zu den Zahlen

$$\mu^3 f_e f.$$

So kann man schliesslich zu allen Zahlen gelangen, welche angeben, wieviel Curven *ausser elementaren Bedingungen nur Bedingungen erfüllen, die auf die Lage der Wendetangenten Bezug haben.* Von diesen Anzahlen braucht man jedoch direct aus den Ausartungszahlen nur diejenigen 300 Anzahlen zu berechnen, welche nur elementare Bedingungen oder neben elementaren Bedingungen nur die Bedingungen

$$f,\ f_e,\ f^2,\ ff_e,\ f_e^2,\ f^3,\ f^2f_e,\ ff_e^2,\ f_e^3$$

enthalten, da aus diesen sich alle übrigen Anzahlen durch die in § 11. entwickelten, und in § 52. wiederholten Formeln ergeben. Jene 300 Anzahlen sind in der ersten der folgenden Tabellen zusammengestellt. Hinzugefügt sind von den übrigen Wendetangentenanzahlen beispielshalber diejenigen, welche neben elementaren Bedingungen die Bedingungen

$$f^4,\ f^5,\ f^6,\ f^7,\ f^8,\ f^9$$

enthalten.

Von sonstigen Anzahlen der C_3^4 hat der Verfasser nur wenige berechnet, und diese hauptsächlich nur, um sich über die Eigenschaften gewisser Ausartungen der C_3^4 a posteriori Kenntniss zu verschaffen, z. B. der Ausartungen ε und ϑ. Diese sonstigen Anzahlen, welche man zur Berechnung der Elementarzahlen der cubischen Raumcurve *nicht* nöthig hat, sind in der zweiten der folgenden Tabellen zusammengestellt. Die Anordnung der Zahlen in diesen Tabellen ist im Einklang mit der Anordnung in den früheren Tabellen. *Jede einer α-fachen Bedingung nachgesetzte i^{te} Zahl bedeutet also die Anzahl derjenigen Curven C_3^4, welche diese α-fache Bedingungen erfüllen, $i-1$ gegebene Ebenen berühren, und $12-\alpha-i$ gegebene Gerade schneiden.*

Tabelle I.

Die Elementarzahlen und die Wendetangenten-Anzahlen der C_3^4.

$\mu^3 =$ 12, 36, 100, 240, 480, 712, 756, 600, 400.

$\mu^2 =$ 216, 592, 1496, 3280, 6080, 8896, 10232, 9456, 7200, 4800.

$\mu \quad =$ 2040, 5120, 11792, 23616, 40320, 56240, 64040, 60672, 49416, 35760, 23840.

Die Zahlen ν^{11}, $\nu^{10}\varrho$, $\nu^9\varrho^2$, $\cdots \varrho^{11}$ sind:

12960, 29520, 61120, 109632, 167616, 214400, 230240, 211200, 170192, 124176, 85440, 56960.

$\mu^3 f$ = 54, 150, 360, 720, 1068, 1134, 900, 600.
$\mu^2 f$ = 888, 2244, 4920, 9120, 13344, 15348, 14184, 10800, 7200.
μf = 7680, 17688, 35424, 60480, 84360, 96060, 91008, 74124, 53640, 35760.
f = 44280, 91680, 164448, 251424, 321600, 345360, 316800, 255288, 186264, 128160, 85440.
$\mu^3 f_e$ = 21, 54, 108, 156, 162, 126, 84.
$\mu^2 f_e$ = 312, 726, 1344, 1920, 2160, 1962, 1476, 984.
μf_e = 2448, 5160, 8796, 12024, 13428, 12528, 10080, 7236, 4824.
f_e = 12672, 23688, 36120, 45456, 48024, 43452, 34608, 25020, 17136, 11424.

$\mu^3 f^2$ = 225, 540, 1080, 1602, 1701, 1350, 900.
$\mu^2 f^2$ = 3366, 7380, 13680, 20016, 23022, 21276, 16200, 10800.
μf^2 = 26532, 53136, 90720, 126540, 144090, 136512, 111186, 80460, 53640.
f^2 = 137520, 246672, 377136, 482400, 518040, 475200, 382932, 279396, 192240, 128160.
$\mu^3 f f_e$ = 81, 162, 234, 243, 189, 126.
$\mu^2 f f_e$ = 1089, 2016, 2880, 3240, 2943, 2214, 1476.
$\mu f f_e$ = 7740, 13194, 18036, 20142, 18792, 15120, 10854, 7236.
$f f_e$ = 35532, 54180, 68184, 72036, 65178, 51912, 37530, 25704, 17136.
$\mu^3 f_e^2$ = 27, 36, 36, 27, 18.
$\mu^2 f_e^2$ = 324, 432, 468, 414, 306, 204.
μf_e^2 = 2061, 2664, 2880, 2628, 2079, 1476, 984.
f_e^2 = 8226, 9936, 10224, 9072, 7110, 5076, 3456, 2304.

$\mu^3 f^3$ = 405, 864, 1458, 1755, 1494, 1050.
$\mu^2 f^3$ = 6210, 12420, 20448, 25974, 25542, 20160, 13800.
μf^3 = 49464, 91620, 142380, 177318, 178740, 150714, 111060, 74580.
f^3 = 256608, 429624, 608400, 707760, 683316, 563868, 416664, 288360, 192240.
$\mu^3 f^2 f_e$ = 81, 162, 216, 189, 135.
$\mu^2 f^2 f_e$ = 1269, 2340, 3150, 3177, 2532, 1754.
$\mu f^2 f_e$ = 10071, 17064, 22320, 23130, 19665, 14496, 9754.
$f^2 f_e$ = 51030, 77256, 93564, 92070, 75978, 55890, 38556, 27504.
$\mu^3 f f_e^2$ = 27, 36, 30, 21.
$\mu^2 f f_e^2$ = 324, 432, 432, 342, 238.
$\mu f f_e^2$ = 2241, 2988, 3150, 2673, 1956, 1316.

$ff_e^2 = 10044,\ 12636,\ 12672,\ 10386,\ 7560,\ 5184,\ 3456.$
$\mu^3 f_e^3 = 9,\ 6,\ 4.$
$\mu^2 f_e^3 = 81,\ 72,\ 54,\ 37.$
$\mu f_e^3 = 486,\ 486,\ 396,\ 282,\ 189.$
$f_e^3 = 1863,\ 1836,\ 1458,\ 1035,\ 702,\ 468.$

$\mu^3 f^4 = 405,\ 864,\ 1188,\ 1053,\ 756.$
$\mu^2 f^4 = 7290,\ 14364,\ 21096,\ 23004,\ 19080,\ 13440.$
$\mu f^4 = 65450,\ 114840,\ 165168,\ 186498,\ 169398,\ 130230,\ 89520.$
$f^4 = 349596, 568080, 760680, 822132, 732864, 565056, 401220, 281520.$
$\mu^3 f^5 = 405,\ 540,\ 450,\ 315.$
$\mu^2 f^5 = 7290,\ 12420,\ 15120,\ 12960,\ 9240.$
$\mu f^5 = 66690,\ 114840,\ 149400,\ 149400,\ 120300,\ 84490.$
$f^5 = 382320,\ 616680,\ 776880,\ 775800,\ 642240,\ 475320,\ 326780.$
$\mu^3 f^6 = 135,\ 90,\ 60.$
$\mu^2 f^6 = 5670,\ 7020,\ 5760,\ 4020.$
$\mu f^6 = 61830,\ 90540,\ 99720,\ 82800,\ 58620.$
$f^6 = 382320,\ 568080,\ 647280,\ 583560,\ 450720,\ 314520.$
$\mu^2 f^7 = 1890,\ 1260,\ 840.$
$\mu f^7 = 41580,\ 47880,\ 38640,\ 26880.$
$f^7 = 328860,\ 415800,\ 408240,\ 325080,\ 227920.$
$\mu f^8 = 13860,\ 9240,\ 6160.$
$f^8 = 196560,\ 206640,\ 162960,\ 112840.$
$f^9 = 65520,\ 43680,\ 29120.$

Wegen der Anwendung bei der cubischen Raumcurve mögen noch die Zahlen μP, P, P^2 hier Platz finden, welche aus den Elementarzahlen durch die Formel:

$$P = \mu\nu - 4\mu^2$$

resultiren.

$\mu P = 180,\ 484,\ 1196,\ 2560,\ 4640,\ 6760,\ 7964,\ 7656,\ 6000.$
$P = 1392,\ 3344,\ 7304,\ 13776,\ 22080,\ 29552,\ 33344,\ 32304,\ 27816,\ 21360,$
$P^2 = 144,\ 376,\ 896,\ 1840,\ 3200,\ 4624,\ 5696,\ 5856.$

Tabelle II.

Sonstige Anzahlen der C_3^4.

$\mu^3 b = 6,\ 22,\ 80,\ 240,\ 604,\ 1046,\ 1212,\ 1000.$
$\mu^3 p = 18,\ 58,\ 180,\ 480,\ 1084,\ 1758,\ 1968,\ 1600.$
$\mu^3 v = 66,\ 186,\ 460,\ 960,\ 1548,\ 1846,\ 1656,\ 1200.$
$\mu^3 u = 54,\ 150,\ 360,\ 720,\ 1068,\ 1134,\ 900,\ 600.$

$\mu^3 s \quad = 18, 50, 120, 240, 356, 378, 300, 200.$

$\mu^3 b^2 \quad = 1, 4, 16, 52, 142, 256, 304.$

$\mu^3 v_g \quad = 18, 50, 120, 240, 356, 378, 300.$

$\mu^3 p_e \quad = 5, 18, 64, 188, 354, 430, 368.$

$\mu^3 s_e \quad = 25, 60, 120, 178, 189, 150, 100.$

$\mu^3 \varrho_g \quad = 10, 28, 68, 136, 196, 200, 148.$

$\mu^3 bv \quad = 39, 142, 392, 894, 1411, 1484, 1092.$

$\mu^3 b^2 v \quad = 7, 28, 82, 199, 322, 352.$

$\mu^3 bv_g \quad = 11, 40, 108, 236, 319, 246.$

$\mu^3 b^2 v_g \quad = 2, 8, 24, 59, 92.$

$\mu^3 bf \quad = 33, 120, 360, 906, 1569, 1818, 1500.$

$\mu^3 b^2 f \quad = 6, 24, 78, 213, 384, 456.$

$\mu^3 bf_e \quad = 15, 54, 138, 231, 261, 210.$

$\mu^3 b^2 f_e \quad = 3, 12, 33, 57, 66.$

$\mu^3 bff_e \quad = 81, 180, 276, 297, 234.$

$\mu^3 b^2 ff_e = 18, 42, 66, 72.$

$\mu^3 bf_e^2 \quad = 36, 48, 48, 36.$

$\mu^3 b^2 f_e^2 = 9, 12, 12.$

$\mu^3 bf_e^3 \quad = 6, 4.$

$\mu^3 b^2 f_e^3 = 1.$

$\mu^3 vf_e^3 \quad = 9, 6.$

$\mu^3 sf_e^3 \quad = 3, 2.$

$\mu^3 bvf_e^3 = 3.$

$\mu^3 p_e f_e^3 = 2.$

$\mu^3 bsf_e^3 = 2.$

$\mu^3 v^2 f_e^3 = 6.$

$\mu^3 pvf_e^3 = 6.$

$\mu^3 svf_e^3 = 3.$

$\mu^3 spf_e^3 = 2.$

$\mu^3 s_e f_e^3 = 1.$

$\mu^3 \varrho_g f_e = 15, 30, 42, 42, 30.$

$\mu^3 \varrho_g b^2 = 1, 4, 13, 34, 70.$

$\mu^3 \varrho_g^2 \quad = 8, 20, 42, 68, 56.$

$\mu^2 u \quad = 876, 1908, 4820, 8880, 12864, 14636, 13428, 10200, 6800.$

$\mu u \quad = 7464, 17096, 33928, 57200, 78280, 87164, 80776, 64668,$ $46440, 30960.$

$u \quad = 42240, 86560, 152656, 227808, 281280, 289120, 252760,$ $194616, 136848, 92400, 61600.$

$\mu^3 uf_e \quad = 81, 162, 234, 243, 189, 126.$

$\mu^2 uf_e \quad = 1068, 1962, 2772, 3084, 2781, 2088, 1392.$

$\mu u f_e = 7428,\ 12468,\ 16692,\ 18222,\ 16632,\ 13158,\ 9378,\ 6252.$
$u f_e = 33084,\ 49020,\ 59388,\ 60012,\ 51750,\ 39384,\ 27450,\ 18468,$
$12312.$

§ 58.

Lagebeziehungen bei einer C_3^4 und bei einer Plancurve überhaupt.

In § 51. ist gezeigt, wie man aus den Stammzahlen der Ausartungen der C_3^3 und der Erzeugungsweise dieser Ausartungen *die Gradzahlen von Gleichungen* gewinnen kann, welche die Lage der Punkte, der Tangenten und der Ecken und Seiten des Singularitätendreiecks der C_3^3 von einander abhängig machen. Ebenso gewinnt man aus der in § 54. angegebenen Erzeugung und den ebenda mitgetheilten Stammzahlen der Ausartungen der C_3^4 die Gradzahlen gewisser Beziehungen für diese Curve. Von diesen Gradzahlen folgen hier einige.

1) *Die Erzeugungsweise und die Stammzahlen der Ausartung τ führen zu dem Satze:*

„Wenn man die 3 Schnittpunkte mit einer cubischen Plancurve vierten Ranges auf irgend einer Geraden ihrer Ebene bestimmt, und ausserdem die 3 Schnittpunkte mit den 3 Wendetangenten, so erhält man auf dieser Geraden 6 Punkte, welche, um überhaupt so einer C_3^4 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass *die Gesammtheit der 6 Punkte endlichdeutig bestimmt ist, sobald fünf von ihnen gegeben sind*, und zwar

a) 9-*deutig*, sobald drei Curvenschnittpunkte und zwei Wendetangentenschnittpunkte,

b) *auch* 9-*deutig*, sobald zwei Curvenschnittpunkte und drei Wendetangentenschnittpunkte gegeben sind.“

2) *Die Erzeugungsweise und die Stammzahlen der Ausartung δ führen zu dem Satze:*

„Wenn man auf einer Tangente einer C_3^4 den Berührungspunkt, den dritten Curvenschnittpunkt und die 3 Schnittpunkte mit den 3 Wendetangenten bestimmt, so erhält man auf dieser Geraden 5 Punkte, welche, um überhaupt so einer C_3^4 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass *ihre Gesammtheit durch 4 von ihnen endlichdeutig bestimmt ist*, und zwar

a) *dreideutig*, wenn der Berührungspunkt, der dritte Curvenschnittpunkt und zwei Wendetangentenschnittpunkte gegeben sind.

b) *eindeutig*, wenn der Berührungspunkt und die drei Wendetangentenschnittpunkte gegeben sind,

c) *vierdeutig*, wenn der dritte Curvenschnittpunkt und die drei Wendetangentenschnittpunkte gegeben sind.“

3) *Die Erzeugungsweise und die Stammzahlen der Ausartung* ε *führen zu folgendem Satze:*

„Wenn man an eine C_3^4 von irgend einem Punkte ihrer Ebene die 4 Tangenten, den Strahl nach dem Doppelpunkt und die Strahlen nach den 3 Wendepunkten zieht, so erhält man 8 Strahlen, welche, um überhaupt so einer C_3^4 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass *ihre Gesammtheit durch fünf von ihnen endlichdeutig bestimmt ist*, und zwar

a) 12-*deutig*, wenn die 4 Tangenten und der Strahl nach dem Doppelpunkte gegeben sind,

b) 12-*deutig*, wenn die 4 Tangenten und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind.

c) 18-*deutig*, wenn 3 Tangenten, der Doppelpunktsstrahl und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind.“

4) *Die Erzeugungsweise und die Stammzahlen der Ausartung* ϑ *führen zu folgendem Satze:*

„Wenn man von irgend einem Punkte S einer C_3^4 die in ihm berührende Tangente, die beiden sonstigen Tangenten, den Strahl nach dem Doppelpunkte und die Strahlen nach den 3 Wendepunkten zieht, so erhält man 7 Strahlen durch S, welche, um überhaupt so einer C_3^4 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass *ihre Gesammtheit durch vier von ihnen endlichdeutig bestimmt ist*, und zwar:

a) *eindeutig*, wenn die Tangenten und der Strahl nach dem Doppelpunkte gegeben sind,

b) *zweideutig*, wenn die Tangenten und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind,

c) *zweideutig*, wenn die in S berührende Tangente, eine der beiden sonstigen Tangenten, der Doppelpunktsstrahl und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind,

d) *eindeutig*, wenn die beiden nicht in S berührenden Tangenten, der Doppelpunktsstrahl und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind.

Die tiefe Ausbildung, welche die Theorie der cubischen Plancurven in den letzten Jahren erfahren hat, macht es wohl möglich, die Gleichungen wirklich aufzustellen, deren Gradzahlen in den obigen Sätzen für die C_3^4 und in den analogen Sätzen für die C_3^3 (§ 51.) angegeben sind. Steigt man jedoch zu *Plancurven mit noch höheren Constantenzahlen* auf, so wird das Problem der *Aufstellung* der analogen Gleichungen immer schwieriger. Ihre *Gradzahlen* können wir jedoch noch immer nach unserer Methode auffinden, indem wir durch homographische Abbildung gewisse Ausartungen der zu untersuchenden Curve feststellen

und dann für dieselbe hinreichend viel Anzahlen ableiten, um so durch Rückschlüsse die Stammzahlen der Ausartungen zu erkennen.

So hat der Verfasser noch einige Gradzahlen für die cubische Plancurve sechsten Ranges C_3^6 bestimmt. Man bilde nämlich die allgemeine C_3^6 gerade so ab, wie in § 41. die C_3^3 und in § 54. die C_3^4. Dann findet man die folgenden beiden Ausartungen, wenn man $\lambda = 0$ setzt, die Axe beliebig legt und erstens den Scheitel S beliebig, zweitens aber auf die Curve legt. Die erste Ausartung besteht aus einer dreifachen Ordnungsgeraden, auf welcher 6 einfache Rangpunkte und die 9 Wendepunkte liegen. Die zweite Ausartung besteht aus einer doppelten und einer einfachen Ordnungsgeraden, welche sich in einem doppelten Rangpunkte schneiden; die doppelte Ordnungsgerade enthält 4 einfache Rangpunkte und die 9 Wendepunkte. Indem man nun in ähnlicher Weise wie bei der C_3^3 und C_3^4 auch bei der C_3^6 gewisse Anzahlen auf mehreren *verschiedenen* Wegen berechnet, kommt man zu den Werthen gewisser *Stammzahlen dieser beiden Ausartungen, und diese führen dann zu den beiden folgenden Sätzen:*

„Wenn man an eine cubische Plancurve sechsten Ranges C_3^6 von irgend einem Punkte ihrer Ebene aus die 6 Tangenten und die Strahlen nach den 9 Wendepunkten zieht, so erhält man 15 Strahlen, welche, um überhaupt so einer C_3^6 angehören zu können, in ihrer Lage derartig von einander abhängen müssen, dass *ihre Gesammtheit durch* 6 *von ihnen endlichdeutig bestimmt ist*, und zwar

a) *eindeutig*, wenn die 6 Tangenten,

b) 120-*deutig*, wenn 5 Tangenten und 1 Wendepunktsstrahl gegeben ist.“

„Thut man dasselbe für einen auf der Curve gelegenen Punkt, so fallen zwei Tangenten in einen Strahl g zusammen. Die 4 sonstigen Tangenten a, die Tangente g und die 9 Wendepunktsstrahlen bilden dann 14 Strahlen, welche so von einander abhängen, dass *ihre Gesammtheit durch* 5 *von ihnen endlichdeutig bestimmt ist*, und zwar:

a) *eindeutig*, wenn die Tangente g und die 4 Tangenten a gegeben sind,

b) *eindeutig*, wenn die 4 Tangenten a und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind,

c) *vierdeutig*, wenn die Tangente g, 3 von den 4 Tangenten a und ein Wendepunktsstrahl gegeben sind.“

In derselben Weise, wie die Ausartung ε bei der C_3^3 und bei der C_3^4 erhalten wurde, bekommt man bei einer Curve C_n n^{ter} Ordnung, m^{ten} Ranges mit δ Doppelpunkten, $\varkappa$ Spitzen, $2\delta'$ Doppeltangentenberührungspunkten und $\varkappa'$ Wendepunkten eine Ausartung, welche aus einer n-fachen Ordnungsgeraden besteht, auf der m einfache Rang-

punkte, δ Doppelpunkte, $\varkappa$ Spitzen, $2\delta'$ Doppeltangentenberührungspunkte und $\varkappa'$ Wendepunkte liegen. Die Constantenzahl dieser Ausartung muss aber um 1 kleiner als die der C_n, also gleich

$$\tfrac{1}{2}n(n+3)-\delta-2\varkappa-1$$

sein. Folglich können auf der Ordnungsgeraden nur

$$\tfrac{1}{2}n(n+3)-\delta-2\varkappa-3$$

von den $m+\delta+\varkappa+2\delta'+\varkappa'$ ausgezeichneten Punkten *willkürlich* gewählt werden, damit die Ausartung überhaupt eine C_n werde. Daraus ergiebt sich, dass *die Lage jener ausgezeichneten Punkte durch*

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)+2\delta'+\varkappa'$$

Gleichungen bedingt wird. Hieraus ergiebt sich für die allgemeine Curve C_n der Satz:

„Wenn man an eine beliebige Curve n^{ter} Ordnung von einem Punkte ihrer Ebene aus die sämmtlichen Tangenten, die Strahlen nach den Doppelpunkten, nach den Spitzen, nach den $2\delta'$ Doppeltangentenberührungspunkten und nach den $\varkappa'$ Wendepunkten zieht, so sind diese Strahlen durch

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)+2\delta'+\varkappa'$$

Gleichungen in ihrer Lage von einander abhängig. Bemerkenswerth ist, dass die *Zahl der Gleichungen* für die gegenseitige Lage der Tangenten, der Doppelpunktsstrahlen und der Strahlen nach den Spitzen *allein abhängt von der Ordnungszahl* n, nämlich gleich

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n-3)$$

ist. Für $n=4$ ergiebt sich die Anzahl solcher Gleichungen gleich 1.“

Die *Grade* dieser Gleichungen sind bis jetzt nur in wenigen Fällen bestimmt. Für $n=4$, $\delta=0$, $\varkappa=0$ hat Herr Zeuthen (Alm. Eg. § 70.) bestimmt, dass der Grad der Gleichung, welche bei 12 von einem Punkte an die C_4 gehenden Tangenten, die Lage der zwölften aus der Lage der 11 übrigen bestimmt, gleich 451440 ist. Die *algebraische* Herleitung dieser Anzahl wird durch die gegenwärtige Preisaufgabe der Kgl. Dänischen Akademie verlangt.

Hamburg, im November 1877.

Reduction des Transformationsproblems der hyperelliptischen Integrale.

Von L. Königsberger in Wien.

In der im Journal für Mathematik Bd. 81, Heft 3 veröffentlichten Arbeit „über die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen" zeigte ich, dass, wenn zwischen hyperelliptischen Integralen verschiedener Ordnung irgend eine in den Integralen lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht (und diese ist nach dem von mir in demselben Journale Bd. 84, Heft 4 bewiesenen allgemeinen Satze „über die algebraischen Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen" der allgemeinsten algebraischen Relation zwischen jenen Integralen äquivalent), für je zwei solche in der angenommenen Beziehung vorkommende hyperelliptische Integrale

$$\int^{z_1} f(z, \sqrt{R(z)})\, dz \quad \text{und} \quad \int^{y} F(y, \sqrt{R_1(y)})\, dy,$$

in denen

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2p+1})},$$
$$\sqrt{R_1(y)} = \sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2\sigma+1})}$$

ist, zwischen den Differentialen der zugehörigen hyperelliptischen Integrale erster Gattung die Relation stattfindet:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \dfrac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \dfrac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \dfrac{F_0(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}, \\[2ex] \dfrac{y_1 dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \dfrac{y_2 dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \dfrac{y_\sigma dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \dfrac{F_1(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{y_1^{\sigma-1} dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \dfrac{y_2^{\sigma-1} dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \dfrac{y_\sigma^{\sigma-1} dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \dfrac{F_{\sigma-1}(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}; \end{array}\right.$$

in derselben bedeuten die Functionen

$$F_0(z_1),\ F_1(z_1),\ \cdots F_{\sigma-1}(z_1)$$

ganze Functionen $\sigma - 1^{\text{ten}}$ Grades von z_1,

$$y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_\sigma$$

Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$(2)\qquad y^\sigma + f_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right)y^{\sigma-1} + \cdots + f_\sigma\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) = 0,$$

in welcher

$$f_1,\ f_2,\ \cdots\ f_\sigma$$

rationale Functionen von z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ vorstellen, und

$$\sqrt{R_1(y_1)},\ \sqrt{R_1(y_2)},\ \cdots\ \sqrt{R_1(y_\sigma)}$$

lassen sich mit Hülfe eben dieser Grössen z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ rational durch die resp. y in der Form

$$(3)\qquad \sqrt{R_1(y_r)} = \varphi\left(y_r, z_1, \sqrt{R(z_1)}\right)$$

ausdrücken.

Die Beziehungen zwischen den Integralgrenzen lassen sich jedoch noch vereinfachen, und die folgende Ueberlegung führt zu einem Ergebniss, welches eine weitere Einsicht in die allgemeine Transformationstheorie gestattet, und mir für die Behandlung der Frage der Integralrechnung, welche hyperelliptische Integrale irgend einer Ordnung auf solche von niederer Ordnung reducirbar sind, wesentlich zu sein scheint.

Nehmen wir eine der oben erhaltenen Differentialgleichungen

$$(4)\qquad \frac{y_1^k\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^k\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_k(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

und setzen

$$-\sqrt{R(z_1)}\ \text{statt}\ \sqrt{R(z_1)},$$

so werden die Lösungen der Gleichung (2) $y_1, y_2, \cdots y_\sigma$ in die Lösungen der Gleichung

$$(5)\qquad \eta^\sigma + f_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right)\eta^{\sigma-1} + \cdots + f_\sigma\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) = 0$$

übergehen, welche wir mit

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\ \eta_\sigma$$

bezeichnen wollen, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung

$$(6)\qquad \sqrt{R_1(\eta_r)} = \varphi\left(\eta_r, z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right)$$

bestimmt sein werden, und wenn wir die so entstehende Differentialgleichung

$$(7)\qquad \frac{\eta_1^k\,d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} + \frac{\eta_2^k\,d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} + \cdots + \frac{\eta_\sigma^k\,d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} = -\frac{F_k(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

durch Subtraction mit der Gleichung (4) verbinden, so folgt die Beziehung

$$(8)\quad \begin{array}{l} \dfrac{y_1^k\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \dfrac{y_2^k\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \dfrac{y_\sigma^k\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} \\ - \dfrac{\eta_1^k\,d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} - \dfrac{\eta_2^k\,d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} - \cdots - \dfrac{\eta_\sigma^k\,d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} \end{array} = 2\,\frac{F_k(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

die nunmehr genauer untersucht werden soll.

Ist σ eine *gerade* Zahl, so setze man

$$m = \frac{3\sigma}{2},$$

bezeichne mit $p(y)$ eine ganze Function m^{ten} Grades von y, mit $q(y)$ eine ganze Function $m-\sigma-1^{\text{ten}}$ Grades derselben Variabeln, und bestimme in der Gleichung

$$p(y) - q(y)\sqrt{R_1(y)},$$

oder in

$$(9)\quad a_m y^m + a_{m-1}y^{m-1} + \cdots + a_1 y + a_0 - b_{m-\sigma-1}y^{m-\sigma-1}\sqrt{R_1(y)} \\ - b_{m-\sigma-2}y^{m-\sigma-2}\sqrt{R_1(y)} - \cdots - b_0\sqrt{R_1(y)} = 0$$

die

$$2m - \sigma + 1 = 2\sigma + 1$$

Constanten

$$a_m,\ a_{m-1},\ \cdots\ a_1,\ a_0,\ b_{m-\sigma-1},\ b_{m-\sigma-2},\ \cdots\ b_1,\ b_0$$

so, dass dieselbe durch die 2σ Werthe

$$(\alpha)\qquad y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_\sigma,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\ \eta_\sigma$$

und die dazu gehörigen Irrationalitäten

$$(\beta)\ \sqrt{R_1(y_1)},\ \sqrt{R_1(y_2)},\ \cdots\ \sqrt{R_1(y_\sigma)},\ -\sqrt{R_1(\eta_1)},\ -\sqrt{R_1(\eta_2)},\ \cdots\ -\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}$$

befriedigt wird; dann weiss man nach dem Abel'schen Theorem, dass die Gleichung

$$(10)\qquad p(y)^2 - q(y)^2 R_1(y) = 0,$$

welche vom $2m = 3\sigma^{\text{ten}}$ Grade ist, ausser den Lösungen (α) noch σ andere Wurzeln

$$(\gamma)\qquad Y_1,\ Y_2,\ \cdots\ Y_\sigma$$

besitzt, welche mit den Grössen (α) und (β) durch die transcendente Beziehung verbunden sind,

$$(11)\quad \frac{y_1^k\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^k\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} - \frac{\eta_1^k\,d\eta_1}{\sqrt{R_1(\eta_1)}} - \frac{\eta_2^k\,d\eta_2}{\sqrt{R_1(\eta_2)}} - \cdots \frac{\eta_\sigma^k\,d\eta_\sigma}{\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}} \\ = \frac{Y_1^k\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^k\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma^k\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

wenn die zu den Grössen (γ) gehörigen Irrationalitäten durch die Gleichungen bestimmt sind

$$(12)\qquad \sqrt{R_1(Y_1)} = \frac{p(Y_1)}{q(Y_1)},\ \cdots\ \sqrt{R_1(Y_\sigma)} = \frac{p(Y_\sigma)}{q(Y_\sigma)}.$$

Gehen wir nunmehr auf die Form der Coefficienten der Gleichung (9) näher ein; das dieselben bestimmende Gleichungssystem

$$a_m y_1^m + a_{m-1} y_1^{m-1} + \cdots + a_0 - b_{m-\sigma-1} y_1^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(y_1)} - \cdots - b_0 \sqrt{R_1(y_1)} = 0,$$
$$a_m y_2^m + a_{m-1} y_2^{m-1} + \cdots + a_0 - b_{m-\sigma-1} y_2^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(y_2)} - \cdots - b_0 \sqrt{R_1(y_2)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_m y_\sigma^m + a_{m-1} y_\sigma^{m-1} + \cdots + a_0 - b_{m-\sigma-1} y_\sigma^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(y_\sigma)} - \cdots - b_0 \sqrt{R_1(y_\sigma)} = 0,$$
$$a_m \eta_1^m + a_{m-1} \eta_1^{m-1} + \cdots + a_0 + b_{m-\sigma-1} \eta_1^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(\eta_1)} + \cdots + b_0 \sqrt{R_1(\eta_1)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_m \eta_\sigma^m + a_{m-1} \eta_\sigma^{m-1} + \cdots + a_0 + b_{m-\sigma-1} \eta_\sigma^{m-\sigma-1} \sqrt{R_1(\eta_\sigma)} + \cdots + b_0 \sqrt{R_1(\eta_\sigma)} = 0$$

kann, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\sqrt{R_1(y_r)} \text{ und } \sqrt{R_1(\eta_r)},$$

nach den Gleichungen (3) und (6) als rationale Functionen von y_r resp. η_r und z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ darstellbar sind, in die Form gebracht werden:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_m \left\{F_0\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_1^k + F_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_1^{k-1} + \cdots\right\} + \cdots \\
-b_{m-\sigma-1}\left\{\Phi_0\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_1^l + \Phi_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_1^{l-1} + \cdots\right\} - \cdots = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_m \left\{F_0\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_\sigma^k + F_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_\sigma^{k-1} + \cdots\right\} + \cdots \\
-b_{m-\sigma-1}\left\{\Phi_0\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_\sigma^l + \Phi_1\left(z_1, \sqrt{R(z_1)}\right) y_\sigma^{l-1} + \cdots\right\} - \cdots = 0, \\
a_m \left\{F_0\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_1^k + F_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_1^{k-1} + \cdots\right\} + \cdots \\
+b_{m-\sigma-1}\left\{\Phi_0\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_1^l + \Phi_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_1^{l-1} + \cdots\right\} + \cdots = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_m \left\{F_0\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_\sigma^k + F_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_\sigma^{k-1} + \cdots\right\} + \cdots \\
+b_{m-\sigma-1}\left\{\Phi_0\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_\sigma^l + \Phi_1\left(z_1, -\sqrt{R(z_1)}\right) \eta_\sigma^{l-1} + \cdots\right\} + \cdots = 0,
\end{array}\right.$$

worin die Functionen

$$F_0,\ F_1,\ \cdots\ \Phi_0,\ \Phi_1,\ \cdots$$

ganze rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten.

Addirt man jetzt die ersten σ Gleichungen des Systems (13), nachdem dieselben mit

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1, \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_\sigma, \end{array}$$

$$y_1^2 \quad y_2^2 \quad \cdots \quad y_\sigma^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_1^{\sigma-1} \quad y_2^{\sigma-1} \quad \cdots \quad y_\sigma^{\sigma-1}$$

multiplicirt sind, verfährt ebenso mit den zweiten σ Gleichungen dieses Systems, und setzt:

$$y_1^r + y_2^r + \cdots + y_\sigma^r = s_r, \quad \eta_1 + \eta_2^r + \cdots + \eta_\sigma^r = S_r,$$

so folgt:

$$(14)\quad \begin{cases} a_m\{F_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_k + F_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{k-1} + \cdots\} + \cdots \\ - b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_l + \Phi_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{l-1} + \cdots\} - \cdots = 0, \\ a_m\{F_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{k+1} + F_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_k + \cdots\} + \cdots \\ - b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{l+1} + \Phi_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_l + \cdots\} - \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m\{F_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{k+\sigma-1} + F_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{k+\sigma-2} + \cdots\} + \cdots \\ - b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{l+\sigma-1} + \Phi_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})s_{l+\sigma-2} + \cdots\} - \cdots = 0, \\ a_m\{F_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_k + F_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{k-1} + \cdots\} + \cdots \\ + b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_l + \Phi_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{l-1} + \cdots\} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m\{F_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{k+\sigma-1} + F_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{k+\sigma-2} + \cdots\} + \cdots \\ + b_{m-\sigma-1}\{\Phi_0(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{l+\sigma-1} + \Phi_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)})S_{l+\sigma-2} + \cdots\} + \cdots = 0. \end{cases}$$

Da aber die Potenzsummen s und S der Lösungen der Gleichungen (2) und (5) sich rational durch deren Coefficienten ausdrücken lassen, und die beiden Gleichungen sich in den Coefficienten der zu berechnenden a- und b-Grössen nur durch das verschiedene Zeichen von $\sqrt{R(z_1)}$ unterscheiden, so werden wir das System (14) auch in die Form bringen können:

$$(15)\quad \begin{cases} a_m(A_{1m} + B_{1m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots - b_{m-\sigma-1}(P_{1m} + Q_{1m}\sqrt{R(z_1)}) - \cdots = 0, \\ a_m(A_{2m} + B_{2m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots - b_{m-\sigma-1}(P_{2m} + Q_{2m}\sqrt{R(z_1)}) - \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m(A_{\sigma m} + B_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots - b_{m-\sigma-1}(P_{\sigma m} + Q_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}) - \cdots = 0, \\ a_m(A_{1m} - B_{1m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots + b_{m-\sigma-1}(P_{1m} - Q_{1m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots = 0, \\ a_m(A_{2m} - B_{2m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots + b_{m-\sigma-1}(P_{2m} - Q_{2m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m(A_{\sigma m} - B_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots + b_{m-\sigma-1}(P_{\sigma m} - Q_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)}) + \cdots = 0. \end{cases}$$

Wenn man nun die entsprechenden Gleichungen, welche sich nur durch das Zeichen von $\sqrt{R(z_1)}$ unterscheiden, durch Addition und Subtraction mit einander verbindet, so erhält man z. B. aus der 1ten und $\sigma+1$ten Gleichung des Systems (15) die Gleichungen

$$2a_m A_{1m} + \cdots\cdots\cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{1m}\sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0,$$
$$2a_m B_{1m}\sqrt{R(z_1)} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, P_{1m} - \cdots\cdots\cdots = 0,$$

oder, wenn die zweite dieser Gleichungen durch $\sqrt{R(z_1)}$ dividirt und

$$\frac{P_{1m}}{R(z_1)} = P'_{1m}\,, \text{ etc.}$$

gesetzt wird:

$$2a_m A_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{1m}\sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0,$$
$$2a_m B_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1} P'_{1m}\sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0,$$

und es folgt somit aus (15) zur Bestimmung der a- und b-Constanten das nachstehende Gleichungssystem:

$$(16)\quad \begin{cases} 2a_m A_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{1m}\sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ 2a_m A_{2m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{2m}\sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2a_m A_{\sigma m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, Q_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ 2a_m B_{1m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, P'_{1m}\sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ 2a_m B_{2m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, P'_{2m}\sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2a_m B_{\sigma m} + \cdots - 2b_{m-\sigma-1}\, P'_{\sigma m}\sqrt{R(z_1)} - \cdots = 0. \end{cases}$$

Beachtet man nun, dass nur für die b-Grössen die Determinante des Zählers der Auflösungen den Factor $\sqrt{R(z_1)}$ einmal weniger hat als die Determinante des Nenners, so ergiebt sich, wenn, was gestattet ist, eine der a-Grössen, z. B. $a_m = 1$ gesetzt wird:

dass die a-Grössen sämmtlich rationale Functionen von z_1 sind, während die b-Grössen durch das Product von in z_1 rationalen Functionen in die Irrationalität $\sqrt{R(z_1)}$ dargestellt werden, oder dass die Coefficienten der Function $p(y)$ rational in z_1, die von $q(y)$ ebenso, jedoch mit dem Factor $\sqrt{R(z_1)}$ behaftet, ausgedrückt sind.

Da nun aber die Gleichung (10) die Form hat:

$$(17)\cdot\cdot\; p(y)^2 - q(y)^2 R_1(y) = (y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_\sigma)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\cdots(y-\eta_\sigma) \times (y-Y_1)(y-Y_2)\cdots(y-Y_\sigma),$$

ferner:

$$(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_\sigma)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\cdots(y-\eta_\sigma)$$

als Product der linken Seiten der Gleichungen (2) und (5), wie unmittelbar daraus zu erkennen, dass

$$f_k(z_1, \sqrt{R(z_1)}) + f_1(z_1, -\sqrt{R(z_1)}) f_{k-1}(z_1, \sqrt{R(z_1)}) + \cdots$$
$$+ f_{k-1}(z_1, -\sqrt{R(z_1)}) f_1(z_1, \sqrt{R(z_1)}) + f_k(z_1, -\sqrt{R(z_1)})$$

eine rationale Function von z_1 ist, in der Form darstellbar ist

$$y^{2\sigma} + \psi_1(z_1) y^{2\sigma-1} + \cdots + \psi_{2\sigma-1}(z_1) y + \psi_{2\sigma}(z_1) = 0,$$

worin

$$\psi_1(z_1), \ \psi_2(z_1), \cdots \psi_{2\sigma}(z_1)$$

rationale Functionen von z_1 sind, so werden nach (17) *die Coefficienten des Polynoms*

$$(y - Y_1)(y - Y_2) \cdots (y - Y_\sigma) = y^\sigma + \chi_1(z_1) y^{\sigma-1} + \cdots + \chi_\sigma(z_1)$$

rationale Functionen von z_1 sein, während die zu den Grössen Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_σ gehörigen Irrationalitäten nach den Gleichungen (12), *wie aus der oben gefundenen Eigenschaft der Coefficienten der Polynome $p(y)$ und $q(y)$ hervorgeht, rationale Functionen der zugehörigen Grössen Y und der Grösse z_1, multiplicirt mit der Irrationalität $\sqrt{R(z_1)}$, sein werden.*

Es bedarf kaum einer weiteren Erläuterung, dass sich dasselbe Resultat auch für den Fall des ungeraden σ ergiebt; denn setzt man

$$3\sigma = 2m - 1,$$

und bildet, wenn α eine Lösung der Gleichung $R_1(y) = 0$ bezeichnet, den Ausdruck

$$(\delta) \qquad (y - \alpha) P(y) - Q(y) \sqrt{R_1(y)},$$

in welchem $P(y)$ ein Polynom

$$m - 1 = \frac{3\sigma - 1}{2}^{\text{ten}}$$

Grades, $Q(y)$ vom

$$m - \sigma - 1 = \frac{\sigma - 1}{2}^{\text{ten}}$$

Grade ist, so wird man wieder die

$$\frac{3\sigma - 1}{2} + \frac{\sigma - 1}{2} + 1 = 2\sigma$$

Constantenquotienten so bestimmen können, dass der Ausdruck (δ) für die Werthecombinationen

$$y_1, \sqrt{R_1(y_1)}, \cdots y_\sigma, \sqrt{R_1(y_\sigma)}, \quad \eta_1, -\sqrt{R_1(\eta_1)}, \cdots \eta_\sigma, -\sqrt{R_1(\eta_\sigma)}$$

verschwindet, und es werden nunmehr alle weiteren Schlüsse dieselben bleiben, so dass sich wieder vermöge der Beziehung

$$(y - \alpha)^2 P(y)^2 - Q(y)^2 R_1(y)$$
$$= (y - \alpha)(y - y_1) \cdots (y - y_\sigma)(y - \eta_1) \cdots (y - \eta_\sigma)(y - Y_1) \cdots (y - Y_\sigma)$$

die Grössen

$$Y_1,\ Y_2,\ \cdots\ Y_\sigma$$

als Lösungen einer Gleichung ergeben, deren Coefficienten rational aus z_1 zusammengesetzt sind.

Hieraus folgt,

dass das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen sich in allen Fällen durch das folgende:

$$\frac{dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_0(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\frac{Y_1 dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2 dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_1(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{Y_1^{\sigma-1} dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^{\sigma-1} dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma^{\sigma-1} dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_{\sigma-1}(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

ersetzen lässt, in welchem

$$Y_1,\ Y_2,\ \cdots\ Y_\sigma$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von z_1 sind, und

$$\sqrt{R_1(Y_1)},\ \sqrt{R_1(Y_2)},\ \cdots\ \sqrt{R_1(Y_\sigma)}$$

sich als rationale Functionen der zugehörigen Y-Grössen und z_1 ausdrücken lassen, multiplicirt mit $\sqrt{R(z_1)}$,

ein Satz, der auch aus der Transformation der ϑ-Functionen der hyperelliptischen Integrale hergeleitet werden kann.

Wie die eben besprochene Vereinfachung des Transformationsproblems zur Herstellung beliebig vieler hyperelliptischer Integrale verwendet werden kann, die auf ebensolche Integrale niederer Ordnung reducirt werden können, ist leicht einzusehen; ich zeige in einer nächstens in Borchardt's Journal für Mathematik erscheinenden Arbeit die Anwendung des obigen Satzes auf die Ermittelung von hyperelliptischen Integralen, welche auf elliptische Integrale zurückführbar sind.

Wien, im März 1878.

Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann.

Von J. Lüroth in Carlsruhe.

Im ersten Bande, Seite 49, dieser Annalen habe ich gezeigt, dass es nicht möglich ist einer allgemeinen Curve vierter Ordnung ein Fünfseit so einzuschreiben, dass die zehn Schnittpunkte der fünf Seiten alle auf der Curve liegen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass es nicht möglich ist, der Gleichung einer allgemeinen Curve vierter Ordnung die specielle Form:

$$(1) \qquad A_1A_2A_3A_4 + A_1A_2A_3A_5 + A_1A_2A_4A_5 + A_1A_3A_4A_5 + A_2A_3A_4A_5 = 0$$

zu geben, in der die Zeichen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ganze homogene Functionen ersten Grades der homogenen Coordinaten $x_1x_2x_3$ bezeichnen. Ich bewies diesen Satz, indem ich zeigte, dass die linke Seite der Gleichung (1) sich nur um einen von den Variabeln unabhängigen Factor von einer Covariante der Curve

$$\varrho_1A_1^4 + \varrho_2A_2^4 + \varrho_3A_3^4 + \varrho_4A_4^4 + \varrho_5A_5^4 = 0$$

unterscheidet, in der ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, ϱ_5 passend bestimmte Constante bezeichnen. Wie aber Clebsch*) zuerst gefunden hat, enthält die letztere Gleichung nur 13 wesentliche Constante, daher die Gleichung (1) auch nur die gleiche Zahl enthalten kann, während in der allgemeinen Gleichung vierten Grades deren 14 auftreten.

In einer Abhandlung über „die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades"**) suchte Herr Geiser dann zu beweisen, dass der in Rede stehende Satz unrichtig sei, indem er annahm, dass drei Flächen zweiter Ordnung stets die ersten Polaren von drei Punkten in Bezug auf eine einzige Fläche dritter Ordnung seien, und von einer Raumfigur auf die ebene Curve vierter Ordnung überging mit Hülfe der von Hesse***) angewandten Betrachtungen. Frahm†) schlug den umgekehrten Weg ein und bewies die Unrich-

*) Crelle's Journal Bd. 59, Seite 143.

**) Ibid. Bd. 72, Seite 370; besonders von Seite 377 an.

***) Ibid. Bd. 49, Seite 279.

†) Diese Annalen Bd. VII, Seite 635.

tigkeit der von Geiser benutzten Voraussetzung mit Hülfe des von mir ausgesprochenen Satzes.

Erst in neuester Zeit hat Herr Toeplitz in seiner Inauguraldissertation „über das Flächennetz zweiter Ordnung (Breslau 1876)*) direct untersucht, ob sich drei Flächen zweiter Ordnung stets als Polaren einer Fläche dritter Ordnung auffassen lassen, und gefunden, dass dies nicht der Fall ist.

Diese Arbeit erinnerte mich an einen andern Beweis des Satzes über die Curven vierter Ordnung, den ich schon seit mehreren Jahren besitze und der des angewandten Princips wegen vielleicht nicht ohne Interesse ist.

Er gründet sich auf eine mir, bald nach dem Erscheinen meines ersten Beweises, von Herrn Kronecker gemachte Mittheilung des Inhalts, dass sich alle Fragen über die Möglichkeit von Darstellungen ganzer Functionen in speciellen Gestalten im Princip müssen beantworten lassen durch Betrachtung der Functionaldeterminanten der Functionen, welche bei Ausrechnung der speciellen Form als Coefficienten der Potenzen und Producte der Variabeln erscheinen. Ist nämlich für drei Variable $F(a, b, c, \cdots x_1, x_2, x_3)$ die specielle Form einer ganzen homogenen Function n^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3, mit den Constanten $a, b, c, \cdots$ und ist ausgerechnet und geordnet:

(2) $F(a, b, c, \cdots x_1, x_2, x_3) \equiv f_1(a, b, c, \cdots) x_1^n + f_2(a, b, c, \cdots) x_1^{n-1} x_2 + \cdots,$

so kann sie jede ganze homogene Function n^{ten} Grades darstellen, wenn man die Constanten $a, b, c, \cdots$ so bestimmen kann, dass $f_1(a, b, c, \cdots)$, $f_2(a, b, c, \cdots)$ u. s. w. beliebig gegebene Werthe erhalten. Dazu ist, wie bekannt, nöthig und hinreichend, dass die Functionaldeterminante der Functionen $f_1(a, b, c, \cdots)$, $f_2(a, b, c, \cdots) \cdots$ nach $a, b, c, \cdots$ von Null verschieden ist. Ist aber diese Determinante gleich Null, so ist die gewünschte Bestimmung der Constanten $a, b, c, \cdots$ nicht möglich und dann kann also $F(a, b, c, \cdots x_1 x_2 x_3)$ nicht *jede* Form n^{ten} Grades darstellen.

Um diesen Gedanken auszuführen, haben wir die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(a, b, c, \cdots)}{\partial a}, & \frac{\partial f_2(a, b, c, \cdots)}{\partial a}, & \cdots \\ \frac{\partial f_1(a, b, c, \cdots)}{\partial b}, & \frac{\partial f_2(a, b, c, \cdots)}{\partial b}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

zu betrachten. Die Gleichung (2) zeigt, dass die Elemente der ersten, zweiten $\cdots$ Zeile die Coefficienten der Potenzen und Producte der Variabeln aus den ganzen Functionen $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial b}$, $\cdots$ sind.

*) Auch diese Annalen Bd. XI, Seite 434.

Die Determinante verschwindet sicher, wenn man Grössen $\alpha, \beta, \cdots$ angeben kann, die nicht sämmtlich Null sind, so dass die Summen

$$\alpha \frac{\partial f_1}{\partial a} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial a} + \cdots$$
$$\alpha \frac{\partial f_1}{\partial b} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial b} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

alle den Werth Null haben. Dies kann man auch so ausdrücken: Die Determinante verschwindet, wenn man für die Potenzen und Producte der x, als *Symbole*, solche wirkliche Grössen setzen kann, dass die Functionen

$$\frac{\partial F}{\partial a}, \frac{\partial F}{\partial b}, \cdots \tag{3}$$

alle gleich Null werden.

Wenden wir dies Criterium zuerst an auf die schon von Clebsch*) beantwortete Frage, ob die Gleichung einer allgemeinen Curve vierter Ordnung in der speciellen Form

$$A_1^4 + A_2^4 + A_3^4 + A_4^4 + A_5^4 = 0 \tag{4}$$

geschrieben werden könne; wobei

$$A_i = A_{i1} x_1 + A_{i2} x_2 + A_{i3} x_3$$

gesetzt ist. Die eben mit $a, b, c, \cdots$ bezeichneten Grössen sind hier die 15 Constanten $A_{11} \cdots A_{53}$ und die 15 Functionen, welche hier den in (3) angeführten entsprechen, sind gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial A_{ik}} \equiv 4 A_i^3 x_k \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Man stelle nun in den Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 die Gleichung

$$\sum_{mn} B_{mn} u_m u_n = 0 \tag{4*}$$

der Curve zweiter Classe auf, welche die fünf Linien $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$, $A_5 = 0$ berührt, und definire die für die Symbole x zu setzenden Grössen durch die Bedingung, dass sie die Gleichung

$$(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^4 = u_x^4 = \left\{\sum_{mn} B_{mn} u_m u_n\right\}^2 \tag{5}$$

in den $u_1 u_2 u_3$ zu einer identischen machen. Dann besteht auch die Gleichung, welche aus dieser hervorgeht, indem man nach u_1, u_2, u_3 differentiirt, die Differentialquotienten mit v_1, v_2, v_3 resp. multiplicirt und addirt, nämlich

$$u_x^3 v_x = \sum_{mn} B_{mn} u_m u_n \cdot \sum_{mn} B_{mn} u_m v_n,$$

nach jenen Substitutionen identisch für alle Werthe der Variabeln u

---

*) A. o. a. O.

und v. Setzt man hier $u_1 = A_{i1}$, $u_2 = A_{i2}$, $u_3 = A_{i3}$, $v_k = 1$ und die beiden andern v gleich Null, so folgt, dass durch die in (4) definirten Substitutionen

$$A_i^3 x_k = \sum_{mn} B_{mn} \cdot A_{im} A_{in} \cdot \sum_m B_{mk} A_{im}$$
$$= 0$$

wird, weil $\sum_{mn} B_{mn} A_{im} A_{in} = 0$ ist, da die Linie $A_i = 0$ den Kegelschnitt (4*) berührt. Nach dem Früheren ist hiermit bewiesen, dass die Form (4) nicht die allgemeine Gleichung einer Curve vierter Ordnung sein kann.

Indem wir uns nun zu dem eigentlichen Thema dieses Aufsatzes wenden, wollen wir zuerst die Form der Gleichung $f = 0$ einer Curve vierter Ordnung ableiten, welcher ein Fünfseit eingeschrieben werden kann.

Es mögen $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$ die Gleichungen der Seiten dieses Fünfseits sein, in irgend einer speciellen Form, etwa in der, bei welcher die Coefficienten von x_3 in allen gleich -1 sind. Weil die Curve durch den Schnitt der Linie $a_1 = 0$ mit den vier andern Linien geht, stellt $f - p a_2 a_3 a_4 a_5 = 0$ die Gleichung einer Curve dar, welche ebenfalls durch jene vier Punkte geht. Bestimmt man nun p so, dass diese Curve auch noch durch einen fünften Punkt der Linie $a_1 = 0$ geht, so muss sie zerfallen in diese Linie und eine Curve dritter Ordnung, daher für dieses $p = p_1$

$$f - p_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \equiv a_1 b_1$$

wird.

In derselben Weise findet sich

$$f - p_2 a_1 a_3 a_4 a_5 \equiv a_2 b_2;$$

so dass

$$p_1 a_2 a_3 a_4 a_5 - a_2 b_2 \equiv p_2 a_1 a_3 a_4 a_5 - a_1 b_1$$

sein muss. Da a_2 nicht durch a_1 theilbar ist, muss $p_1 a_3 a_4 a_5 - b_2$ durch a_1 theilbar sein. Ist $-b_3$ der Quotient, der von der zweiten Ordnung ist, so folgt

$$f \equiv p_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + p_2 a_1 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 b_3.$$

Da aber auch

$$f \equiv p_3 a_1 a_2 a_4 a_5 + a_3 b_3'$$

sein muss, so muss $p_3 a_4 a_5 - b_3$ durch a_3 theilbar sein und folglich, wenn man den Quotienten $= - b_4$ setzt:

$$f \equiv p_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + p_2 a_1 a_3 a_4 a_5 + p_3 a_1 a_2 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 b_4$$

sich ergeben. Da endlich die Schnittpunkte von $f = 0$ mit $a_4 = 0$ auf den Linien $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_5 = 0$ gelegen sind, so muss

$$b_4 \equiv p_5 a_4 + p_4 a_5$$

sein. Damit ist für f die Form gefunden:

$$f \equiv p_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + p_2 a_1 a_3 a_4 a_5 + p_3 a_1 a_2 a_4 a_5 + p_4 a_1 a_2 a_3 a_5 + p_5 a_1 a_2 a_3 a_4$$

in der, wenn f nicht zerfällt, keiner der Coefficienten p gleich Null sein kann. Setzt man nun

$$P = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5},$$

$$A_i \equiv \frac{P}{p_i} a_i,$$

so folgt endlich:

$$(6) \quad f \equiv A_1 A_2 A_3 A_4 + A_1 A_2 A_3 A_5 + A_1 A_2 A_4 A_5 + A_1 A_3 A_4 A_5 + A_2 A_3 A_4 A_5$$

als die gesuchte Form.

Ist wie oben

$$A_i \equiv A_{i1} x_1 + A_{i2} x_2 + A_{i3} x_3,$$

so sind die 15 Constanten $A_{11} \cdots A_{53}$ wieder diejenigen, welche an die Stelle der früher mit $a, b, c, \cdots$ bezeichneten treten, wenn es sich darum handelt, zu entscheiden, ob (6) die allgemeine Form ist oder nicht. Die 15 in (3) angeführten Functionen entstehen durch Differentiation der rechten Seite von (6) nach A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ und sind also:

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 A_2 A_3 A_4 + x_1 A_2 A_3 A_5 + x_1 A_2 A_4 A_5 + x_1 A_3 A_4 A_5, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_3 A_1 A_2 A_3 + x_3 A_1 A_2 A_4 + x_3 A_1 A_3 A_4 + x_3 A_2 A_3 A_4, \end{cases}$$

die man in dem Schema

$$(7^*) \quad x_k A_l A_m A_n + x_k A_l A_m A_p + x_k A_l A_n A_p + x_k A_m A_n A_p, \qquad k = 1, 2, 3$$

zusammenfassen kann, wenn $l\,m\,n\,p$ vier der fünf Zahlen 1 2 3 4 5 sind. Multiplicirt man die für $k = 1, 2, 3$ aus (7^*) hervorgehenden Ausdrücke mit den willkürlichen Grössen B_1, B_2, B_3, addirt und bezeichnet $B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3$ mit B, so kann man aus ihnen die eine Form

$$(8) \quad B A_l A_m A_n + B A_l A_m A_p + B A_l A_n A_p + B A_m A_n A_p$$

ableiten.

Kann man für die Potenzen und Producte der x solche Substitutionen machen, dass die 5 Ausdrücke, die aus (8) sich ergeben, indem man für $lmnp$ 1234, 1235, 1245, 1345, 2345 setzt, zu Null werden bei unbestimmten Werthen von $B_1\, B_2\, B_3$, so machen diese Substitutionen auch die 15 Ausdrücke (7) zu Null und damit verschwindet dann die Functionaldeterminante. Indem wir wie gebräuchlich

$$(\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} A_{\alpha 1} & A_{\alpha 2} & A_{\alpha 3} \\ A_{\beta 1} & A_{\beta 2} & A_{\beta 3} \\ A_{\gamma 1} & A_{\gamma 2} & A_{\gamma 3} \end{vmatrix}, \qquad (\alpha\beta u) = \begin{vmatrix} A_{\alpha 1} & A_{\alpha 2} & A_{\alpha 3} \\ A_{\beta 1} & A_{\beta 2} & A_{\beta 3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

setzen, definiren wir die Substitutionen, welche für die Symbole x gesetzt werden sollen, dadurch, dass sie die Gleichung

$$(9) \qquad u_x^4 = \sum_{\alpha\beta} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha\beta u)^4 (\gamma\delta\varepsilon)}{(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\varepsilon)}$$

in u_1, u_2, u_3 zu einer identischen machen. Die Summe erstreckt sich dabei über die geordneten Combinationen der Zahlen 12345 zu je zweien, wobei $\alpha < \beta$ angenommen ist und $\gamma\delta\varepsilon$ diejenigen, nach der Grösse geordneten, drei Zahlen sind, welche $\alpha\beta$ zu den fünf 12345 ergänzen. So ist z. B. das erste Glied der Summe ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 5$)

$$- \frac{(12u)^4 (345)}{(123)(124)(125)};$$

das zweite würde, den Werthen $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 5$ entsprechend,

$$+ \frac{(13u)^4 (245)}{(132)(134)(135)}$$

sein, u. s. w.

Indem man die Gleichung (9) nach u_1, u_2, u_3 differentiirt, die Differentialquotienten mit v_1, v_2, v_3 multiplicirt und addirt und diese Operation noch zweimal wiederholt und dabei statt der v neue Grössen w und t einführt, entsteht die Gleichung

$$u_x v_x w_x t_x = \sum_{\alpha\beta} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha\beta u)(\alpha\beta v)(\alpha\beta w)(\alpha\beta t)(\gamma\delta\varepsilon)}{(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\varepsilon)},$$

die durch dieselben Substitutionen, welche in (9) definirt sind, in den u, v, w und t identisch wird.

Setzt man hier $u_i = B_i$, $v_i = A_{li}$, $w_i = A_{mi}$, $t_i = A_{ni}$ und denkt lmn nach der Grösse geordnet, so verschwinden alle Glieder der Summe, in welchen eine der beiden Zahlen α, β einer der Zahlen lmn gleich ist und es bleibt nur dasjenige Glied übrig, in welchem α gleich der kleineren Zahl i und β gleich der grösseren k der beiden Zahlen ist, welche lmn zu 12345 ergänzen. Da lmn nach der Grösse geordnet sein sollen, kann man $\gamma = l$, $\delta = m$, $\varepsilon = n$ setzen und findet dann, dass durch die Substitutionen (9)

$$BA_l A_m A_n = (-1)^{i+k} (ikB)(lmn)$$

wird. Dies Resultat zeigt auch, dass die Gleichung (9) nicht lauter Nullen liefert, die an die Stelle der Potenzen und Producte der x zu setzen sind. Denn wäre dies der Fall, so müsste auch beim Einsetzen in $BA_l A_m A_n$ Null entstehen, während der oben gefundene Werth sicher von Null verschieden ist, da wir hier stets annehmen, dass von den fünf Seiten des Fünfseits niemals drei durch denselben Punkt gehen.

Wendet man das gefundene Resultat an auf die aus (8) hervorgehenden fünf Ausdrücke, so erhält man der Reihe nach die Werthe:

$$-(123)(45B)+(124)(35B)-(134)(25B)+(234)(15B),$$
$$-(123)(45B)-(125)(34B)+(135)(24B)-(235)(14B),$$
$$+(124)(35B)-(125)(34B)-(145)(23B)+(245)(13B),$$
$$-(134)(25B)+(135)(24B)-(145)(23B)-(345)(12B),$$
$$+(234)(15B)-(235)(14B)+(245)(13B)-(345)(12B).$$

Diese fünf Summen haben aber alle den Werth Null. Denn setzt man in der verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} A_l & A_{l1} & A_{l2} & A_{l3} \\ A_m & A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} \\ A_n & A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \\ A_p & A_{p1} & A_{p2} & A_{p3} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = A_{q2}B_3 - A_{q3}B_2, \quad x_2 = A_{q3}B_1 - A_{q1}B_3, \quad x_3 = A_{q1}B_2 - A_{q2}B_1,$$

so erhält man die Gleichung:

$$(lqB)(mnp) - (mqB)(lnp) + (nqB)(lmp) - (pqB)(lmn) = 0,$$

aus deren linker Seite die fünf Summen oder ihr negatives hervorgehen, wenn man $lmnpq$ resp. gleich 12345, 12354, 12453, 13452, 23451 setzt. Da die Grössen B_1, B_2, B_3 hierbei ganz unbestimmt gelassen sind, so haben die Substitutionen (9) die Eigenschaft, die 15 Ausdrücke (7) zu annulliren; und damit ist der Beweis geliefert, dass die Functionaldeterminante, um die es sich hier handelt, den Werth Null hat, dass also die Form (6) nicht jede ganze Function vierter Ordnung darstellen kann. Es ist mir nicht gelungen, die Invariante zu finden, deren Verschwinden die Möglichkeit der Darstellung in der Form (6) bedingt.

Ich benutze diese Gelegenheit, um, freilich sehr verspätet, einen Fehler zu verbessern, der in der Arbeit im ersten Bande dieser Annalen auf Seite 40 sich findet und auf welchen mich der verstorbene Dr. Frahm hingewiesen hat.

Durch ein Versehen beim Rechnen mit Summenzeichen hatte ich gefunden, dass jede Gleichung von der Form (17) am angeführten Orte, auch wenn die in ihr auftretenden Zähler und Nenner *nicht* die dort angegebene Gestalt und Bedeutung haben, immer eine Curve vierter Ordnung mit verschwindender Invariante A darstelle. Da dies nicht der Fall ist, so sind die zwei letzten Sätze der Seite 40 von „Addirt man" an zu streichen. Der übrige Inhalt der Arbeit wird davon nicht berührt.

Carlsruhe, 27. März 1878.

Ueber eine Eigenschaft der Coefficienten in der Taylor'schen Reihe.

Von Axel Harnack in Dresden.

In einem Aufsatze, betitelt: „Notiz über eine bemerkenswerthe Eigenschaft der periodischen Reihen"*), hat Herr Töpler gezeigt, dass schon bei einer endlichen Anzahl beliebig ausgewählter Glieder der Fourier'schen Reihenentwickelung die Coefficienten einzeln vermittels der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können, indem man von der Forderung ausgeht: es sollen die Werthe einer Function $f(x)$ innerhalb eines reellen Intervalles von $-A$ bis $+A$ mit möglich kleinster Summe der Fehlerquadrate durch eine Reihe von der Form:

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k \sin \frac{k\pi x}{A} + \sum_{k=0}^{k=n} b_k \cos \frac{k\pi x}{A}$$

dargestellt werden. Es liegt nun nahe zu prüfen, ob ein analoger Satz auch für die Entwickelung einer Function in eine Potenzreihe existirt. Dies ist in der That der Fall, wenn die Methode der kleinsten Quadrate nicht für ein reelles Intervall, sondern für einen complexen Bereich verwandt wird.

Es sei gegeben die Function $f(z)$, welche innerhalb eines mit dem Radius R um den Punkt a beschriebenen Kreises eindeutig und stetig ist. In diesem Bereiche soll die Function mit grösstmöglicher Annäherung durch eine Reihe von $(n+1)$ Gliedern fortschreitend nach positiv ganzen Potenzen von $(z-a)$ dargestellt werden. Die möglichst grosse Annäherung werden wir, entsprechend der Methode der kleinsten Quadrate, dadurch zu erreichen suchen, dass die Summe der Quadrate der absoluten Beträge, gebildet von der Differenz:

$$(1) \qquad f(z) - \sum_{k=0}^{k=n} a_k (z-a)^k,$$

*) Nr. 26 und 27 des Anzeigers der K. K. Akademie der Wissensch. zu Wien, 1876, und Repertorium d. Math. Bd. I, p. 402.

für alle Werthe, welche sich auf einem Kreise mit dem Radius $r < R$ befinden, ein Minimum werde.

Setzt man $z - a = re^{\varphi i}$ und bezeichnet den complexen Werth von $f(z)$ mit $u + iv$, ferner die complexe zu bestimmende Grösse α_k explicite mit $a_k + ib_k$, so soll für jeden Werth von r

$$(2)\quad \int_0^{2\pi} \left\{u+iv-\sum_{k=0}^{k=n}(a_k+ib_k)r^k e^{k\varphi i}\right\}\left\{u-iv-\sum_{k=0}^{k=n}(a_k-ib_k)r^k e^{-k\varphi i}\right\} d\varphi$$

ein Minimum werden. Durch Differentiation der unter dem Integral stehenden Function nach den $2(n+1)$ Coefficienten: $a_0 \cdots a_n$, $b_0 \cdots b_n$ erhält man ebensoviele Gleichungen zur Berechnung derselben. Differentiirt man nach a_l, so folgt:

$$\int_0^{2\pi} \left\{u+iv-\sum_{k=0}^{k=n}(a_k+ib_k)r^k e^{k\varphi i}\right\} r^l e^{-l\varphi i}\, d\varphi$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left\{u-iv-\sum_{k=0}^{k=n}(a_k-ib_k)r^k e^{-k\varphi i}\right\} r^l e^{l\varphi i}\, d\varphi.$$

Zerlegt man diese Integrale in ihre einzelnen Bestandtheile und beachtet, dass, solange k und l von einander verschieden sind:

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm(k-l)\varphi i}\, d\varphi = 0,$$

dass dagegen für $k = l$:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

ist, so folgt:

$$a_l = \frac{1}{2\pi r^l}\int_0^{2\pi}(u\cos l\varphi + v\sin l\varphi)\, d\varphi.$$

Desgleichen durch Differentiation nach b_l:

$$b_l = \frac{1}{2\pi r^l}\int_0^{2\pi}(v\cos l\varphi - u\sin l\varphi)\, d\varphi.$$

Demnach wird:

$$(3)\quad a_l + ib_l = \alpha_l = \frac{1}{2\pi r^l}\int_0^{2\pi}(u+iv)e^{-l\varphi i}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-a)^{l+1}}\, dz,$$

also gleich dem Coefficienten der Taylor'schen Entwickelung.

Jedwedes Glied der Taylor'schen Reihe hat folglich für sich betrachtet die Eigenschaft, dass es mit der kleinstmöglichen Abweichung im oben definirten Sinne auf allen innerhalb des Convergenzgebietes befindlichen concentrischen Kreisen eine Darstellung der Function durch eine Potenz der Variabelen vermittelt. Diese Abweichung wird, wie die Berechnung des Integrales (2) mit Zuhülfenahme der Bedingung (3) lehrt, um so geringer, je mehr Glieder berücksichtigt werden. Denn der Werth desselben erhält die Form:

$$\int_0^{2\pi}(u^2+v^2)\,d\varphi - 2\pi\sum_{k=0}^{k=n}(a_k^2+b_k^2)r^{2k}. \tag{4}$$

Bemerkenswerth ist die Unabhängigkeit der Coefficienten auch von dem Modul des Bereiches, für welchen die Function berechnet werden soll, was bei der Fourier'schen Reihe zufolge ihrer Definition nicht stattfinden kann.

Das Resultat wird dagegen ein durchaus anderes, will man die Summe der Fehlerquadrate längs eines Radius, insbesondere also innerhalb eines reellen Intervalles betrachten. Auch wird die Unabhängigkeit der einzelnen Coefficienten von der Gliederzahl, welche für die Fourier'sche Reihe im reellen Intervalle und hier für jeden der concentrischen Kreise charakteristisch ist, nicht mehr bestehen. Der Grund für diesen die Rechnung erheblich vereinfachenden Umstand liegt in dem Verhalten der periodischen Functionen längs des Integrationsweges.

Dies tritt noch deutlicher hervor, wenn das allgemeinere Problem formulirt wird: Es sei innerhalb eines beliebigen einfach zusammenhängenden Bereiches die Function $f(z)$ eindeutig und continuirlich. Die Function $\psi(z)$ sei so definirt, dass ihr Modul längs der Umgrenzung constant gleich R ist und für einen beliebig gewählten Punkt innerhalb des Bereiches verschwindet. Man soll $f(z)$ mit möglichst grosser Annäherung durch eine nach positiv ganzen Potenzen von $\psi(z)$ fortschreitende Reihe von $n+1$ Gliedern darstellen, derart, dass die Summe der Quadrate der absoluten Beträge, gebildet von der Differenz

$$f(z) - \sum_{k=0}^{k=n}\alpha_k\overline{\psi(z)}^k, \tag{5}$$

für alle Werthe, welche sich auf der Grenzlinie oder überhaupt auf Curven mit constantem Modul von $\psi(z)$ befinden, ein Minimum werde. Denn setzt man $\psi(z) = re^{\varphi i}$, so tritt unmittelbar die bekannte Eigenschaft zu Tage, dass auf allen diesen Integrationswegen

$$\int\psi'(z)\cdot\overline{\psi(z)}^m\,dz = 0,$$

so lange die ganze Zahl m von -1 verschieden, und dass

$$\int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \cdot dz = 2\pi i$$

ist. Demzufolge erhält man, ebenso wie im oben behandelten speciellen Falle, durch Differentiation nach den Coefficienten den Werth je eines derselben, und zwar ist:

$$\alpha_l = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{\psi(z)^{l+1}}\,\psi'(z)\,dz\,, \tag{6}$$

was zu der Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe führt.

Dieselbe Eigenschaft kann auch auf die analogen Reihenentwickelungen für eindeutige Functionen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen ohne Unstetigkeitsstellen mit entsprechender Formulirung des Problemes übertragen werden. Doch ist es nur Zweck dieser Note zu zeigen, dass sich diese von Herrn Töpler für periodische Functionen mit reellen Intervallen aufgedeckte Eigenschaft auch für das complexe Gebiet verwerthen lässt.

Dresden, April 1878.

Zur Theorie der reciproken Radien.

Von H. E. Grassmann.

Der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. mitgetheilt von C. Neumann.

Es sei gegeben eine Kugelfläche (o, H), d. i. eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt o und dem Halbmesser H. Lässt man von o einen Strahl ausgehen, und markirt auf demselben irgend zwei der Relation

$$(1)\qquad (o\xi)\,(ox) = H^2$$

entsprechende Punkte ξ, x, so heisst bekanntlich jeder von diesen beiden Punkten das *Spiegelbild* des andern in Bezug auf die Kugelfläche (o, H). Auch pflegt man die beiden Punkte kurzweg *correspondirende* oder *conjugirte* Punkte zu nennen. — Sind zwei Paare correspondirender Punkte ξ, x und η, y gegeben, so ist nach (1):

$$(2)\qquad (o\xi)\,(ox) = (o\eta)\,(oy) = H^2,$$

und folglich

$$(3)\qquad \Delta(o\xi\eta) \sim \Delta(oyx).$$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt sofort:

$$(4)\qquad \frac{(\xi\eta)}{(xy)} = \frac{(o\xi)}{(oy)} = \frac{(o\eta)}{(ox)} = \sqrt{\frac{(o\xi)\,(o\eta)}{(ox)\,(oy)}}.$$

Bei einer frühern Gelegenheit*) habe ich nun gezeigt, dass diese Relationen (4) gültig bleiben, wenn man die correspondirenden Punkte η, y durch zwei einander correspondirende *Kugelflächen* σ, s ersetzt, dass nämlich die Formeln stattfinden:

$$(5)\qquad \frac{(\xi\sigma)}{(xs)} = \frac{(o\xi)}{(os)} = \frac{(o\sigma)}{(ox)} = \sqrt{\frac{(o\xi)\,(o\sigma)}{(ox)\,(os)}};$$

nur sind in diesem Fall unter $(o\sigma)$, $(\xi\sigma)$ und (os), (xs) die von den Punkten o, ξ, x an σ resp. s gelegten *Tangenten* zu verstehen, jede Tangente gerechnet vom Ausgangspunkt bis zum Berührungspunkt.

---

*) Nämlich in meinen „*Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential*" (Leipzig bei B. G. Teubner, 1877), vergl. daselbst S. 358.

Für diesen Satz, den ich a. a. O. *analytisch* bewiesen habe, hat einer meiner Zuhörer Herr Stud. Grassmann einen einfachen *geometrischen* Beweis gefunden, den ich mir hier mitzutheilen erlaube.

Construirt man all' diejenigen zu σ orthogonalen Kugelflächen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, deren Mittelpunkte in der gegebenen geraden Linie $o\xi x$ liegen, so werden bekanntlich all' diese Kugelflächen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ sich schneiden in einer gewissen Kreisperipherie, deren einzelne Punkte mit $\zeta, \zeta', \cdots$ bezeichnet sein mögen*). Construirt man nun die zu $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ in Bezug auf (o, H) conjugirten Kugelflächen $a, b, c, \cdots$, so werden offenbar diese letztern ihre Mittelpunkte ebenfalls in der Linie $o\xi x$ haben, ferner orthogonal sein zur Kugelfläche s, und endlich durch eine Kreisperipheri $z, z', \cdots$ gehen, welche zu $\zeta, \zeta', \cdots$ in Bezug auf (o, H) conjugirt ist.

Bezeichnet p einen variablen Punkt der Linie $o\xi x$, so ist nach der Definition von ζ offenbar $(p\zeta) = (p\sigma)$, wo $(p\sigma)$ die Länge der von p an σ gelegten Tangente bezeichnet. Giebt man also z. B. dem Punkte p die speciellen Lagen o und ξ, so wird:

$$(6) \qquad (o\zeta) = (o\sigma), \qquad (\xi\zeta) = (\xi\sigma).$$

In analoger Weise ergiebt sich: $(pz) = (ps)$, also z. B.

$$(7) \qquad (oz) = (os), \qquad (xz) = (xs).$$

Da nun ξ, x conjugirte Punkte sind, und ζ, z ebenfalls, so ist nach Formel (4):

$$(8) \qquad \frac{(\xi\zeta)}{(xz)} = \frac{(o\xi)}{(oz)} = \frac{(o\zeta)}{(ox)} = \sqrt{\frac{(o\xi)(o\zeta)}{(ox)(oz)}};$$

also mit Rücksicht auf (6), (7):

$$(9) \qquad \frac{(\xi\sigma)}{(xs)} = \frac{(o\xi)}{(os)} = \frac{(o\sigma)}{(ox)} = \sqrt{\frac{(o\xi)(o\sigma)}{(ox)(os)}}.$$

Dies aber ist der zu beweisende Satz, wie er in (5) angegeben war.

---

*) Allerdings ist diese Peripherie $\zeta, \zeta', \cdots$ nur dann *reell*, wenn die Kugelfläche σ von der geraden Linie $o\xi x$ *nicht* geschnitten wird.

A theorem on groups.

Von A. Cayley in Cambridge.

The following theorem is very simple; but it seems to belong to a class of theorems, the investigation of which is desirable.

I consider a substitution-group of a given order upon a given number of letters; and I seek to *double* the group, that is to derive from it a group of twice the order upon twice the number of letters. This can be effected for *any* group, in a manner which is selfevident and in nowise interesting: but in a different manner for a *commutative* group (or group such that any two of its substitutions satisfy the condition $AB = BA$): it is to be observed that the double group is not in general commutative.

Let the letters of the original group be $abcde\cdots$, we may for shortness write $U = abcde\cdots$; and take U as the primitive arrangement: and let the group then be $1, A, B, \cdots$ where $A, B, \cdots$ represent substitutions: the corresponding arrangements are U, AU, $BU, \cdots$ and these may for shortness be represented by $1, A, B, \cdots$; viz. $1, A, B, \cdots$ represent, properly and in the first instance, substitutions; but when it is explained that they represent arrangements, then they represent the arrangements U, AU, $BU, \cdots$.

For the double group the letters are taken to be $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \cdots$ and $a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 \cdots$, $= U_1$ and U_2 suppose, and $U_1 U_2$ is regarded as the primitive arrangement; A_1 and A_2 denote the same substitutions in regard to U_1, U_2 respectively, that A denotes in regard to U: and so for B_1, B_2 etc.; moreover 12 denotes the substitution $(a_1 a_2)(b_1 b_2)$ $(c_1 c_2)(d_1 d_2)(e_1 e_2)\cdots$, or interchange of the suffixes 1 and 2. The substitutions A_1, A_2, or any powers of these A_1^α, A_2^β, are obviously commutative; applying them to the primitive arrangement $U_1 U_2$, we have $A_1^\alpha A_2^\beta U_1 U_2$ and $A_2^\beta A_1^\alpha U_1 U_2$ each $= A_1^\alpha U_1 A_2^\beta U_2$. But A_1^α, A_2^β are not commutative with 12, we have for instance $12\, A_1^\alpha \cdot U_1 U_2$ $= 12\, A_1^\alpha U_1 \cdot U_2 = A_2^\alpha U_2 \cdot U_1$, but $A_1^\alpha\, 12\, U_1 U_2 = A_1^\alpha \cdot U_2 U_1 = U_2 \cdot A_1^\alpha U_1$. If instead of the substitutions we consider the arrangements obtained

by operating upon $U_1 U_2$, then we may for shortness consider for instance $A_1 A_2$ as denoting the arrangement $A_1 U_1 \cdot A_2 U_2$, but observe that in this use of the symbols the A_1, A_2 are not commutative, $A_2 A_1$ would denote the different arrangement $A_2 U_2 \cdot A_1 U_1$: in this use of the symbols 1 would denote $U_1 U_2$ and 12 would denote $U_2 U_1$, but it would be clearer to use 12, 21 as denoting $U_1 U_2$ and $U_2 U_1$ respectively.

These explanations having been given, I remark that in every case the substitution-group $1, A, B, \cdots$ gives the double group

$$\begin{array}{lll} 1, & A_1 A_2, & B_1 B_2, \cdots \\ 12, & 12 A_1 A_2, & 12 B_1 B_2, \cdots \end{array}$$

as is at once seen to be true: but further when the original group $1, A, B, \cdots$ is commutative, then if m be any integer number, such that $m^2 \equiv 1$ (mod. the order of the original group), we have also the double group

$$\begin{array}{lll} 1, & A_1 A_2^m, & B_1 B_2^m, \cdots \\ 12, & 12 A_1 A_2^m, & 12 B_1 B_2^m, \cdots \end{array}$$

where of course if the order of the original group ($= \mu$ suppose) be prime we have $m \equiv 1$ or else $m \equiv -1$ (mod. μ), say $m = 1$ or $\mu - 1$; but if the order μ be composite, then the number of solutions may be greater.

The condition in order to the existence of the double group of course is that in the system of substitutions just written down, the combination of any two substitutions may give a substitution of the system. And this is in fact the case in virtue of the formula

$$\begin{array}{ll} 1^\circ. & A_1 A_2^m \cdot \quad B_1 B_2^m = A_1 B_1 (A_2 B_2)^m, \\ 2^\circ. & A_1 A_2^m \cdot 12 B_1 B_2^m = 12 A_1^m B_1 (A_2^m B_2)^m, \\ 3^\circ. & 12 A_1 A_2^m \cdot \quad B_1 B_2^m = 12 (A_1 B_1)(A_2 B_2)^m, \\ 4^\circ. & 12 A_1 A_2^m \cdot 12 B_1 B_2^m = A_1^m B_1 \cdot (A_2^m B_2)^m, \end{array}$$

inasmuch as $1, A, B, \cdots$ being a group, AB and $A^m B$ are each of them a substitution of the group, $= C$ suppose; we have of course in like manner $A_1 B_1 = C_1$, $A_2 B_2 = C_2$ etc., and the right hand sides of the four formulae are thus of the forms $C_1 C_2^m$, $12 C_1 C_2^m$, $12 C_1 C_2^m$ $\cdot C_1 C_2^m$ respectively, viz. these are substitutions of the system.

To prove for instance the formula 2°, considering the arrangements obtained by operating upon $U_1 U_2$, we have $B_1 B_2^m U_1 U_2 = B_1 B_2^m$, $12 B_1 B_2^m U_1 U_2 = B_2 B_1^m$, $A_1 A_2^m \cdot 12 B_1 B_2^m U_1 U_2 = A_2^m B_2 \cdot A_1 B_1^m$, where

of course the expressions on the right hand side denote arrangements. By reason that the original group is commutative $(A^m B)^m$ is $= A^{m^2} B^m$ or since $m^2 \equiv 1 \pmod{\mu}$ this is $= AB^m$; hence also $(A_2^m B_2)^m = A_2 B_2^m$: hence considering as before the arrangements obtained by operating on $U_1 U_2$ we have

$$(A_2^m B_2)^m \, U_1 U_2 = 1 \cdot A_2 B_2^m; \quad A_1^m B_1 (A_2^m B_2)^m \, U_1 U_2 = A_1^m B_1 A_2 B_2^m,$$

and

$$12\, A_1^m B_1 (A_2^m B_2)^m \, U_1 U_2 = A_2^m B_2 A_1 B_1^m,$$

where of course the right hand sides denote arrangements. Hence in the formula 2°, the two substitutions operating on $U_1 U_2$ give each of them the same arrangement $A_2^m B_2 \cdot A_1 B_1^m$, that is the two substitutions are equal. And similarly the other formulae 1°, 3°, 4° may be proved.

By interchanging in the formulae A and B I obtain

1°. $A_1 A_2^m \cdot B_1 B_2^m = A_1 B_1 (A_2 B_2)^m$;

$B_1 B_2^m \cdot A_1 A_2^m = B_1 A_1 (B_2 A_2)^m = A_1 B_1 (A_2 B_2)^m$;

which is $= A_1 A_2^m \cdot B_1 B_2^m$;

2° and 3°. $A_1 A_2^m \cdot 12\, B_1 B_2^m = 12\, A_1^m B_1 (A_2^m B_2)^m$;

$12\, B_1 B_2^m \cdot A_1 A_2^m = 12\, B_1 A_1 (B_2 A_2)^m = 12\, A_1 B_1 (A_2 B_2)^m$,

which is not $= A_1 A_2^m \cdot 12\, B_1 B_2^m$;

3° and 2°. $12\, A_1 A_2^m \cdot B_1 B_2^m = 12\, A_1 B_1 (A_2 B_2)^m$;

$B_1 B_2^m \cdot 12\, A_1 A_2^m = 12\, A_1 B_1^m (A_2 B_2^m)^m = 12\, A_1 B_1^m A_2^m B_2$,

which is not $= 12\, A_1 A_2^m \cdot B_1 B_2^m$;

4°. $12\, A_1 A_2^m \cdot 12\, B_1 B_2^m = A_1^m B_1 (A_2^m B_2)^m$;

$12\, B_1 B_2^m \cdot 12\, A_1 A_2^m = A_1 B_1^m (A_2 B_2^m)^m = (A_1^m B_1)^m A_2^m B_2$,

which is not $= 12\, A_1 A_2^m \cdot 12\, B_1 B_2^m$;

that is, in the double group any two substitutions of the form $A_1 A_2^m$ are commutative, but a substitution of this form is not in general commutative with a substitution of the form $12\, B_1 B_2^m$, nor are two substitutions of the lastmentioned form $12\, A_1 A_2^m$ in general commutative with each other; hence the double group is not in general commutative.

In the formula 4° writing $B = A$, we have

$$(12\,A_1 A_2^m)^2 = A_1^{m+1} A_2^{m^2+m}, \; = A_1^{m+1} \cdot A_2^{m+1};$$

and hence if λ is the least integer value such that

$$\lambda(m+1) \equiv 0 \pmod{\mu}$$

we have $(12\,A_1 A_2^m)^{2\lambda} = 1$, viz. in the double group the substitutions of the second row are each of them of an order not exceeding 2λ (the substitution 12 is of course of the order 2). In particular if $m = \mu - 1$, then $\lambda = 1$ and the substitutions of the second row are each of them of the order 2.

As the most simple instance of the theorem, suppose that the original group is the group 1, (abc), (acb), or say 1, Θ, Θ^2, of the cyclical substitutions upon the 3 letters abc. Here $m^2 \equiv 1 \pmod 3$ or except $m = 1$ the only solution is $m = 2$, and thence $\lambda = 1$. The double group is a group of the order 6 on the letters $a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2$: viz. writing $\Theta = (abc)$, and therefore $\Theta_1 = (a_1 b_1 c_1)$, $\Theta_1^2 = (a_1 c_1 b_1)$, $\Theta_2 = (a_2 b_2 c_2)$, $\Theta_2^2 = (a_2 c_2 b_2)$, also writing $12 = \alpha$, the substitutions are

$$\begin{array}{ccc} 1, & \Theta_1\Theta_2^2, & \Theta_1^2\Theta_2, \\ \alpha, & \alpha\Theta_1\Theta_2^2, & \alpha\Theta_1^2\Theta_2, \end{array}$$

the arrangements corresponding to the second row of substitutions are $a_2 b_2 c_2 a_1 b_1 c_1$, $b_2 c_2 a_2 c_1 a_1 b_1$, $c_2 a_2 b_2 b_1 c_1 a_1$ viz. the substitutions are $(a_1 a_2)(b_1 b_2)(c_1 c_2)$, $(a_1 b_2)(b_1 c_2)(c_1 a_2)$, $(a_1 c_2)(b_1 a_2)(c_1 b_2)$, each of them of the second order as they should be.

I take the opportunity of mentioning a further theorem. Let μ be the order of the group, and a the order of any term A thereof (a being of course a submultiple of μ): and let the term A be called quasi-positive when $\mu\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ is even, quasi-negative when $\mu\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ is odd. The theorem is that the product of two quasi-positive terms, or of two quasi-negative terms, is quasi-positive; but the product of a quasi-positive term and a quasi-negative term is quasi-negative. And it follows hence, that either the terms of a group are all quasi-positive, or else one half of them are quasi-positive and the other half of them are quasi-negative.

The proof is very simple: a term A of the group operating on the μ terms $(1, A, B, C, \cdots)$ of the group, gives these same terms in a different order, or it may be regarded as a substitution upon the μ symbols $1, A, B, C, \cdots$; so regarded it is a *regular* substitution (this is a fundamental theorem, which I do not stop to prove), and

hence since it must be of the order a it is a substitution composed of $\frac{\mu}{a}$ cycles, each of a letters. But in general a substitution is positive or negative according as it is equivalent to an even or an odd number of inversions; a cyclical substitution upon a letters is positive or negative according as $a - 1$ is even or odd; and the substitution composed of the $\frac{\mu}{a}$ cycles is positive or negative according as $\frac{\mu}{a}\left(a - 1\right)$, that is $\mu\left(1 - \frac{1}{a}\right)$, is even or odd. Hence by the foregoing definition, the term A, according as it is quasi-positive or quasi-negative, corresponds to a positive substitution or to a negative substitution; and such terms combine together in like manner with positive and negative substitutions.

Cambridge, 3rd April 1878.

Sätze über reguläre Polygone.

Von

P. MEUTZNER in Meissen.

Bei Verfassung einer Programmabhandlung*) über diejenigen zwei allgemeinsten Theoreme, in denen nach Chasles' Geschichte der Geometrie**) die „General Theorems“ betitelte Schrift des englischen Mathematikers Stewart gipfelt, wurde ich auf die im Folgenden behandelten, reguläre Polygone betreffenden Theoreme geführt, welche, soweit meine Kenntniss der an Stewart's Lehrsätze sich anknüpfenden Literatur reicht, als neu scheinen bezeichnet werden zu dürfen.

Wie so manche andere Programmabhandlung ist auch die erwähnte nur innerhalb enger Kreise bekannt geworden, und deshalb glaube ich es wagen zu können, das in jener Abhandlung enthaltene Neue in diesen Blättern nochmals zu publiciren, zumal da einerseits in historischer Hinsicht jenen Sätzen ein gewisses Interesse eigen sein dürfte, insofern sie eine Lücke in den Stewart'schen Theoremen ausfüllen, da sie andererseits formell die überraschendste Aehnlichkeit mit dem ersten allgemeinen Theorem Stewart's und dessen Consequenzen aufweisen, und da sie endlich noch etwas allgemeiner gefasst werden können und weitere Folgerungen herzuleiten gestatten als es a. a. O. geschehen.

Um die Richtigkeit vorstehender Bemerkung deutlich hervortreten zu lassen, ist es erforderlich, das erste allgemeine Theorem Stewart's seinem Wortlaute nach hier anzuführen. In der Uebersetzung des Chasles'schen Geschichtswerkes heisst es: „Man denke sich ein reguläres, einem Kreise vom Radius R umgeschriebenes Polygon von m Seiten und es sei n irgend eine Zahl kleiner als m; wenn man nun von irgend einem Punkte (der innerhalb des Polygones liegt, wenn n ungerade, und beliebig angenommen werden kann, wenn n gerade ist) Perpendikel auf die Seiten des Polygones fällt, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen dieser Perpendikel gleich:

*) Programm der Fürstenschule Meissen, 1874.

**) Chasles' Geschichte der Geometrie übersetzt von Sohncke, p. 173 seq.

(1) $m\left\{R^n + A\cdot v^2\cdot R^{n-2} + B\cdot v^4\cdot R^{n-4} + C\cdot v^6\cdot R^{n-6} + \cdot \text{ u. s. w.}\right\}$,

worin v die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte des Kreises bedeutet, und A der Coefficient des dritten Gliedes in der Entwickelung der n^{ten} Potenz eines Binoms, multiplicirt durch $\frac{1}{2}$, ist; ebenso B der Coefficient des fünften Gliedes in der Binomialformel, multiplicirt durch $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$; C der Coefficient des siebenten Gliedes, multiplicirt durch $\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$ u. s. f., so dass

$$A = \frac{n\cdot(n-1)}{2^2},$$

$$B = \frac{n\cdot(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2^2\cdot 4^2},$$

$$C = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} \quad \text{u. s. f.“}$$

Fällt der Punkt auf die Peripherie, d. h. wird $v = R$, so hat jene Summe den Werth:

(2) $$m\cdot R^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\; n}$$

und sie reducirt sich insonderheit für $n = 1$ auf

(3) $$mR.$$

Zur Ableitung der neuen Sätze denke man sich auf der Peripherie eines Kreises vom Radius R je in gleichen Abständen von einander m Punkte markirt, von denen aus auf eine in der Entfernung v vom Centrum verlaufende Gerade die Normalen $p_0, p_1, \cdots p_{m-1}$ gefällt sein mögen. Je nachdem jene Gerade die Verbindungslinie irgend zweier aufeinanderfolgender Punkte durchschneidet oder ganz ausserhalb des durch die Verbindungslinien gebildeten Polygones liegt, erhält man für die Länge der Normalen p_k die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} p_k &= R\cos\left(\frac{k}{m}2\pi+\alpha\right) - v \\ p_k &= v - R\cos\left(\frac{k}{m}2\pi+\alpha\right) \end{aligned}\right\}\quad k = 0,\ 1,\ \cdots\ m-1.$$

Darin bedeutet α den Winkel, den v mit dem nächsten der nach den m Punkten gezogenen Radien einschliesst. —

Geht man von der, der zweiten Lage der Geraden entsprechenden Relation aus und bildet damit die Summe der n^{ten} Potenzen der Normalen, so ergiebt sich:

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} p_k^n = \sum_{k=0}^{k=m-1}\left\{v - R\cdot\cos\left(\frac{k}{m}2\pi+\alpha\right)\right\}^n,$$

d. i.

$$(4)\quad \sum_{k=0}^{k=m-1} p_k^n = m v^n \mp \sum_{u=1}^{u=n} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-u+1)}{u!} v^{n-u}\cdot R^u \cdot \sum_{k=0}^{k=m-1} \cos^u\left(\frac{k}{m}2\pi+\alpha\right).$$

Es lässt sich nun bekanntlich zeigen, dass, solange $u < m$ ist, für ungerade Werthe von u die Gleichung gilt:

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} \cos^u\left(\frac{k}{m}2\pi+\alpha\right) = 0.$$

In Folge hiervon verschwinden in der obigen Doppelsumme alle negativen Terme und, wenn demgemäss der Summationsbuchstabe u durch $2u$ ersetzt wird, gewinnt Gl. (4) die Gestalt:

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} p_k^n = m v^n + \sum_{u=1} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-2u+1)}{2u!} v^{n-2u} R^{2u} \cdot \sum_{k=0}^{k=m-1} \cos^{2u}\left(\frac{k}{m}2\pi+\alpha\right),$$

wo in der oberen Grenze für u bald der Werth $\frac{1}{2}(n-1)$, bald $\frac{1}{2}n$ zu setzen ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Benützt man jetzt endlich die Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} \cos^{2u}\left(\frac{k}{m}2\pi+\alpha\right) = m\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2u-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots 2u},$$

so erhält man schliesslich als Resultat:

$$(5)\quad \sum_{k=0}^{k=m-1} p_k^n = m\left\{v^n + \sum_u \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-2u+1)}{2^2\cdot4^2\cdots(2u)^2} v^{n-2u} R^{2u}\right\},$$

wo über die Grenzen von u das oben Gesagte gilt.

Da, falls n gerade ist,

$$\left\{v - R\cos\left(\frac{k}{m}2\pi+\alpha\right)\right\}^n = \left\{R\cos\left(\frac{k}{m}2\pi+\alpha\right) - v\right\}^n,$$

so gilt in diesem Falle Gl. (5) bei jeder beliebigen Lage der Geraden, während für ungerade Werthe von n sie nur Bedeutung behält, wenn die Gerade das durch die Verbindung der m Punkte entstehende eingeschriebene Polygon nicht schneidet.

Bedenkt man, dass betreffs der Lage der m Punkte auf der Peripherie des Kreises nur die Annahme gemacht wurde, sie seien gleichweit von einander entfernt, so können dieselben gleicher Weise als die Scheitelpunkte eines regelmässigen, dem Kreise R *eingeschriebenen* und auch als die Tangentialpunkte eines regelmässigen, dem Kreise R *umgeschriebenen* m-Ecks betrachtet werden. Dies führt auf folgenden Satz, welcher in möglichstem Anschlusse an den Wortlaut des obigen Stewart'schen Theorems etwa folgendermassen ausgesprochen werden kann:

„Man denke sich ein reguläres, einem Kreise vom Radius R ein- beziehungsweise umgeschriebenes Polygon von m Seiten und es sei n irgend eine Zahl kleiner als m; wenn man nun auf irgend eine Gerade (die *ausserhalb* des eingeschriebenen, bez. *einschreibbaren* m-Ecks liegen muss, wenn n ungerade, und beliebig angenommen werden kann, wenn n gerade ist) Perpendikel von den Scheitelpunkten des eingeschriebenen, bez. von den Tangentialpunkten des umgeschriebenen Polygons fällt, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen dieser Perpendikel gleich:

$$(6) \quad m \cdot \{v^n + A \cdot R^2 \cdot v^{n-2} + B \cdot R^4 \cdot v^{n-4} + C \cdot R^6 \cdot v^{n-6} + \text{u. s. f.}\},$$

worin v die Entfernung der Geraden vom Mittelpunkt des Kreises bedeutet und die Coefficienten $A, B, C, \cdots$ die früher angegebene Bedeutung besitzen."

Wie man sofort übersieht, geht die jetzige Gleichung aus Gl. (1) dadurch hervor, dass man in letzterer nur v und R wechselweise vertauscht.

Wird insbesondere die Gerade zur Tangente des Kreises, d. h. wird $v = R$, so erhält man zunächst für die in Rede stehende Summe:

$$\sum p^n = mR^n \cdot \left\{1 + \sum_u \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-2u+1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2u)^2}\right\}.$$

Sofern jedoch

$$1 + \sum_u \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-2u+1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdots\cdots (2u)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n}$$

wird, wiederum in völliger Uebereinstimmung mit Gl. (2), dann

$$(7) \qquad \sum p^n = m \cdot R^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots n}.$$

Für gerade Werthe von n ist, wie oben bemerkt wurde, die Lage der Geraden ganz beliebig; für ungerade Werthe von n ist die Grenzlage der Linie genauer dahin zu fixiren: die Gerade darf das dem Kreise eingeschriebene, bez. einschreibbare m-Eck nicht scheiden; jedoch darf sie im Speciellen durch einen Scheitel- bez. Tangentialpunkt gehen, oder, äussersten Falles, mit einer Seite des eingeschriebenen, bez. einschreibbaren m-Ecks zusammenfallen, ohne dass der Satz (6) seine Gültigkeit verliert.

Da die Gl. (6) nur eine Function von v und nicht auch von α ist, so kann man sofort folgern: „Beschreibt man einen mit dem Kreise R concentrischen Kreis vom Radius v, so besitzen die sämmtlichen Tangenten des letzteren die Eigenthümlichkeit, dass die Summen der n^{ten} Potenzen der Perpendikel, welche man von den Scheitel- bez. Tangentialpunkten eines dem Kreise R ein- bez. umgeschriebenen regelmässigen m-Ecks auf sie fällen kann, eine constante Grösse ist, deren Werth durch Gl. (6) wiedergegeben wird."

Denkt man sich ferner in oder um denselben Kreis verschiedene reguläre Polygone von den Seitenzahlen m', m'', $\cdots$ beschrieben und von den Scheitel- bez. Tangentialpunkten dieser Polygone auf eine und dieselbe Gerade die Perpendikel p', p'', $\cdots$ gefällt, so ergiebt die Anwendung der Gl. (5), dass die Summen der n^{ten} Potenzen dieser Perpendikel sich wie die Seitenzahlen der zugehörigen Polygone verhalten.

Setzt man endlich in (5) $n = 1$, so verwandelt sich jene Gleichung in

$$\sum p_k = m \cdot v \tag{8}$$

und, da diese Relation auch von R ganz unabhängig ist, so erhält man hieraus folgenden interessanten Satz: „Beschreibt man in oder um jeden Kreis eines *Systemes* concentrischer Kreise ein *bestimmtes* regelmässiges m-Eck, und zwar in ganz willkürlichen Lagen, so ist die Summe der Normalen, die man von den Scheitel- oder Tangentialpunkten dieser m-Ecke auf eine in der Entfernung v vom gemeinschaftlichen Centrum verlaufende Gerade fällt, stets von gleichem Werthe, nämlich immer gleich dem m-fachen Abstande der Geraden. Ueber die Grenzlage der Geraden gelten die obigen Bestimmungen, natürlich bezogen auf den äussersten Kreis des gegebenen Systemes.“

Ueber die Zusammensetzung der nach dem Weber'schen Gesetz sich ergebenden Beschleunigungen.

(Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 11. März 1878.)

Von C. Neumann in Leipzig.

Es seien m, M, M_1 drei in gerader Linie liegende Massenpunkte, und zwar sei m längs dieser Linie, welche als x-Axe des Coordinatensystems dienen mag, *frei beweglich*, während M und M_1 *feste* Lagen besitzen: wie solches angedeutet sein mag durch folgende Figur, in welcher 0 den Anfangspunkt des Coordinatensystems und x die variable Abscisse des Punktes m bezeichnet:

Bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes wird alsdann die von M auf m in der Richtung der x-Axe ausgeübte Kraft den Werth haben $A + Bx''$, wo A und B gewisse Functionen von x, x' sind, auf deren genauere Werthe es hier nicht weiter ankommt; desgleichen, wird die von M_1 auf m ausgeübte Kraft den Werth haben $A_1 + B_1 x''$, wo A_1 und B_1 wiederum Functionen von x, x' sind. Dabei bezeichnet x' die augenblickliche Geschwindigkeit, und x'' die augenblickliche Beschleunigung des Punktes m.

Demgemäss ergeben sich für die Bewegung des Punktes m, je nachdem derselbe der *alleinigen Wirkung von M*, oder der *alleinigen Wirkung von M_1*, oder endlich der *gleichzeitigen Einwirkung von M und M_1* unterliegt, der Reihe nach die Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad mx'' = A + Bx'',$$

$$(2) \qquad mx'' = A_1 + B_1 x'',$$

$$(3) \qquad mx'' = (A + A_1) + (B + B_1)x'';$$

denen man offenbar auch folgende Gestalt geben kann:

$$x'' = \frac{A}{m - B}, \tag{1}$$

$$x'' = \frac{A_1}{m - B_1}, \tag{2}$$

$$x'' = \frac{A + A_1}{m - (B + B_1)}. \tag{3}$$

Die letzten Formeln zeigen deutlich, dass das x'' im Falle (3) keineswegs die *Summe* derjenigen Werthe ist, welche x'' in den Fällen (1) und (2) besitzt. Somit ergiebt sich folgendes beachtenswerthe Resultat:

Hält man bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes an dem Grundsatze fest, dass gleichgerichtete Kräfte sich durch Addition zusammensetzen, so wird derselbe Grundsatz für die Beschleunigungen nicht mehr gelten.

Oder genauer und zugleich allgemeiner ausgedrückt: *Hält man**) *bei Anwendung des Weber'schen Gesetzes an dem Grundsatze fest, dass die auf einen beweglichen Punkt ausgeübten Kräfte sich zusammensetzen nach der Regel des Parallelogramms, so wird derselbe Grundsatz für die Beschleunigungen (welche jenem Punkt gleichzeitig durch verschiedene Ursachen eingeprägt werden) nicht mehr gelten.*

*) Wie solches üblich ist.

Zur Theorie der conformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche.

(Aus den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 30. Juli 1877.)

Von C. Neumann in Leipzig.

Die unendliche Ebene sei durch eine geschlossene Curve σ in einen äussern Theil $\mathfrak{A}$ und einen innern Theil $\mathfrak{J}$ zerlegt. Markirt man innerhalb $\mathfrak{J}$ einen *festen* Punkt j (von beliebiger Lage), und will man nun die Fläche $\mathfrak{J}$ durch conforme Abbildung in eine Kreisfläche vom *Radius Eins* verwandeln, deren Centrum dem Punkte j entspricht, so hat man auf σ eine Massenvertheilung auszubreiten, welche für alle auf σ gelegenen Punkte äquipotential*) ist mit einer in j concentrirten Masse Eins. Bezeichnet man alsdann das Potential dieser Belegung auf einen innerhalb $\mathfrak{J}$ gelegenen *variablen* Punkt x, y mit $G = G(x, y)$, ferner das Potential jener in j concentrirten Masse Eins auf denselben Punkt mit $T = T(x, y)$, und setzt man endlich:

$$U = G - T, \tag{1}$$

so bewerkstelligt sich die in Rede stehende Abbildung vermittelst der Formel:

$$\xi + i\eta = e^{U+iV}, \tag{2}$$

wo V die zu U conjugirte Function bezeichnet, d. i. diejenige, welche zu U in der Beziehung steht: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$.

Dieser einfache Satz, zu welchem ich bereits im Jahre 1861 bei meinen Untersuchungen über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ (Borchardt's Journal Bd. 59) gelangt war, wird ohne Zweifel sein Analogon haben *für die Fläche* $\mathfrak{A}$. Und diesen analogen Satz will ich hier in Kürze mittheilen.

---

*) Selbstverständlich ist hier vom *Logarithmischen* Potential die Rede. Und zwar definire ich das Logarithmische Potential eines gegebenen Massensystems $m, m', m'', \cdots$ auf einen variablen Punkt (x, y) durch die Formel:

$$m \lg \frac{1}{r} + m' \lg \frac{1}{r'} + m'' \lg \frac{1}{r''} + \cdots,$$

wo $r, r', r'', \cdots$ die Entfernungen der Punkte $m, m', m'', \cdots$ von (x, y) vorstellen.

Markirt man auf der Fläche $\mathfrak{A}$ irgend einen festen Punkt α, und soll nun diese Fläche $\mathfrak{A}$ durch conforme Abbildung in eine Kreisfläche von *beliebigem Radius* verwandelt werden, deren Mittelpunkt dem Punkte α entspricht, so breite man auf der Curve σ eine Belegung von der *Gesammtmasse Eins* aus, welche für alle auf σ gelegenen Punkte, *abgesehen von einer additiven Constanten*, äquipotential ist mit einer in α concentrirten Masse Eins. Bezeichnet man alsdann das Potential dieser Belegung auf einen innerhalb $\mathfrak{A}$ gelegenen *variablen* Punkt x, y mit $H = H(x, y)$, ferner das Potential jener in α concentrirten Masse Eins auf denselben Punkt mit $T = T(x, y)$, und setzt man endlich:

(3) $$U = H - T,$$

so bewerkstelligt sich die in Rede stehende Abbildung vermittelst der Formel:

(4) $$\xi + i\eta = e^{U + iV},$$

wo V die zu U conjugirte Function bezeichnet, oder allgemeiner vermittelst der Formel:

(5) $$\xi + i\eta = Ae^{U + iV},$$

wo A eine beliebige reelle oder complexe Constante bezeichnet. Durch geeignete Wahl dieser Constanten A kann man erreichen, dass der Radius der entstehenden Kreisfläche einen vorgeschriebenen Werth, z. B. den Werth Eins, erhält.

Dabei sei bemerkt, dass das Potential H durch die für dasselbe gegebene Definition eindeutig bestimmt ist, und dass andererseits auch seine Existenz für solche Fälle ausser Zweifel steht, wo die gegebene Curve σ zweiten Ranges und keine zweisternige ist. Beides ergiebt sich aus meinen *„Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential“* (Leipzig 1877); und zwar ersteres aus dem Theorem A^{add} (vgl. das genannte Werk, Seite 38), letzteres aus meiner Methode des arithmetischen Mittels (vgl. das genannte Werk, Seite 214, Nr. 24, oder besser noch die Math. Annalen, Bd. XIII, Seite 284—286).

Preisaufgabe
der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig*).

Für das Jahr 1881

wird die, ursprünglich für 1877 gestellte, in diesem Jahr aber nicht beantwortete Preisfrage wiederholt.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819–1848 sorgfältig untersuchte Komet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalien gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, und die von Asten'schen Untersuchungen, wenigstens so weit dieselben bekannt geworden sind, noch zu keinem definitiven Resultate geführt haben, so ist eine *vollständige* Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Kometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Kometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt desshalb die Aufgabe:

> *die Bewegung des Encke'schen Kometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre* 1848 *verflossenen Zeitraums zu untersuchen.*

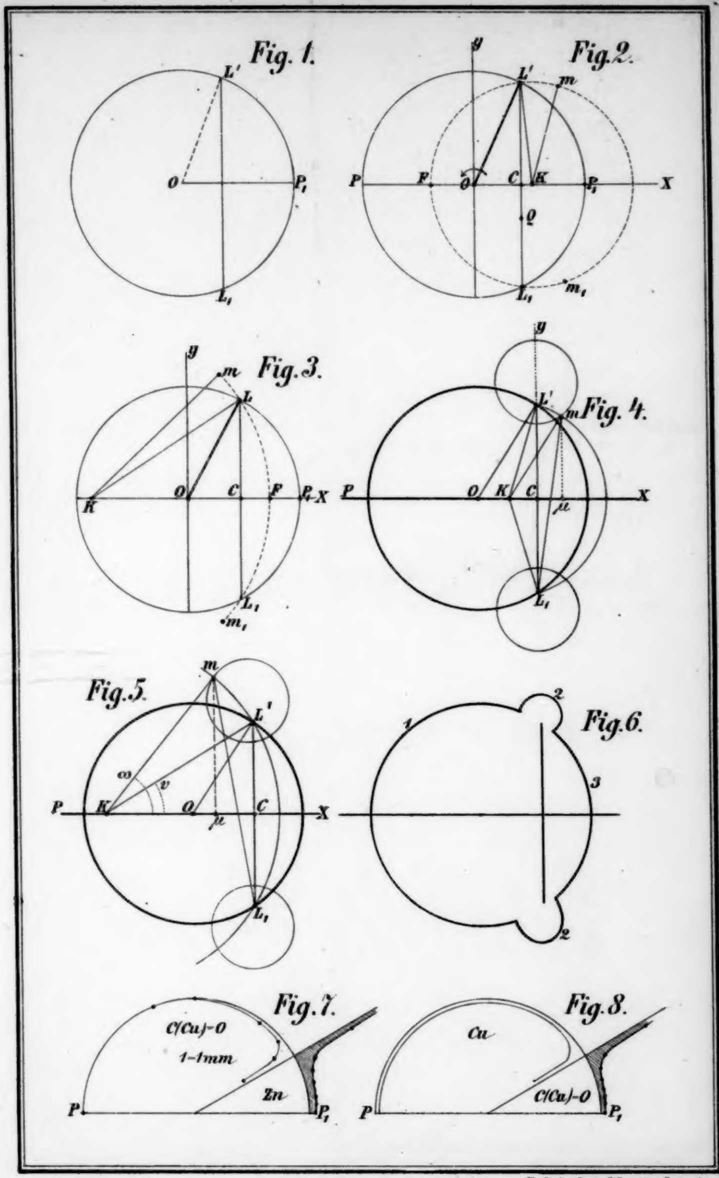
Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer spätern Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer*

*) Vgl. diese Annalen Bd. X, p. 417; Bd. XII, p. 575.

Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. *November des angegebenen Jahres,* und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1878 Prof. der Geschichte, Dr. Georg Voigt) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.



Eschebach & Schaefer, Leipzig

Fig. 9.

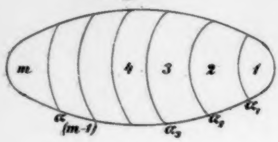


Fig. 10.

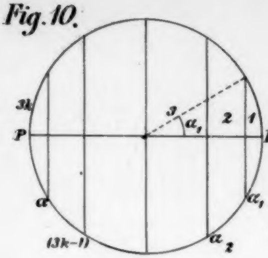


Fig. 11.

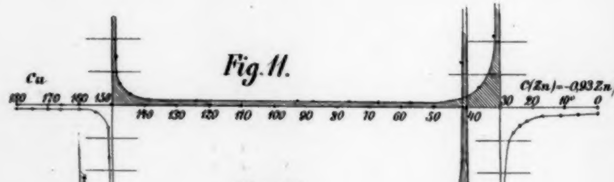


Fig. 12.

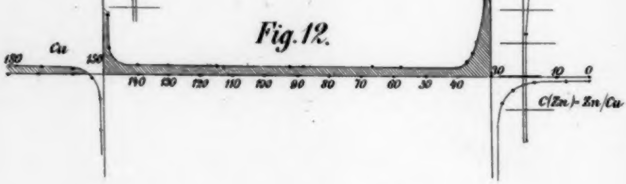
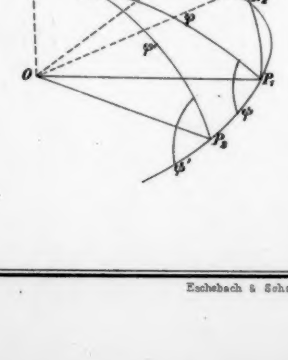


Fig. 13.

Fig. 14.



Eschebach & Schaefer, Leipzig.